数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 111-122

Borsuk-Ulam 型の定理とその周辺

原 靖浩 (大阪大学大学院理学研究科)

1 Borsuk-Ulam の定理とそれに関係するいくつかの定理

Borsuk-Ulam(ボルスク-ウラム) の定理は (コ) ホモロジーの応用として教科書などでも取りあげれることも多く, 数学に携わる人の多くが知っている (見たことがある) トポロジーの定理の一つであろう. この定理は様々な形で述べられるが, もともと Ulam が予想し, Borsuk が証明した定理は次のものである.

定理 A(Borsuk-Ulam の定理). S^n から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像 f に対し, $f(-a)=f(a)$ となる $a\in S^n$ が存在する.

ここで S^n は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の単位球面である. 次の２つの定理は, もとの Borsuk-Ulam の定理から容易に導かれる. また, ２つのどちらの定理が先に直接, 証明されれば, それから上の Borsuk-Ulam の定理は比較的容易に導かれる.

定理 B. 連続写像 $f:S^n\to\boldsymbol{R}^n$ が $f(-x)=-f(x)$ を満たすとき, $f^{-1}(0)\neq\emptyset$.

定理 C. 連続写像 $f:S^m\to S^n$ が $f(-x)=-f(x)$ を満たすとき, $m\leqq n$.

定理 B と定理 C がほぼ同じようなことを主張していることは容易にわかるであろう. また, 定理 A から定理 B が導かれることも易しい. 定理 B から定理 A を導くには S^n から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像 f に対し, $g:S^n\to\boldsymbol{R}^n$ を $g(x)=f(x)-f(-x)$ とおくと g が $g(-x)=-g(x)$ を満たすことを用いればよい.

このように定理 A, B, C はこのうち一つでも証明できれば, 他の定理も比較的簡単にそれから導かる. 同じように, 比較的簡単に簡単にお互いが導かれるような定理として以下のものが知られている.

定理 D. S^n の閉集合 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ が $S^n=A_1\cup\cdots\cup A_{n+1}$ を満たすならば, 少なくとも一つの A_i について $A_i\cap(-A_i)\neq\emptyset$ である.

定理 E. S^n の閉集合 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ がすべての $i(1\leqq i\leqq n+1)$ に対して $A_i\cap(-A_i)=\emptyset$ をみたし, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i\cup(-A_i))=S^n$ を満たすならば, $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n+1}\neq\emptyset$ である.

定理 D, E が Borsuk-Ulam の定理とどのように関係するかを簡単に見ておこう. まず, 定理 E が Borsuk-Ulam の定理から導かれることは以下のように示される.

S^n の閉集合 $A_1, \cdots, A_{n+1}$ がすべての $i(1 \leqq i \leqq n+1)$ で $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ をみたし, $\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cup (-A_i)) = S^n$ を満たすとき, 連続関数 $f_i : S^n \to \boldsymbol{R}$ を A_i で 0, A_i の補集合で正となるように取れる $(1 \leqq i \leqq n+1)$. これらを用いて, $s : S^n \to \boldsymbol{R}$ を $s(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$ により定義する. $A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1} = \emptyset$ と仮定すると, S^n の全ての点 x で $s(x) \neq 0$ である. $F : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を $F(x) = (f_1(x)/s(x), \cdots, f_n(x)/s(x))$ により定義すると, Borsuk-Ulam の定理より, $F(-a) = F(a)$ をみたすような $a \in S^n$ が存在する. $a \in A_i \cup (-A_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ならば, $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ より $f_i(-a)$ と $f_i(a)$ のうちいずれかが 0 でもう一方が 0 でないので, $f_i(-a)/s(-a) \neq f_i(a)/s(a)$ となり, $F(-a) = F(a)$ に矛盾する. よって, $a \notin A_i \cup (-A_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ である. また, このとき, $f_{n+1}(a)/s(a) = 1 - (f_1(a)/s(a) + \cdots + f_n(a)/s(a)) = 1 - (f_1(-a)/s(-a) + \cdots + f_n(-a)/s(-a)) = f_{n+1}(-a)/s(-a)$ である. したがって, $a \notin A_{n+1} \cup (-A_{n+1})$ も成り立つ. $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cup (-A_i))$ なので, これは矛盾. したがって, $A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

次に定理 E から定理 D を導こう.

S^n の閉集合 $A_1, \cdots, A_{n+1}$ が $S^n = A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$ を満たすとき, すべての A_i について $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ と仮定すると, 定理 E より $A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}$ とすると $S^n = A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$ より $-x \in A_i$ となる i が存在するが, この A_i に対して, $x, -x \in A_i$ より $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ となり矛盾. したがって, 定理 D が成り立つ.

最後に, 定理 D が成り立つことが先に証明されたとき, それから Borsuk-Ulam の定理を導くことができることを見よう. 定理 D から定理 B が証明できることを言えばよい.

S^n から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像 f で $f(-x) = -f(x)$ を満たすものについて, $f^{-1}(0) = \emptyset$ と仮定する.

