数理解析研究所講究録
第1540巻 2007年 152-162

同変コホモロジーの小Cartan複体とモデル圏
(The small Cartan complex for equivariant cohomology and model categories)

大阪大学大学院 理学研究科　山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

G をコンパクトで連結なLie群, $\mathfrak{g}$ をそのLie代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\Omega(M)$ を M の微分形式全体とするとき, Cartan複体とよばれる複体 $((S\mathfrak{g}^*\otimes\Omega(M))_{\mathrm{inv}}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ は同変コホモロジーを与える. Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] はCartan複体がより"小さい"複体 $((S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes\Omega(M)_{\mathrm{inv}}, \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}})$ と擬同型であると主張した. Maszczyk-Weber [5] がその証明にギャップを指摘したが, ほどなくしてAlekseev-Meinrenken [1] により正しい証明が与えられた. ただしKoszul双対性に基づくGoresky-Kottwitz-MacPhersonの方法とAlekseev-Meinrenkenの方法は大きく異なる. 本稿ではLefèvreにより与えられたKoszul双対性の拡張を用いて, Goresky-Kottwitz-MacPhersonの方法に近いアプローチを考える.

また $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ は小Cartan複体の自然な積に関してderivationにはならない. そのためAlekseev-Meinrenkenは新しい積 $\odot$ を導入し, この積に関して $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ がderivationになることを示した. しかし $\odot$ は結合的ではない. 本稿では $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}, \odot$ に高次の積を加えて, 小Cartan複体上に A_∞-構造を与える.

2 小Cartan複体

この節の詳細については [1] を参照.

2.1 定義など

以下では $\mathfrak{g}$ を標数0の体 $\mathbb{F}$ 上のreductive Lie代数とする.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$-微分空間とは次数付きベクトル空間 $\mathcal{M}$ とその微分 $\mathrm{d}^{\mathcal{M}}$, そして線型

写像

$$L^{\mathcal{M}},\ \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり，以下の条件をみたすものとする：

- $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ 0, −1,
- $[\mathrm{d}^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}})$,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$. □

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき次のように定める：

$$\mathcal{M}_{\mathrm{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi),$$
$$\mathcal{M}_{\mathrm{hor}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi),$$
$$\mathcal{M}_{\mathrm{basic}} := \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \cap \mathcal{M}_{\mathrm{hor}}.$$

□

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{e_a\}$，その双対基底を $\{e^a\}$ とする．そして以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と書くことにする．また $S\mathfrak{g}^*$ の次数は

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定める．

定義 2.3. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a)$$

を Cartan 複体とよび，そのコホモロジーを $\mathcal{M}$ の同変コホモロジー (の Cartan モデル) とよぶ． □

$(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の primitive な元全体からなる次数付き部分空間をそれぞれ $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$ とする．$\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間となるので，$\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底，$\{c^j\}$ をその双対基底とする．

また "Chevalley's transgression theorem" により c^j に対応する元を $p^j \in (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ と書くことにする．

そして $\iota : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$ を次数付き代数の準同型として

$$\iota : \wedge \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$$

と自然に拡張する．

定義 2.4. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき，

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}, \quad \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j)$$

を小 Cartan 複体とよぶ． □

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型と主張した．まず彼らがどのようにして小 Cartan 複体を見つけたのかを思い出す．

2.2 同変コホモロジーと Koszul 双対性

$\mathsf{Mod}^+(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ を下に有界な DG(Differential Graded) $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群のなす圏として，$\mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})$ をその導来圏とする．

同様にして $\mathsf{Mod}^+(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}})$ も定義すると，関手

$$h : \mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}), \quad X \mapsto X \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}},$$
$$t : \mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}), \quad Y \mapsto (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes Y$$

は，よく知られているように，Koszul 双対性とよばれる圏同値

$$\mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \simeq \mathsf{D}(\mathsf{Mod}^+(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}) \tag{1}$$

を与える．

$\mathfrak{g}$-微分代数とは次数付き結合代数 $\mathcal{A}$ であり，$\mathfrak{g}$-微分空間の構造をもち，さらに $\mathrm{d}^{\mathcal{A}}$, $L^{\mathcal{A}}(\xi)$, $\iota(\xi)^{\mathcal{A}}$ が $\mathcal{A}$ の積に関して derivation になるものとする．重要な例として Weil 代数 $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ がある．

次に $\mathfrak{g}$-微分 $\mathcal{A}$-加群とは $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{N}$ であり，$\mathcal{A}$-加群の構造をもち，さらにその作用 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が $\mathfrak{g}$-微分空間の準同型になるものとする．

