数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 139-144

球面の埋め込みのスピニングについて

信州大学理学部 高瀬将道 (Masamichi TAKASE)
Faculty of Science, Shinshu University
— Dennis Roseman (アイオワ大学) との共同研究 —

1　スピニング

スピニング (spinning) は, 与えられた結び目 (例えば 3 次元空間内に埋め込まれた円周) から高次元の結び目 (例えば 4 次元空間内に埋め込まれた球面) を作り出す方法です. [Artin] が非自明な高次元結び目 $S^n \subset S^{n+2}$ $(n \geq 2)$ の初めての例を構成するのに使ったのがスピニングの原型です. これは大まかに次のようなものです. 与えられた結び目 K: $S^1 \subset \mathbf{R}^3$ から K': $(D^1, \partial D^1) \subset (\mathbf{R}^3_+, \partial\mathbf{R}^3_+)$ を作り, $\mathbf{R}^3_+$ を open-book のように束ねたものを $\mathbf{R}^4$ だと思うとその中に埋め込まれた S^2 が得られます. これはしばしば図 1 のような絵で説明されます.

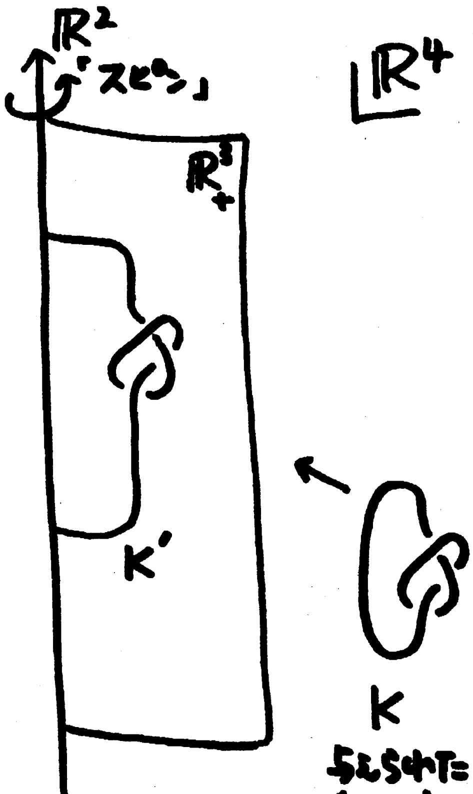

図 1　スピニングの絵

図 1 の中で「スピン」と書かれている, $\mathbf{R}^2$ を軸とする「公転」の間に, K' を $\mathbf{R}^3_+$ の中で「自転」させることができます. これが, ツイストスピニング (twist-spinning) です [Zeeman2]. スピニングにはこのほかにも [Fox] をはじめとして様々な一般化・バリエーションがあり, 高次元結び目理論の重要なツールとなっています. この様々な一般化に関する非常に良い概説が [Friedman] にあります.

一般化されたスピニングの理解には別の絵を用いるのが便利です．まず Artin のスピニングを説明しなおします．今度は $\mathbf{R}^4$ の中に標準的に埋め込まれた S^2 から始めます．更に S^2 の中に埋め込まれた S^1 を考えます．そうすると S^1 の各点 x の周りに，$S^1 \subset S^2$ の法円盤 D_x^1 と $S^1 \subset \mathbf{R}^4$ の法円盤 D_x^3 を考えることができます．この標準的な円盤対 (D_x^3, D_x^1) を始めに与えられた結び目から作った円盤対 K' で置き換えていくと，S^2 の新しい埋め込み $S^2 \subset \mathbf{R}^4$ が得られます．これは明らかに先に説明したスピニングと同じものです．