このとき, $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合 $B_1, \cdots, B_{n+1}$ が $f(S^n) \subset B_1 \cup \cdots \cup B_{n+1}$, かつ, 各 B_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$ が $B_i \cap (-B_i) = \emptyset$ を満たすようにとることができる.

$A_i = f^{-1}(B_i)$ とおくと, $A_1, \cdots, A_{n+1}$ は $S^n = A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$ をみたし, また, f が $f(-x) = -f(x)$ を満たすことと $B_i \cap (-B_i) = \emptyset$ より $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ をみたす. これは定理 D に矛盾する. したがって, 定理 D から Borsuk-Ulam の定理が導かれることがわかる.

以上で, 定理 D, E が Borsuk-Ulam の定理と同様のこと主張していることがわかった.

位相空間 X に対して, X の中で可縮な $(n+1)$-個の X の閉集合 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ で $X = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ を満たすものを考えるとき, このような $A_0, \cdots, A_n$ が存在するような n の最小値が X の Lusternik-Schnirelmann カテゴリーと呼ばれるもので, ここで

は, これを cat(X) と書くことにする. Lusternik-Schnirelmann カテゴリーについては、岩瀬 [8] に最近の結果を含めてまとめられている. 上の定理 D, E が次のことと関係があることはすぐにわかると思う.

定理 F. $\mathrm{cat}\boldsymbol{R}P^n = n$.

ところで, S^n に群 $\boldsymbol{Z}_2 (= \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$ の作用を $g \cdot x = -x$ (g は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) により与える (この $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を対心作用と呼ぶ) と, 定理 A は $\boldsymbol{R}^n$ に自明な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考えたときの同変点の存在に関する定理と見ることができ, 定理 B は $\boldsymbol{R}^n$ に原点対称な点を入れ替えるような $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考えたときの, $\boldsymbol{Z}_2$-不変集合 (この場合は不動点集合) の同変写像による原像の位相に関する定理と見れる. また, 定理 C は同変写像の存在に関する定理と考えることができる. それぞれの視点で, Borsuk-Ulam の定理は一般化されていて, しかも, 「作用する群」を一般化するもの, さらに「作用の仕方」を一般化するものや, 「作用する空間」を一般化するもの, というように様々な方向への拡張がある. 例えば, 同変点の存在 (定理 A の形の一般化) については, 中岡 [14, 15] などで考察されている. Fadell-Husseini [3, 4], Jawalowski[9], 小宮 [11] などでは, 同変写像による不動点集合の原像の位相に関して主に考え, また, 同変写像の存在についても書いている. Wasserman[21] は群の作用をより一般化し, さらに, 同変写像の条件を等変写像 (isovariant map) に強めてその存在のための必要条件について考察している. さらに, 長崎 [16, 17], 長崎-牛瀧 [18] では [21] で求めた必要条件がどのような群の作用の場合に十分条件になっているかを調べている. その他, Borsuk-Ulam の定理に関する文献は Steinlein[19, 20] に詳しい. また, 本稿では, 応用についてはあまり述べないが, [19, 20] には Borsuk-Ulam の定理の微分方程式などへの応用についての記述もあり, 文献が挙げられている.

さて, もともとの Borsuk-Ulam の定理 (定理 A) を直接証明するには, 次の「写像度」に関する定理を用いて証明するのが一つの方法である.

定理 G. 連続写像 $f : S^n \to S^n$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき, f の写像度は奇数である.

この定理は, S^n に群 $\boldsymbol{Z}_2$ の作用を考えると, 同変写像の写像度が必ず奇数になるということである. この同変写像の写像度という観点で次節以降では Borsuk-Ulam の定理について見ていくことにする.

2 同変写像の写像度と cohomological index theory

前節の定理 G の証明としてよく知られている一つの方法は, 2 重被覆 $\pi : \tilde{X} \to X$ に対して, トランスファーと呼ばれる写像 $\pi_! : H^*(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(X; \boldsymbol{Z}_2)$ を定義し, 次の Thom-Gysin 完全系列と呼ばれる次の完全系列を利用するものである.

$$\cdots \xrightarrow{\cup\omega} H^q(X; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^q(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi_!} H^q(X; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega} H^{q+1}(X; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} \cdots$$

$(\omega \in H^1(X;\boldsymbol{Z}_2))$. この完全系列を用いると, 定理 C を直接証明することもできる.
他に定理 G を証明する方法としては, 障害理論を用いる方法もある ([2]).

Fadell と Husseini は [4] において, ideal-valued cohomological index theory を定義し, それにより Borsuk-Ulam の定理の一般化を考えた (Jawalowski も [9] において独立に同様のものを定義し, 同様の結果を得ている). まず, 彼らの方法を以下に紹介しよう.