[2] において Goresky-Kottwitz-MacPherson は次を主張した．

“定理”. $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数，$\mathcal{N}$ を下に有界な $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とするとき，$\mathsf{Mod}^+(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ において Chevalley-Koszul 複体とよばれる複体 $(\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, \mathrm{d}^{\mathcal{N}} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^{\wedge}(c_j))$ と複体 $(\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}, \mathrm{d}^{\mathcal{N}})$ は擬同型である． □

これと Koszul 双対性より，$\mathsf{Mod}^+(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ において

$$\begin{aligned}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} &= h(\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \\ &\overset{\text{q.i.}}{\sim} h(\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}) = (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}\end{aligned}$$

を得る．これを用いて

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &= (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \\
&= h(W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \\
&\sim h((W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \\
&= ht(W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{basic}} \\
&\sim (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{basic}} \\
&\cong (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} = C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
\end{aligned}
$$

であることがわかる．ここで最初の $\sim$ は $W\mathfrak{g}$ が acyclic であること，最後の $\sim$ は圏同値 (1) から従う．

以上により，$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と擬同型である複体 $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を見つけることができるのだが，[2] における "定理" の証明は，Maszczyk-Weber [5] によりギャップを指摘された．さらに彼らは [5] において新しい証明を与えたが，Alekseev-Meinrenken [1] によってこの証明にもギャップがあることがわかった．

そこで Alekseev-Meinrenken は $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であることを以下のように示した．

$\wedge\mathfrak{g}$ の次数を

$$
(\wedge\mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i\mathfrak{g}, \quad (\wedge\mathfrak{g})^i := 0 \qquad (i \geq 0)
$$

と定めるとき，Alekseev-Meinrenken は

$$
\partial f + \frac{1}{2}[f,f]_{\wedge\mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \tag{2}
$$

をみたす次数 0 の元 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ が存在することを示し，これを用いて次を得た．ただし $(\wedge\mathfrak{g})^- := \bigoplus_{i>0}(\wedge\mathfrak{g})^{-i}$ とする．

定理 2.5 **([1, Theorem 4.2])．** $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数，$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．方程式 (2) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して

$$
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
$$

は微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としてのホモトピー同値写像である． □

これより $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は擬同型が従う．

さらに彼らは次を示した．

定理 2.6 **([1, Theorem 5.5])．** $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数，$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群，そして $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ を方程式 (2) の任意の解とするとき，次が成り立つ．

(a)

$$\Psi:\mathcal{N}_{\text{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}\to\mathcal{N}_{\text{inv}},\quad z\otimes\eta\mapsto(-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota^W(f)}\eta\cdot z)$$

は微分 $(\wedge\mathfrak{g})_{\text{inv}}$-加群の準同型である．

(b)

$$\Upsilon:\mathcal{N}_{\text{inv}}\to\mathcal{N}_{\text{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}},\quad z\mapsto(P_{\text{hor}}\otimes 1)\circ e^{-\alpha}(e^{-\iota^{\mathcal{N}}(f)}z\otimes 1)$$

は微分 $(\wedge\mathfrak{g})_{\text{inv}}$-加群の準同型である．ここで $\alpha=\sum_j\iota^{\mathcal{N}}(c_j)\otimes c^j\in\mathrm{End}(\mathcal{N}_{\text{inv}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}})$ とする．

(c) $\Upsilon\circ\Psi$ は恒等写像であり，$\Psi\circ\Upsilon$ は恒等写像とホモトピックである． □

[1] には定理 2.6 と 2.5 は Koszul 双対性により結び付けられると書いている．しかし定理 2.6 を仮定しても Koszul 双対性から得られることは，下に有界な $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型のみである．定理 2.5 はより強力なことを主張しているので，これでは不満が残る．

そこで次節では Lefèvre による Koszul 双対性の拡張を考察する．

3 Lefèvre による Koszul 双対性の拡張

この節の詳細については [4], [3] を参照．

A を augmented DG 代数，C を cocomplete augmented DG 余代数とする．そして $\tau:C\to A$ を twisting cochain，つまり次数 1 の線型写像で

$$\mathrm{d}^A\circ\tau+\tau\circ\mathrm{d}^C+\mu^A\circ(\tau\otimes\tau)\circ\Delta^C=0,\quad\varepsilon^A\circ\tau\circ\varepsilon^C=0$$