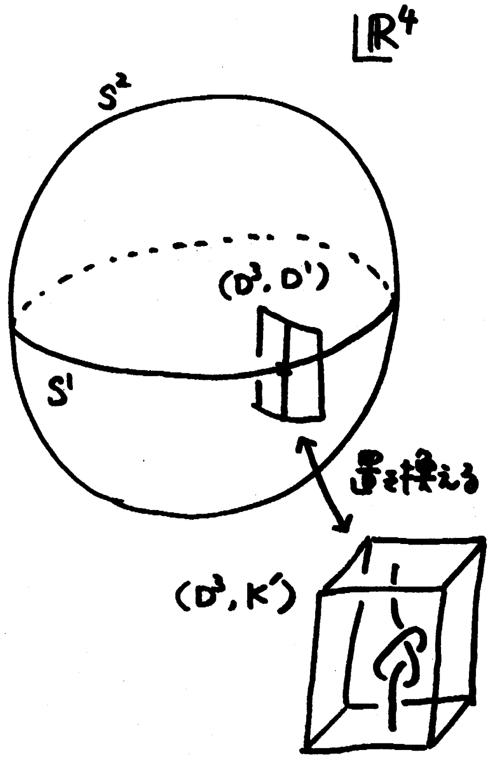

図2　スピニングの絵その2

更に，円盤対 (D_x^3, D_x^1) と置き換える円盤対を各 $x \in S^1$ ごとに変化させていくことで，より複雑な構成を考えることができます．すなわち，なんらかの写像

$$\phi\colon\ S^1 \to \{\text{埋め込み}\,(D^1, \partial D^1) \hookrightarrow (D^3, \partial D^3)\}$$

があれば，これを用いて，

$$[(S^2, \mathbf{R}^4) \setminus \bigcup_{x \in S^1} (D_x^3, D_x^1)] \cup \bigcup_{x \in S^1} (D^3, \phi(x)(D^1))$$

という構成を考えることができます．この考え方による構成はデフォームスピニング (deform-spinning) と呼ばれます [Litherland].

上で説明したデフォームスピニングは，三つ組 $S^1 \subset S^2 \subset \mathbf{R}^4$ を ϕ を使って「デフォーム」するものですが，この構成がもっと一般的な枠組みで可能なことはすぐに分かります．つまり，自明な法束を持つように埋め込まれた多様体の三つ組 $Z^{n-k} \subset Y^n \subset X^{n+\ell}$ を，写像

$$\phi\colon\ Z^{n-k} \to \{\text{埋め込み}\,(D^k, \partial D^k) \hookrightarrow (D^{k+l}, \partial D^{k+\ell})\}$$

を用いて，「デフォームスピン」することができます：

$$[(Y^n, X^{n+\ell}) \setminus (Z^{n-k} \times (D^k, D^{n+k}))] \cup \bigcup_{x \in Z^{n-k}} (D^{k+\ell}, \phi(x)(D^k)).$$

この構成は，部分多様体に沿うデフォームスピニング (deform-spinning about a submanifold) と呼ばれます [Roseman].

2 Haefliger 結び目のスピニングによる表現

前節の部分多様体に沿うデフォームスピニングによって，いわゆる高次元結び目 — 球面の余次元が 2 の埋め込み — に止まらない，より広い範囲の多様体の埋め込みに対してスピニングを考えることが可能になりました．

さて今回，Haefliger 結び目 [Haefliger1, Haefliger2] — 球面の余次元が 3 以上の滑らかな埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ $(k \geq 1)$ — を部分多様体に沿うデフォームスピニングで表すことに成功しました．これはアイオワ大学の Dennis Roseman との共同研究の結果です．実際のところは，先に [Budney] が Haefliger 結び目をある種のスピニングを用いて表現していて，我々は [Budney] の結果をより具体的に書き直したと言った方がよいかも知れません．ただ，余次元が 3 以上の埋め込みに対してスピニングを考えている例は [Budney, Hsiang-Sanderson, Milgram] のほかには殆どなく，部分多様体に沿うデフォームスピニングはそれが導入された [Roseman] 以降おそらく具体的な構成に使われたことがないので，組み合わせとしてはなかなか興味深いものだと思います．

Haefliger 結び目

まず n 次元球面 S^n から $(n+\ell)$ 次元球面 $S^{n+\ell}$ への滑らかな埋め込みの滑らかなイソトピー類全体がなす集合を C_n^ℓ とおきます $(\ell \geq 2)$:

$$C_n^\ell := \{\text{滑らかな埋め込み } S^n \hookrightarrow S^{n+\ell}\} / \text{滑らかなイソトピー}.$$