G をコンパクト Lie 群, $EG \to BG$ を G の普遍 G-空間とするとき, Fadell と Husseini の index は, G-空間 X に対して, $c_X : X \to *$ (1 点からなる空間 $*$ への定値写像) から誘導される同変コホモロジーの準同型の kernel

$$\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K}) = \mathrm{Ker}(c_X^* : H_G^*(*;\boldsymbol{K}) \to H_G^*(X;\boldsymbol{K})) \quad (\boldsymbol{K} \text{ は体})$$

により定義されるものである. $H_G^*(*;\boldsymbol{K}) \cong H^*(BG,;\boldsymbol{K})$ であり, $\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})$ は $H^*(BG;\boldsymbol{K})$ の ideal になる. また, X が自由な G-空間のときには, $\tilde{\alpha} : X \to EG$ を G-写像とするとき, $\tilde{\alpha}$ より定まる写像 $\alpha : X/G \to BG$ より誘導されるコホモロジーの準同型 $\alpha^* : H^*(BG;\boldsymbol{K}) \to H^*(X/G;\boldsymbol{K})$ の kernel が $\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K})$ と一致する. index に関して次の命題が成り立つ.

命題 2.1([3, 4, 9]). X, Y を G-空間とするとき, G-写像 $f : X \to Y$ が存在するならば,

$$\mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K}) \supset \mathrm{Ind}^G(Y;\boldsymbol{K}).$$

この命題より, 球面の ideal-valued index を計算して, 定理 C が証明できる. また, 同変コホモロジーの部分を Alexsender-Spanier コホモロジーから定義されるものとするとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.2([3, 4, 9]). X, Y を G-空間とし, W を Y の G-不変な閉集合とする. G-写像 $f : X \to Y$ が存在するとき,

$$\mathrm{Ind}^G(f^{-1}(W);\boldsymbol{K})\mathrm{Ind}^G(Y - W;\boldsymbol{K}) \subset \mathrm{Ind}^G(X;\boldsymbol{K}).$$

この命題より, 定理 B が直接証明できる. さらに, この命題より, $f^{-1}(W)$ の位相的な情報もわかる場合がある. 例えば $m \geqq n$ で $f : S^m \to \boldsymbol{R}^n$ が $f(-x) = -f(x)$ をみたすとき, $f^{-1}(0)$ の次元が $m - n + 1$ 以上になることが命題 2.2 より証明できる. [3, 4, 9, 11] 等ではこのようにして, 同変写像の値域の G-不変集合の逆像の軌道空間のコホモロジーについての情報を取り出し, Lusternik-Schnirelmann カテゴリーについても考察している.

さて, 以上の ideal-valued cohomological index についての考察においては, Borsuk-Ulam の定理を直接証明しているものの, 定理 G のような写像度のことに関しては考え

ていなかった．以下では，この index を用いて同変写像の写像度について考察してみよう．そのために，k 次元の cohomological index を次のように定義する．$c_X : X \to *$ を 1 点からなる空間 $*$ への定値写像とするとき，

$$\mathrm{Ind}_k^G(X;\boldsymbol{K}) = \mathrm{Ker}(c_X^* : H_G^k(*;\boldsymbol{K}) \to H_G^k(X;\boldsymbol{K}))\ (\boldsymbol{K}\ \text{は体}).$$

X, Y を G-空間とするとき，G-写像 $f : X \to Y$ が存在するならば，$\mathrm{Ind}_k^G(X;\boldsymbol{K}) \supset \mathrm{Ind}_k^G(Y;\boldsymbol{K})$ が成り立つことは命題 2.1 と同様である．

G をコンパクト Lie 群，M, N をコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とし，M, N 上の G-作用は自由であることを仮定する．M から N への同変写像が存在するとき，$H^{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ が成り立つこと，および $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) \supset \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2)$ より，$\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2)$, $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2)$ については

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)\\
&\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)\\
&\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)
\end{aligned}$$

の 3 通りが考えられる．このうち，上の 2 つの場合については次のことが成り立つ．

定理 2.3([5]). G をコンパクト Lie 群，M, N をコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とし，M, N 上の G-作用は自由であることを仮定する．このとき，

(1) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ であれば，任意の G-写像 $f : M \to N$ に対して $f^* : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型である．特に，M および N が向き付けられているとき，任意の M から N への G-写像の写像度は奇数である．

(2) $\mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(N;\boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}_{n-\dim G}^G(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ であれば，任意の G-写像 $f : M \to N$ に対して $f^* : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ は零写像である．特に，M および N が向き付けられているとき，任意の M から N への G-写像の写像度は偶数である．

この定理の証明のために M, N の G 作用の軌道写像 $p_M : M \to M/G$, $p_N : N \to N/G$ に対して定義されるトランスファー $(p_M)_! : H^n(M;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ および $(p_N)_! : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ を定義する必要があるので簡単に説明しておく．

G_0 を G の単位元を含む連結成分とすると，G_0 は G の正規部分群であり，G/G_0 は有限群である．$\pi_M : M \to M/G_0$ はファイバー G_0 のファイバー空間と考えられるので，ファイバーに沿う積分

$$(\pi_M)_! : H^i(E;\Gamma) \twoheadrightarrow E_\infty^{i-n,n} \rightarrowtail E_2^{i-n,n} \cong H^{i-n}(B;\{H^n(F;\Gamma)\}) \cong H^{i-n}(B;\Gamma).$$