を満たすものとする．ここで $\mathrm{d}^A,\mathrm{d}^C$ はそれぞれ A, C の微分，μ^A は A の積，Δ^C は C の余積，そして $\varepsilon^A,\varepsilon^C$ はそれぞれ A, C の augmentation とする．

L を DG A-加群とすると，$L\otimes C$ は $1\otimes\Delta^C$ を余積とする C-余加群になる．また

$$T:X\otimes X'\to X'\otimes X,\quad x\otimes x'\mapsto(-1)^{|x||x'|}x'\otimes x$$

とすれば

$$\mathrm{d}^L\otimes 1+1\otimes\mathrm{d}^C+(\mu^L\otimes 1)\circ(T\otimes 1)\circ(1\otimes\tau\otimes 1)\circ(1\otimes\Delta^C)$$

は微分になる．こうしてできる DG C-余加群を $L\otimes_\tau C$ と書くことにする．

次に Mod$A$ を DG A-加群のなす圏，Comc$C$ を cocomplete DG C-余加群のなす圏として，$\phi:L\to L'$ を Mod$A$ の射とするとき，$\phi\otimes 1:L\otimes_\tau C\to L'\otimes_\tau C$ は Comc C の射となる．

以上のようにしてできる関手を

$$?\otimes_\tau C:\mathrm{Mod}\,A\to\mathrm{Comc}\,C$$

と書く.

同様に M を cocomplete DG C-余加群とするとき，A-加群 $A \otimes M$ において

$$\mathrm{d}^A \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}^M + (\mu^A \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes T) \circ (1 \otimes \Delta^M)$$

は微分になり，こうしてできる DG A-加群を $A \otimes_\tau M$ と書き，関手を

$$A \otimes_\tau ? : \mathsf{Comc}\, C \to \mathsf{Mod}\, A$$

と表す.

このとき $(? \otimes_\tau C, A \otimes_\tau ?)$ は随伴関手の組となる ([4, Lemme 2.2.1.2] 参照).

以下では $\tau : C \to A$ は acyclic，つまり任意の DG A-加群 M に対して，adjunction morphism $A \otimes_\tau (M \otimes_\tau C) \to M$ が擬同型であると仮定する.

$\mathsf{Mod} A$ において weak equivalence として擬同型，fibration として全射準同型とするとモデル圏になることが知られているが，Lefèvre は次を示した.

定理 3.1 (**[4, Théorèm 2.2.2.2]**). (a) $\mathsf{Comc}C$ において weak equivalence として射 f で $A \otimes_\tau f$ が擬同型になるもの，cofibration として単射準同型とするとモデル圏になる.
(b) $(? \otimes_\tau C, A \otimes_\tau ?)$ は Quillen 同値になる. □

これから $\mathsf{Mod}A$, $\mathsf{Comc}C$ を weak equivalence のクラスで局所化した圏をそれぞれ $\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}A)$, $\mathsf{Ho}(\mathsf{Comc}C)$ と書くことにすると，

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}A) \simeq \mathsf{Ho}(\mathsf{Comc}C)$$

が成り立つことがわかる.

ここで $A = (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$, $C = (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$, そして

$$\tau : (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong \wedge\mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^* \to S\tilde{\mathcal{P}}^* \cong (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

とする．ただし $\wedge\mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*$ は自然な射影，$\tilde{\mathcal{P}}^* := \mathcal{P}^*[-1]$, そして $\mathcal{P}^* \to S\tilde{\mathcal{P}}^*$ は transgression とする．このとき τ は acyclic twisting cochain になる.

よって上記定理より圏同値

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \simeq \mathsf{Ho}(\mathsf{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \tag{3}$$

を得る．次節ではこれを用いて $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型を示す.

4 $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型の証明

任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して horizontal projection

$$P_{\mathrm{hor}} := \prod_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a)y^a : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$$

が定義できる．これは $S\mathfrak{g}^*$ の作用，$L^{\mathcal{N}}(\xi)$ とは可換であることを注意しておく．

$\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の余積 Δ を用いて $1\otimes\Delta$ により微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の構造をもつ．

一方 $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ は余積を

$$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{1\otimes\Delta} \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\Psi\otimes 1} \mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

とすれば微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群になる．

このとき上記定理 2.6 から Ψ, Υ は微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の擬同型になることがわかるが，さらに weak equivalence になることが以下のようにわかる．

まず $C^j := \bigoplus_{i\le j}(\wedge^i\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ とすると，$(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は $C^0 = \mathbb{F}$ を満たす exhaustive filtration

$$\mathbb{F} = C^0 \subset C^1 \subset \cdots \subset C^{\dim\mathfrak{g}} = (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