この C_n^ℓ は埋め込みの連結和という操作によって群になります．埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ $(k \geq 1)$ の場合には，[Haefliger1, Haefliger2] によって，群としての同型

$$\Omega\colon\ C_{4k-1}^{2k+1} \to \mathbf{Z}$$

が知られています．この $\mathbf{Z}$ の生成元を表す埋め込みは，[Haefliger1] をはじめ，[Budney, T2, T1] などで，具体的なやり方で構成されています．今回の共同研究の主結果は，この生成元を部分多様体に沿うデフォームスピニングによって記述したことです．

以下，簡単のために $k=1$，すなわち埋め込み $S^3 \hookrightarrow S^6$ の場合について書きますが，$k \geq 2$ の場合も全ての話が同様に進められます．

我々のデフォームスピニングは，標準的に埋め込まれた $T^2 \subset S^3 \subset S^6$ に対して施されます．つまり，(S^6, S^3) の中で，2 次元トーラスの各点 $x \in T^2$ における法方向に見えている円盤対 (D^4_x, D^1_x) をうまいやり方で「デフォーム」していって，C^3_3 の生成元を表す埋め込み $S^3 \hookrightarrow S^6$ を得ようとするわけです．この「デフォーム」をするときに使うのが次の Budney の写像です．

Budney の写像

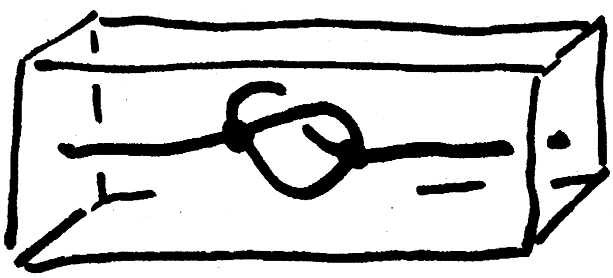

図 3　「はめ込まれた三葉結び目」

まず，D^3 の中に図 3 のように 2 点の交叉を持つ「はめ込まれた三葉結び目」を考えます．いま各交叉点を解消しようと思えば，局所的に，交叉をなす 2 本のアークの一方を「上」か「下」に少しずらすことで解消できます．つまり，交叉をなす 2 本のアークの接ベクトルは 2 次元の平面を張るので D^3 の中で 1 次元の法方向を持ち，それに対応して「S^0 通り」のやり方で交叉点を解消できるというように考えることができます．ではこの「はめ込まれた三葉結び目」をそのまま D^4 に置いたとき，D^4 の中で 2 点の交叉点を解消するやり方はどのくらいあるでしょうか? 上と同じような考えのもと，今度は「S^1 通り」のやり方で交叉点を解消できると考えることができます．各交叉点を解消するやり方が「S^1 通り」ですから，2 点の交叉点を解消するやり方は「$S^1 \times S^1$ 通り」です．そして，2 点の交叉点を解消する毎に，埋め込み $(D^1, \partial D^1) \hookrightarrow (D^4, \partial D^4)$ が得られます．こうして，Budney の写像 が得られます:

$$b\colon T^2 = S^1 \times S^1 \to \{\text{ 埋め込み } (D^1, \partial D^1) \hookrightarrow (D^4, \partial D^4)\}.$$

主結果

定理
標準的に埋め込まれた $T^2 \subset S^3 \subset S^6$ に対して，Budney の写像 b を使った部分多様体 T^2 に沿うデフォームスピニングを施すと，結果として得られる $\Sigma^3 \subset S^6$ は $C^3_3 \cong \mathbf{Z}$ の生成元を表す埋め込み (の像) である．