が与えられる．また $\tau_M : M/G_0 \to \frac{M/G_0}{G/G_0} \cong M/G$ は有限被覆なのでトランスファー $\tau_M^* : H^*(M/G_0;\Gamma) \to H^*(M/G;\Gamma)$ を考えることができる ([15] を参照)．これらを用

いて, $p_M : M \to M/G$ のトランスファー $(p_M)_! : H^i(M;\Gamma) \to H^{i-\dim G}(M/G;\Gamma)$ を $(p_M)_! = \tau_M^* \circ (\pi_M)_!$ により定義する. 同様に, $(p_N)_! : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ も定義される.

$f : M \to N$ を G-写像とするとき, $f : X \to Y$ から定まる写像 $\overline{f} : X/G \to Y/G$ があるが, これらの写像とトランスファー $(p_M)_!$, $(p_N)_!$ の間には $(p_M)_! \circ f^* = \overline{f}^* \circ (p_N)_!$ という関係があることに注意しておこう.

定理 2.3 の証明. M, N が連結な n 次元閉多様体で自由な G 作用をもつとき, $M/G, N/G$ も連結な閉多様体で次元は $n-\dim G$ である. このとき, $H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$, $H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$, $H^n(N;\boldsymbol{Z}_2)$, $H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ はすべて $\boldsymbol{Z}_2$ に同型である.

$p_M : M \to M/G$, $p_N : N \to N/G$ をそれぞれ M, N の G 作用の軌道写像とするとき, トランスファー $(p_M)_! : H^n(M;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ および $(p_N)_! : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像である.

$f : M \to N$ を G-写像とし, $\overline{f} : M/G \to N/G$ を f から決まる写像とする. $\tilde{\alpha} : N \to EG$ を G-写像とするとき, $\overline{f}$ と $\tilde{\alpha}$ より定まる写像 $\alpha : N/G \to BG$ の合成 $\alpha \circ \overline{f}$ より誘導されるコホモロジーの準同型 $(\alpha \circ \overline{f})^* : H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel は $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M,\boldsymbol{Z}_2)$ と一致する.

したがって, $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ のとき, $(\alpha \circ \overline{f})^* = \overline{f}^* \circ \alpha^*$ は自明な写像ではない. このことから, $\overline{f}^* : H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ は自明な写像ではないことがわかるが, $H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ なので $\overline{f}^*$ は同型写像である. $(p_M)_! \circ f^* = \overline{f}^* \circ (p_N)_!$ なので, $\overline{f}^*$, $(p_M)_!$, $(p_N)_!$ がすべて同型写像であることから, $f^* : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像であることがわかる.

次に $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_2) \neq \mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ のとき, $\overline{f}^* \circ \alpha^* : H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel は $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M,\boldsymbol{Z}_2)$ と一致し, $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_2)$ が $\alpha^* : H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2)$ の kernel であることから, $\overline{f}^* : H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2)$ は単射ではないことがわかる.
$H^{n-\dim G}(N/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong H^{n-\dim G}(M/G;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ なので $\overline{f}^*$ は自明な写像である. $(p_M)_! \circ f^* = \overline{f}^* \circ (p_N)_!$ であり, $(p_M)_!$, $(p_N)_!$ が同型写像なので, $f^* : H^n(N;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(M;\boldsymbol{Z}_2)$ も自明な写像であることがわかる. ∎

$\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ のときには, 上のような写像度に関する制限を受けないような例がある. 例えば, $M = N = T^2 (= S^1 \times S^1)$ とし, T^2 に $\boldsymbol{Z}_2$ を $g(z_1, z_2) = (-z_1, z_2)$ ($g \in \boldsymbol{Z}_2$ は生成元で, $z_1, z_2 \in S^1$) と作用させると, $\mathrm{Ind}^G_2(N;\boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Ind}^G_2(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^2(BG;\boldsymbol{Z}_2)$ であり, M から N へはどのような写像度の同変写像も存在し得る.

Borsuk-Ulam の定理は球面上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用 (対心作用) に関するものであるが, 球面上の対心作用について index を計算すると,

$$\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{Z}_2}_n(S^n;\boldsymbol{Z}_2) = \{e\} \neq H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$$

がわかる. このことに定理 2.3(1) を適用すると, 第1節で紹介した定理 G が導かれる.

定理 2.3 では, コホモロジーの係数を $\boldsymbol{Z}_2$ で考えていたが, M, N および $M/G, N/G$ が向き付け可能であれば, $\boldsymbol{Z}_p$ 係数 (p は素数) でも同様に次のことが成り立つ.

定理 2.4([5]). G をコンパクト Lie 群, M, N を向き付けられたコンパクトで連結な n 次元 G-多様体とする. また, M, N 上の G-作用は自由であり, $M/G, N/G$ が向き付け可能であることを仮定する. このとき, p を素数とすると

(1) $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_p) = \mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_p) \neq H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_p)$ であれば, 任意の M から N への G-写像の写像度は p で割り切れない.