をもつ．

次に $\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ において $\wedge^j\mathcal{P}$ の全ての元の contraction が 0 である元からなる部分空間を F^j とすると，$F^0 = 0$ を満たす exhaustive filtration

$$0 = F^0 \subset F^1 \subset \cdots \subset F^{\dim\mathcal{P}+1} = \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

をもつことがわかる．

同様にして $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ も $(F')^0 = 0$ を満たす exhaustive filtration $\{(F')^j\}$ をもつ．このとき定理 2.6 の Ψ, Υ は filtration を保つ擬同型であることがわかる．

補題 4.1 ([4, Lemme 2.2.2.5])**.** cocomplete augmented DG 余代数 C が $C^0 = \mathbb{F}$ である exhaustive filtration $\{C^i\}$ をもつとする．2つの cocomplete DG C-余加群 M, M' がそれぞれ $F^0 = 0$ である exhaustive filtration $\{F^i\}$ をもつならば，M と M' の間の filtration を保つ擬同型は weak equivalence になる． □

この補題より Ψ は weak equivalence になることがわかる．よって，Mod $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ において擬同型

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \Psi : (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \to (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$$

を得る．ここでは簡単のため $\otimes_\tau$ を $\otimes$ と表した．

M, M' が擬同型であるとき $M \sim M'$ と書くことにすると，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &= (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \\
&\cong (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \\
&= C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．ここで最初の $\sim$ は $W\mathfrak{g}$ が acyclic であること，最後の $\sim$ は (3) から従う．

定理 4.2. $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数とするとき，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は擬同型である． □

Alekseev-Meinrenken はより強い主張，これらがホモトピックであることを示した．上記の方法でより強い主張を示すことが今後の重要な課題である．そこで以下では [4], [3] の結果を復習しながら，今後の課題を具体的に述べたい．

$\mathcal{C}$ をモデル圏，$\mathcal{C}_{cf}$ を fibrant-cofibrant な元によってできる部分圏とするとき，

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}_{cf}/\mathrm{homotopy}$$

が成り立つ．これと圏同値 (3) より

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) & \simeq & \mathrm{Ho}(\mathrm{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \\
\wr\| & & \wr\| \\
(\mathrm{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})_{cf}/\mathrm{homotopy} & \simeq & (\mathrm{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})_{cf}/\mathrm{homotopy}
\end{array}$$

を得る．今までは上の行の圏同値で考えて来たが，ホモトピー同値まで得るためには下の行の圏同値で考える必要があると思われる．そのため $(\mathrm{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})_{cf}$, $(\mathrm{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})_{cf}$ を詳しく調べなければならない．

fibrant-cofibrant な元によってできる部分圏については，次のことが知られている．

Alg を augmented DG 代数の圏，Cog を cocomplete augmented DG 余代数の圏とすると，これらはモデル圏になり，$\mathrm{Ho(Alg)} \simeq \mathrm{Ho(Cog)}$ が成り立つ．そして Alg_∞ を augmented A_∞-代数の圏とすると $\mathrm{Alg}_\infty \simeq \mathrm{Cog}_{cf}$ が成り立つ．

以上まとめると，

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Alg} & \xrightarrow{\text{not full}} & \mathrm{Alg}_\infty \\
\uparrow\downarrow & & \wr\| \\
\mathrm{Cog} & \xleftarrow[\text{fully faithful}]{} & \mathrm{Cog}_{cf}
\end{array}$$

となる.

次節で詳しく述べるが，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して小 Cartan 複体 $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は DG 代数になるとは限らない．そこで自然な問いとして A_∞-代数になるかということが考えられる．次節ではこの問題について考察する．

5 小 Cartan 複体上の A_∞-構造

$\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ が次数付き代数でもあるとき，$\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ は普通の積に関して一般に derivation ではない．そこで Alekseev-Meinrenken [1] は新しい積 $\odot$ を導入した．

天下りではあるが，Alekseev-Meinrenken は方程式

$$\partial u + \frac{1}{2}[u, u]_{\wedge(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})} = \sum_j p^j \otimes (\Delta(c_j) - \phi(c_j))$$

が解 $u \in (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g} \otimes \wedge\mathfrak{g})^-_{\mathrm{inv}}$ をもつことを示した ([1, Proposition 6.1] 参照)．ただし $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$, $\xi \mapsto (\xi, \xi)$ より導かれる写像を $\phi : \wedge\mathfrak{g} \to \wedge(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}) \cong \wedge\mathfrak{g}\otimes\wedge\mathfrak{g}$ とした．