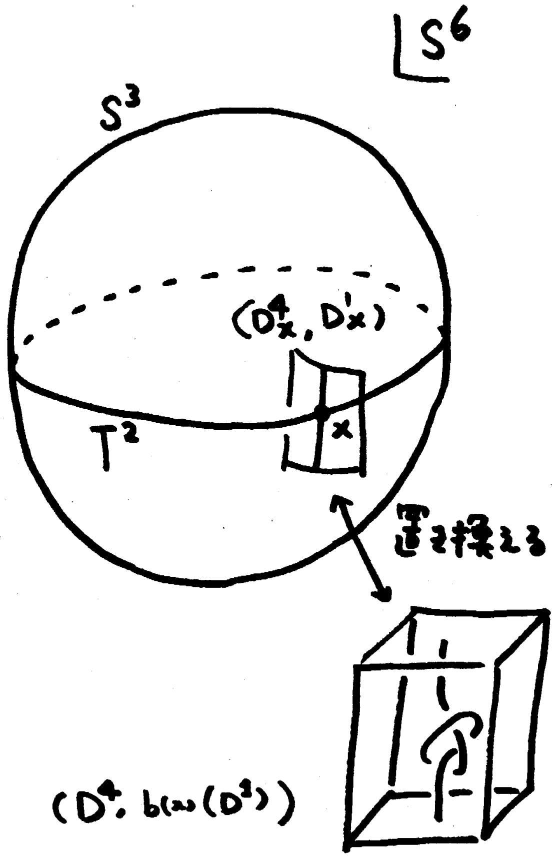

図 4　Haefliger 結び目の生成元

証明では [T2, T1] にある公式を用いました. その公式は, $\Sigma^3 \subset S^6$ のイソトピー類は Σ に対する Seifert 膜 $V^4 \subset S^6$ $(\partial V^4 = \Sigma^3)$ の「指数」と「法 Euler 類」で記述できるというものです. また, 標準的な埋め込み $S^3 \subset S^6$ に対する Seifert 膜 $D^4 \subset S^6$ からスタートしデフォームスピニングに応じてそれを変化させることで, 望みの Seifert 膜 $V^4 \subset S^6$ が得られることも分かります. その指数 $\sigma(V^4)$ はすぐに分かりますが, 法 Euler 類の計算に多少の苦労がありました. 特にある交叉点の符号を決定する部分が厄介で, その部分ではコンピュータによるグラフィックスがかなり助けになりました.

詳しくはどうぞ [Roseman-T] をご覧下さい.

参考文献

[Artin] **E Artin**, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im* $\mathbf{R}_4$, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4 (1925) 174-177.

[Budney] **R Budney**, *A family of embedding spaces*, preprint (arXiv: math.AT/0605069).

[Fox] **R H Fox**, *Rolling*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 162–164.

[Friedman] **G Friedman**, *Knot spinning*, Handbook of knot theory, 187–208, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[Haefliger1] **A Haefliger**, *Knotted* $(4k-1)$*-spheres in 6k-space*, Ann. of Math. 75 (1962) 452–466.

[Haefliger2] **A Haefliger**, *Differential embeddings of* S^n *in* S^{n+q} *for* $q \geq 2$, Ann. of Math. 83 (1966) 402–436.

[Hsiang-Sanderson] **W C Hsiang, B J Sanderson**, *Twist-spinning spheres in spheres*, Illinois J. Math. 9 (1965) 651–659.

[Litherland] **R A Litherland**, *Deforming twist-spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979) 311–331.

[Milgram] **R J Milgram**, *On the Haefliger knot groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 861–865.

[Roseman] **D Roseman**, *Spinning knots about submanifolds; spinning knots about projections of knots*, Topology Appl. 31 (1989) 225–241.

[Roseman-T] **D Roseman, M Takase**, *High-codimensional knots spun about manifolds*, Algebr. Geom. Topol. (to appear).

[T1] **M Takase**, *A geometric formula for Haefliger knots*. Topology 43 (2004) 1425–1447.

[T2] **M Takase**, *The Hopf invariant of a Haefliger knot*, Math. Z. (in press).

[Zeeman1] **E C Zeeman**, *Unknotting spheres*, Ann. of Math. (2) 72 (1960) 350–361.

[Zeeman2] **E C Zeeman**, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965) 471–495.