(2) $\mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(N;\boldsymbol{Z}_p) \neq \mathrm{Ind}^G_{n-\dim G}(M;\boldsymbol{Z}_p) = H^{n-\dim G}(BG;\boldsymbol{Z}_p)$ であれば, 任意の M から N への G-写像の写像度は p で割り切れる.

3 定理2.3, 2.4 の応用

$\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する n 次元多様体は必ず S^n への同変写像が存在するが (ここで S^n 上には対心作用を考えている), $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する n 次元多様体の index を計算する方法として, 次のように球面への写像の写像度を調べる方法がある. このことを使うと, どのような $\boldsymbol{Z}_2$-多様体が Borsuk-Ulam の定理と同様の性質を持つかが比較的簡単にわかる.

命題 3.1. M を向きつけられたコンパクト連結 n 次元 $\boldsymbol{Z}_2$-多様体とし, M 上の $\boldsymbol{Z}_2$-作用は自由であることを仮定する. また, S^n 上には対心作用を考えるものとする. このとき,

(1) M から S^n に写像度が奇数の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在するならば, $\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{Z}_2}_n(M;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^n(BG;\boldsymbol{Z}_2)$.
(2) M から S^n に写像度が偶数の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在するならば, $\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{Z}_2}_n(M;\boldsymbol{Z}_2) = H^n(BG;\boldsymbol{Z}_2)$.

証明は, $\tilde{\alpha}: S^n \to E\boldsymbol{Z}_2$ を $\boldsymbol{Z}_2$-写像とすると, それより決まる写像 $\alpha: \boldsymbol{R}P^n \to B\boldsymbol{Z}_2$ から誘導されるコホモロジーの準同型 $\alpha^*: H^n(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(\boldsymbol{R}P^n;\boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像であることを使えば, 難しくない.

命題 3.1 (1) より, 向きつけられたコンパクト連結 n 次元 $\boldsymbol{Z}_2$-多様体 M (作用は自由) が, S^n への写像度が奇数の $\boldsymbol{Z}_2$-写像をもつならば, 定理 A, B, D, E, F については, 定理の中の S^n を M に変え, $-x$ の部分を gx (g は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) に変えて同様のことを導くことができる. (定理 F については $\mathrm{cat}(M/\boldsymbol{Z}_2) = n$ ということである.)

例. Σ_k で genus k の有向閉曲面を表わすことにする.

k が偶数のとき, $g \in \boldsymbol{Z}_2$ を生成元とし, $\boldsymbol{R}^3$ に $g(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ により $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させる. $\boldsymbol{R}^3$ に Σ_k を図1のように $\boldsymbol{Z}_2$ 不変になるように埋め込むことにより, Σ_k 上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える.

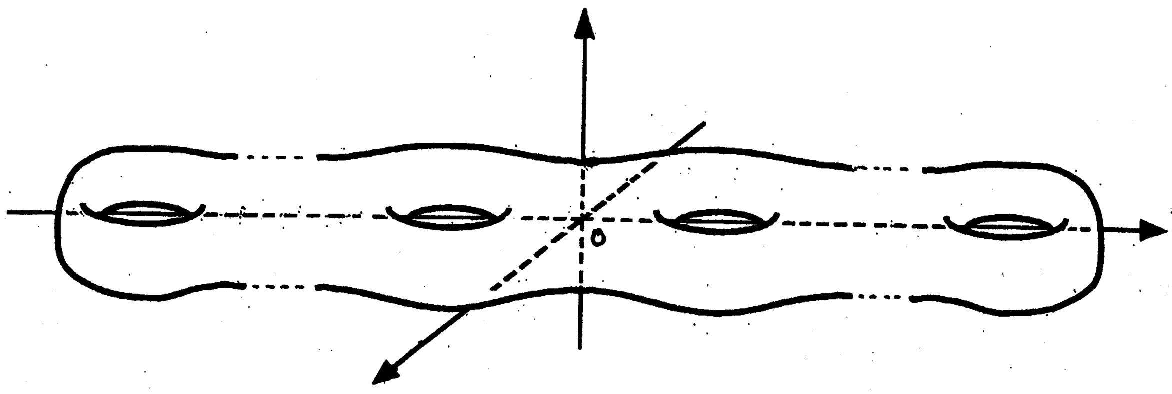

図 1

このとき, S^2 への写像度 1 の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在し, $\mathrm{Ind}_2^{\boldsymbol{Z}_2}(\Sigma_k;\boldsymbol{Z}_2) \neq H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$ がいえる.

k が奇数のときには 2 種類の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える. 1 つは $\boldsymbol{R}^3$ に $g(x,y,z)=(-x,-y,-z)$ により $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させ, $\boldsymbol{R}^3$ に Σ_k を図 2 のように $\boldsymbol{Z}_2$ 不変になるように埋め込むことにより $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える.