そしてこれを用いて，$\mathcal{M}$ の自然な積を $\mu_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}\otimes\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ とするとき，新しい積を

$$(p\otimes y) \odot (p'\otimes y') := (1\otimes\mu_{\mathcal{M}})e^{\iota(u)}(pp'\otimes y\otimes y')$$

と定義した．

さらに彼らは，次数 1 の $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-線型写像

$$H : \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \otimes \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \to C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \tag{4}$$

であり

$$e^{\iota(f)}(x\odot x') - (e^{\iota(f)}x)\cdot(e^{\iota(f)}x') = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}H(x, x') + H(\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}x, x') + (-1)^{|x|}H(x, \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}x')$$

をみたすものが存在することを示した．

これより直ちに $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ が $\odot$ に関して derivation であることがわかる．しかし $\odot$ は結合的ではない！

以下では $\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$, $\odot$ に高次の積を加えて $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ 上に A_∞-構造を与える．

定義 5.1. A_∞-代数とは，次数付きベクトル空間 A であり，$n \geq 1$ に対して，次数 1 の写像

$$b_n : A[1]^{\otimes n} \to A[1]$$

が与えられていて次を満たすものとする：任意の $n \geq 1$ に対して，

$$\sum_{i+j+l=n} b_{i+1+l} \circ (1^{\otimes i} \otimes b_j \otimes 1^{\otimes l}) = 0. \tag{5}$$

A_∞-代数については [3] を参照.

小 Cartan 複体 $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ において

$$b_n : \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1]^{\otimes n} \to \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})[1]$$

を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
b_1(x) &:= (-1)^{|x|}\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} x,\\
b_2(x_1, x_2) &:= (-1)^{|x_1|(|x_2|+1)} x_1 \odot x_2,\\
b_3(x_1, x_2, x_3) &:= (-1)^{(|x_1|+|x_2|+1)|x_3|}\Pi e^{-\iota(f)} H(b_2(x_1, x_2), x_3)\\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+|x_3|+1)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_2(x_2, x_3))\\
&\quad + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|+1)+|x_2||x_3|+|x_3|} \times\\
&\quad\ \Pi e^{-\iota(f)}\{e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, x_2)\cdot e^{\iota(f)} x_3\\
&\qquad\qquad -(-1)^{|x_1|} e^{\iota(f)} x_1 \cdot e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_2, x_3)\},\\
b_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (-1)^{(|x_1|+|x_2|+|x_3|)|x_4|}\Pi e^{-\iota(f)} H(b_3(x_1, x_2, x_3), x_4)\\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+|x_3|+|x_4|)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_3(x_2, x_3, x_4))\\
&\quad + (-1)^{|x_1|(|x_2|+|x_3|+|x_4|)+|x_2|(|x_3|+|x_4|+1)+|x_3|(|x_4|+1)} \times\\
&\quad\ \Pi e^{-\iota(f)}\{e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, x_2)\cdot e^{\iota(f)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_3, x_4)\},
\end{aligned}$$

そして $n \geq 5$ かつ奇数のとき

$$\begin{aligned}
b_n(x_1, \dots, x_n) &:= (-1)^{(|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|+1)|x_n|}\Pi e^{-\iota(f)} H(b_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)\\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+\cdots+|x_n|+1)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_{n-1}(x_2, \dots, x_n)),
\end{aligned}$$

最後に $n \geq 6$ かつ偶数のとき

$$\begin{aligned}
b_n(x_1, \dots, x_n) &:= (-1)^{(|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|)|x_n|}\Pi e^{-\iota(f)} H(b_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)\\
&\quad + (-1)^{(|x_1|+1)(|x_2|+\cdots+|x_n|)}\Pi e^{-\iota(f)} H(x_1, b_{n-1}(x_2, \dots, x_n)).
\end{aligned}$$

ここで $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ は方程式 (2) の解，$\Pi : C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \to \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は projection，H は写像 (4)，そして $|x|$ は $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ における次数とする.

このときすべての $n \geq 1$ に対して，式 (5) をみたすことがわかる.

定理 5.2. 上記のように $n \geq 1$ に対して b_n を定めると $(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \{b_n\})$ は A_∞-代数になる. □

注意 5.3. M. Franz が同様のことを主張しているが（[1] を参照），詳細は未発表. □

参考文献

[1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.

[2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.

[3] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.

[4] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ catégories*, math.CT/0310337.

[5] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.