もう一つは $\boldsymbol{R}^3$ に $g(x,y,z)=(-x,-y,z)$ により $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させ, $\boldsymbol{R}^3$ に Σ_k をやはり図 2 のように埋め込むことにより, $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考える.

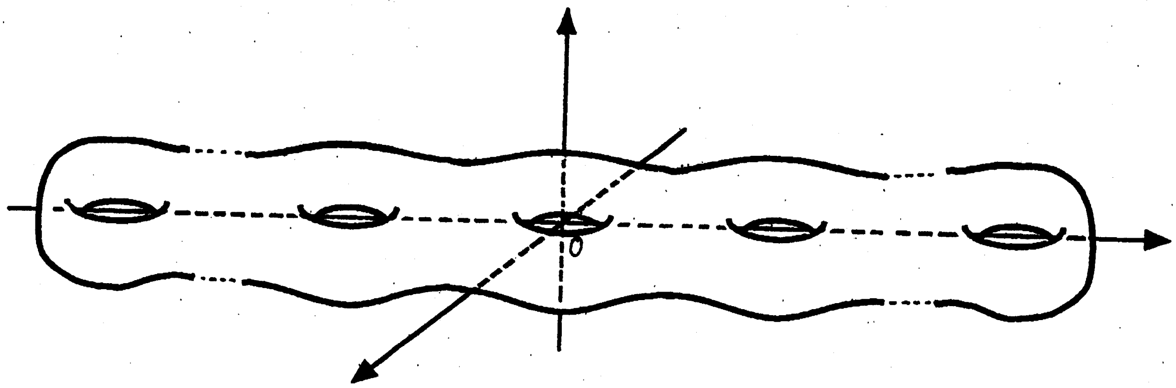

図 2

このとき, いずれの作用についても S^2 への写像度 0 の $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在し, $\mathrm{Ind}_2^{\boldsymbol{Z}_2}(\Sigma_k;\boldsymbol{Z}_2) = H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{Z}_2)$ がいえる.

以上の結果を 命題 3.1 および命題 2.1 に適用すると, 次のことがいえる. (genus が奇数の場合にはいずれの作用でもよい.)

(1) k が偶数, l が奇数ならば, Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像は存在しない.

(2) k が奇数, l が偶数ならば, Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度は偶数である.

(3) k, l がともに偶数ならば, Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像の写像度は奇数である. 特に, k, l がともに偶数で $k<l$ ならば Σ_k から Σ_l への $\boldsymbol{Z}_2$-写像は存在しない.

(1), (2) と (3) の前半部分については容易にわかるので, (3) の後半部分について説明をしておこう.

k, l が共に偶数で $k < l$ のとき, $f : \Sigma_k \to \Sigma_l$ が存在すると仮定すると, $\dim_{\boldsymbol{Z}_2} H^1(\Sigma_l; \boldsymbol{Z}_2) > \dim_{\boldsymbol{Z}_2} H^1(\Sigma_k; \boldsymbol{Z}_2)$ なので $f^* : H^1(\Sigma_l; \boldsymbol{Z}_2) \to H^1(\Sigma_k; \boldsymbol{Z}_2)$ の kernel は 0 ではない. $x \in \mathrm{Ker} f^* - \{0\}$ とすると, $y \in H^1(\Sigma_l; \boldsymbol{Z}_2)$ で $x \cdot y \neq 0 (\in H^2(\Sigma_l; \boldsymbol{Z}_2))$ を満たすものが存在する. このとき, $x \in \mathrm{Ker} f^*$ より $f^*(x \cdot y) = f^*(x) \cdot f^*(y) = 0$ である. これは f の写像度が奇数であることに矛盾する.

次に Stiefel 多様体について考察しよう.

$V_k(\boldsymbol{R}^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $O(k)$ を直交群とすると, $O(k)$ は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用する. この作用を対角成分に ± 1 が並ぶような行列全体からなる部分群 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ に制限する. このとき, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ は自由 $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 空間となるが, この作用について, 井上明氏は [7] において次の定理を証明した.

命題 3.2([7]). $n = \dim V_k(\boldsymbol{R}^m)$ とするとき, $\mathrm{Ind}_n^{(\boldsymbol{Z}_2)^k} V_k(\boldsymbol{R}^m) \neq H^n(B(\boldsymbol{Z}_2)^k; \boldsymbol{Z}_2)$.

この定理から, 定理 2.3 を使って, つぎの Borsuk-Ulam 型定理が得られる.

定理 3.3([7]). $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ への $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ 写像の写像度は奇数である.

複素 Stiefel 多様体 $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ についても同様にユニタリー群 $U(k)$ の自然な作用を部分群 $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ (p は素数) に制限するとき次の定理が成り立つ.

定理 3.4([7]). $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{C}^m)$ への $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ 写像の写像度は p の倍数でない.

ところで, 定理 3.3 や 3.4 では, 作用する群はもう少し小さくても同様の性質が成り立つようにも思える. 例えば, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ のすべての成分に -1 をかけてできるような $\boldsymbol{Z}_2$ 作用について, $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ からそれ自身への写像度は必ず奇数になるか? ということである. しかしながら, このことは一般的に成り立つわけではない. 次のような反例がある.

例. $V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ に $\boldsymbol{Z}_2$ を

$$g\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{2m-1} & -a_{2m} \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{2m-1} & -b_{2m} \end{pmatrix}$$

(g は $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元) により作用させる. このとき, $V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ から $V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ への写像を

$$f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ -a_2 & a_1 & \cdots & -a_{2m} & a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

と定義すると, これは $\boldsymbol{Z}_2$ 写像になっていて, 写像度は 0 である. 写像度が 0 であることは, 以下のようにして見ることができる.

$f_1 : V_2(\boldsymbol{R}^{2m}) \to S^{2m-1}$ を

$$f_1\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{2m-1} & b_{2m} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_{2m-1}, a_{2m})$$

により定義し, $f_2 : S^{2m-1} \to V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ を

$$f_2(a_1, a_2, \cdots, a_{2m-1}, a_{2m}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ -a_2 & a_1 & \cdots & -a_{2m} & a_{2m-1} \end{pmatrix}.$$

により定義すると, $f = f_2 \circ f_1$ である. $n = \dim V_2(\boldsymbol{R}^{2m})$ とすると, $H^n(S^{2m-1}; \boldsymbol{Z}_2) = 0$ なので, $f^* = f_1^* \circ f_2^* : H^n(V_2(\boldsymbol{R}^{2m}); \boldsymbol{Z}_2) \to H^n(V_2(\boldsymbol{R}^{2m}); \boldsymbol{Z}_2)$ の像は0になる. したがって, f の写像度は0である.

このように, $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の自明でない部分群 H に制限した場合に $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ から $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ への H 写像の写像度は必ず奇数になるとは限らないわけであるが, Stiefel 多様体 $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ の k や m, また, 作用する $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群の取り方によっては, 同変写像の写像度に制限がつく場合があるかもしれない. 実際, 上の例と同様の例を $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ で構成しようとしても, S^{2m} から $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ への写像を作るところがうまくいかない. S^{2m} から $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ への写像を上の例のようにして作るのは, S^{2m} 上のベクトル場で, 各点における接ベクトルの大きさが1であるようなものを構成することに他ならないが, S^{2m} 上のベクトル場は ポアンカレ-ホップの定理より必ず零点があり, 上の例と同様にはできないのである. $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ に上の例のように $\boldsymbol{Z}_2$ を作用させるとき, $V_2(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ からそれ自身への同変写像で写像度が偶数になるようなものが存在するかはわかっていない. ただし, 定理 2.3 を用いて, そのことを調べることはできない. H を $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群で, 自明でなく, $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ とも異なるようなものとすると, $\mathrm{Ind}_n^H(V_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_2)$ (n は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ の次元) が成り立つからである. この事実は [7] に証明があるが, 下に, もう少し一般的なことを証明しておこう.

命題 3.5. M を n 次元の連結な閉多様体で, $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ が自由に作用しているとする (p は素数). M が向き付け可能, または $p = 2$ のとき, H を $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ の部分群で, $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ と異なるようなものとすると, $\mathrm{Ind}_n^H(M; \boldsymbol{Z}_p) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p)$.

証明. 以下, $G = (\boldsymbol{Z}_p)^k$ とする. H を G と異なる G の部分群とすると, $\pi : BH \to BG$ より導かれるコホモロジーの準同形 $\pi^* : H^*(BG; \boldsymbol{Z}_p) \to H^*(BH; \boldsymbol{Z}_p)$ は全射である.

$\mathrm{Ind}_n^H(M; \boldsymbol{Z}_p) \neq H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p)$ であると仮定すると, $H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は $\boldsymbol{Z}_p$ と同型なので, M 上の H 作用に関する分類写像 $f_H : M/H \to BH$ より誘導される準同型 $f_H^* : H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は全射になる. したがって, $f_H^* \circ \pi^* : H^n(BG; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は全射である.

一方, G/H は位数が p の倍数の群になるから, $q : M/H \to M/G$ より導かれる準同型 $q^* : H^n(M/G; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は零写像である. したがって, $f_G : M/G \to BG$ を M 上の G 作用に関する分類写像とすると, $q^* \circ f_G^* : H^n(BG; \boldsymbol{Z}_p) \to H^n(M/H; \boldsymbol{Z}_p)$ は零写像である. $f_H^* \circ \pi^* = q^* \circ f_G^*$ であるので, これは矛盾. したがって, $\mathrm{Ind}_n^H(M; \boldsymbol{Z}_p) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_p)$ である.∎

このことより, H を $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ の部分群で, 自明でなく, $(\boldsymbol{Z}_2)^k$ とも異なるようなものとすると, $\mathrm{Ind}_n^H(V_k(\boldsymbol{R}^m); \boldsymbol{Z}_2) = H^n(BH; \boldsymbol{Z}_2)$ (n は $V_k(\boldsymbol{R}^m)$ の次元) が成り立つことが

わかる．したがって，$V_k(\boldsymbol{R}^m)$ 上の $(\boldsymbol{Z}_2)^l$ 作用 $(l<k)$ について，写像度を考えるのにcohomological index のみを用いるのは有効ではなく，別の方法が必要になるようである．

ところで，S^n 上の自由な $\boldsymbol{Z}_p$ 作用に対しては，一般に $\mathrm{Ind}_n^{\boldsymbol{Z}_p}(S^n;\boldsymbol{Z}_p)\neq H^n(B\boldsymbol{Z}_p;\boldsymbol{Z}_p)$ が成り立つことから，命題 3.5 の系として次のことが得られる．

系 3.6. S^n 上には $\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p$ は自由に作用しない．

系 3.6 は [10, 15] にも紹介されているが，それぞれ別の方法で証明している．ここで紹介した方法だと，系 3.6 が Borsuk-Ulam の定理と関係していることがわかるであろう．

多様体が，どのくらい大きな k に対して，$(\boldsymbol{Z}_p)^k$ の自由な作用を持ち得て，そのうちのいつ Borsuk-Ulam 型の定理が成り立つかということが今後の問題の一つである．閉多様体に $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ が自由に作用するとき，Lusternik-Schnirelmann カテゴリーは k 以上で，さらに，k が Lusternik-Schnirelmann カテゴリーと一致するときには cohomological index に関して，$\mathrm{Ind}_n^{(\boldsymbol{Z}_p)^k}(M;\boldsymbol{Z}_p)=H^n(B(\boldsymbol{Z}_p)^k;\boldsymbol{Z}_p)$ (n は多様体の次元) が成り立つのではないか？と予想していたのだが，広島大学の松本堯生先生より，四次元多様体においては任意の基本群を持つようなものが存在するので，反例があるとの指摘を受けた．実際，$(\boldsymbol{Z}_2)^5$ を基本群に持つ 4 次元多様体 M の普遍被覆空間 $\tilde{M}$ は Lusternik-Schnirelmann カテゴリーは 4 以下であるが，$(\boldsymbol{Z}_2)^5$ が自由に作用するわけである．

閉多様体に $(\boldsymbol{Z}_p)^k$ が自由に作用するとき，k と多様体の $\boldsymbol{Z}_p$ 係数のコホモロジーの生成元の個数とが関係するのではないかと現在は予想している．

参考文献

[1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre, Fund. Math **21**(1933), 177–190.

[2] T. tom Dieck, Transformation groups, Walte de Gruyter, Berlin, New York 1987.

[3] E. Fadell, Ideal-valued generalizations of Ljusternik-Schnirelmann category, with applications. Topics in equivariant topology (eds. E. Fadell, et al.), Sém. Math. Sup., **108**, Presses Univ. Montreal, 1989, 11–54

[4] E. Fadell and S. Husseini, An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems, Ergodic Theory Dynamical Systems, **8**(1988), 73–85.

[5] Y. Hara, The degree of equivariant maps, Topology Appl. **148**(2005), 113–121.

[6] Y. Hara and N. Minami, Borsuk-Ulam type theorems for compact Lie group actions, Proc. Amer. Math. Soc. **132**(2004), 903–909.

[7] A. Inoue, Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds, Osaka J. Math. **43**(2006), 183–191.

[8] 岩瀬則夫, Ganea 予想と Lusternik-Schnirelmann カテゴリーの最近の発展, 数学, **56**, No. 3 (2004), 281–296.

[9] J. Jaworowski, Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem, Proc. Edinb. Math. Soc. **32**(1989), 271–279.

[10] K. Kawakubo, The theory of transformation groups, Oxford Univ. Press, 1991.

[11] K. Komiya, Borsuk-Ulam theorem and Stiefel manifolds, J. Math. Soc. Japan **45**(1993), 611–626.

[12] L. Lusternik and L. Schnirelmann, Topological methods in variational problems, Issledowatelskiĭ Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930.

[13] L. Lusternik and L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problèmes variarionnels, Hermann & Cie., Paris, 1934.

[14] M. Nakaoka Continuous maps of manifolds with involution. I, II, Osaka J. Math. **11**(1974), 129–162, III ibid **12**(1975), 197–208.

[15] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.

[16] I. Nagasaki, The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups, Arch. Math. (Basel) **81**(2003), 348–359.

[17] I. Nagasaki, Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743–757.

[18] I. Nagasaki and F. Ushitaki, Isovariant maps from free C_n-manifolds to representation spheres, in preparation.

[19] H. Steinlein, Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey, Méthods topologiques en analyse non linéaire, (ed. A. Granas), Sém. Math. Sup.,**95**, Presses Univ. Montreal, 1985, 166–235

[20] H. Steinlein, Spheres and symmetry: Borsuk's antipodal theorem, Topol. Methods Nonlinear Anal. 1 (1993), 15–33.

[21] A. G. Wasserman, Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem, Topology Appl. **38**(1991), 155–161.