

ソリトンの有効相互作用

角 畠 浩 (Hiroshi Kakuhata) 富山大・工

紺野公明 (Kimiaki Konno) 日大・理工

Faculty of Engineering, University of Toyama
College of Science and Technology, Nihon University

1 Introduction

ソリトンは粒子のような衝突しても壊れない波であり、位相シフトがおこりその軌道が変化することはよく知られている [1]。その軌道の様子からソリトンの間に力が働いているように見える。ここではソリトンを粒子と見なしソリトンに働く effective force を求めてソリトン相互作用を理解することを試みる。ソリトンは粒子のように振る舞う波動であり数学的な点ではなく広がりを持っているが、個々のソリトンをその広がり程度で 1 個の粒子と見なせば、その「粒子」に作用する力を考えることができるであろう。

以下ではソリトン有効相互作用の背景として連立非分散方程式（磁場中の内部電流を持つストリングの運動）について述べ、基本的なアイデア、連立非分散方程式の effective force、他の方程式への応用の可能性、まとめを述べる。

2 連立非分散方程式

連立非分散方程式

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

は一様一定な電流が作る外部磁場中の内部電流と伸縮性を持つストリングを記述する可積分方程式である [2, 3]。ここで $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル、 τ と σ はそれぞれ時間とストリングに沿ったパラメータ（「弧長」）であり、 \mathbf{J} は外部電流を表す定数ベクトルである。実際、 $\mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{r}$ は Maxwell 方程式

$$\text{rot} \mathbf{B} = 2\mathbf{J}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0,$$

を満足する。従って、右辺第 1 項はストリングに働く Lorentz 力である。外部磁場はストリングに Lorentz 力を及ぼし、左辺第 2 項のストリング張力がこれを支えてソリトンが形成されている。

2.1 連立非分散方程式のソリトン解

簡単のため、式 (1) において、 $J = (0, 0, 1)$ ととると運動方程式は

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y,\end{aligned}\quad (2)$$

になる。ソリトン解を求めるため、変換

$$X = \operatorname{Re}\left(\frac{Q}{F}\right), \quad Y = \operatorname{Im}\left(\frac{Q}{F}\right), \quad Z = \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F, \quad (3)$$

を行い、双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q^* &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}Q^*Q &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

を得る。ここで $*$ は複素共役を表し、 $D_s (s = \tau, \sigma)$ は双線形演算子である。1ソリトン解は

$$F = 1 + b^2 e^{\eta + \eta^*}, \quad Q = e^\eta,$$

で与えられる。ただし、位相と係数は

$$\eta = k\sigma + \omega\tau + \delta + i\theta, \quad b = \frac{1}{2(\omega^* + \omega - k^* - k)},$$

である。ただし、 k は複素波数、 ω は複素振動数で分散関係

$$\omega^2 - k^2 = -1,$$

を満足し、 δ と θ は実数の初期位相である。3次元の物理空間での様子を見るため、位相速度 v と角速度 Ω を導入して、位相 η を $\eta = \xi + i\zeta$, $\xi = \gamma(\sigma - v\tau) + \delta$, $\zeta = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta$ とすれば、

$$\begin{aligned}X &= A \cos \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Y &= A \sin \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \xi,\end{aligned}$$

が3次元空間のソリトン解となる。因子 γ と振幅 A は

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \quad A = 2\gamma(1 + v),$$

である。この解は3次元空間中を角速度 Ω で回転しながら、位相速度 v で伝播するソリトンを表す。小さい Ω ではループになるが、大きい Ω ではループを形成しない。2ソリトン解は

$$\begin{aligned}Q &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}, \\ F &= 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_1^{*2} e^{\eta_1^* + \eta_2} + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*},\end{aligned}\quad (5)$$

である。係数は

$$b_n = \frac{1}{2(\omega_n^* + \omega_n - k_n^* - k_n)} \quad (n = 1, 2), \quad b_{12} = \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)},$$

$$c_1 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_1 b_{12}^*, \quad c_2 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_2 b_{12},$$

$$d_{12} = 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2 b_1 b_2 |b_{12}|^2,$$

であり、位相と分散関係は次式で与えられる。

$$\eta_n = k_n \sigma + \omega_n \tau + \delta_n + i\theta_n, \quad \omega_n^2 - k_n^2 = -1 \quad (n = 1, 2)$$

2.2 連立非分散方程式の2ソリトン相互作用

ここではスピードと角速度がそれぞれ大きさが同じで逆向きの正面衝突のみを考える。回転しない場合の平面内での基本的な相互作用パターンは、(1). 相対位相速度が小さいときには重ならず弾くように相互作用する (図 1 左), (2). 相対位相速度が大きいときには小さいソリトンが大きいソリトンの中を回る (図 1 中), (3). 振幅が正と負の場合には小さいソリトンが一時的に消失し、大きなソリトンの振幅が増大する (図 1 右), であるが [2], 回転している場合でもおおむねこれと同様である (図 2)[3].

3 基本的なアイデア

上記のソリトン相互作用をソリトンに作用する「力」によって説明することはできないであろうか? まず、非分散連立方程式は Newton の運動方程式の形をしているので、ここではストリングに作用する力の z 成分にのみ注目し、式 (2) の第 3 式を以下のように書き直す。

$$\partial_\tau^2 Z = \partial_\sigma^2 Z + (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y,$$

ここで右辺は第 1 項はストリング張力であり第 2 項はストリングに働く Lorentz 力で、これらの合力がストリングの各点に作用するものと考えることができる。今簡単のため、2ソリトン解を1ソリトン解の重ね合わせで近似し、ストリングに作用する Lorentz 力のみ z 成分を考える (図 3)。ここで横軸は σ で、縦軸は Lorentz 力の z 成分であり、この正の値が z 正方向に負の値が z 負方向に働く Lorentz 力である。そこでソリトンの位置の周りにソリトンの幅程度で積分を行えば「ソリトン粒子」に働く Lorentz 力を定義できる。(1). 1ソリトンに作用する力は対称で Lorentz 力が相殺し全体としてソリトン粒子に力が働かない。(2). ソリトン同士が十分離れていれば個々のソリトンに働く力は無視できる (図 3 左)。ソリトン同士が近づくと対称性が崩れ相殺されず一部の Lorentz 力が残る (図 3 右)。すなわち、ソリトン粒子間の effective force はソリトンの対称性が破れることにより残留した力である。

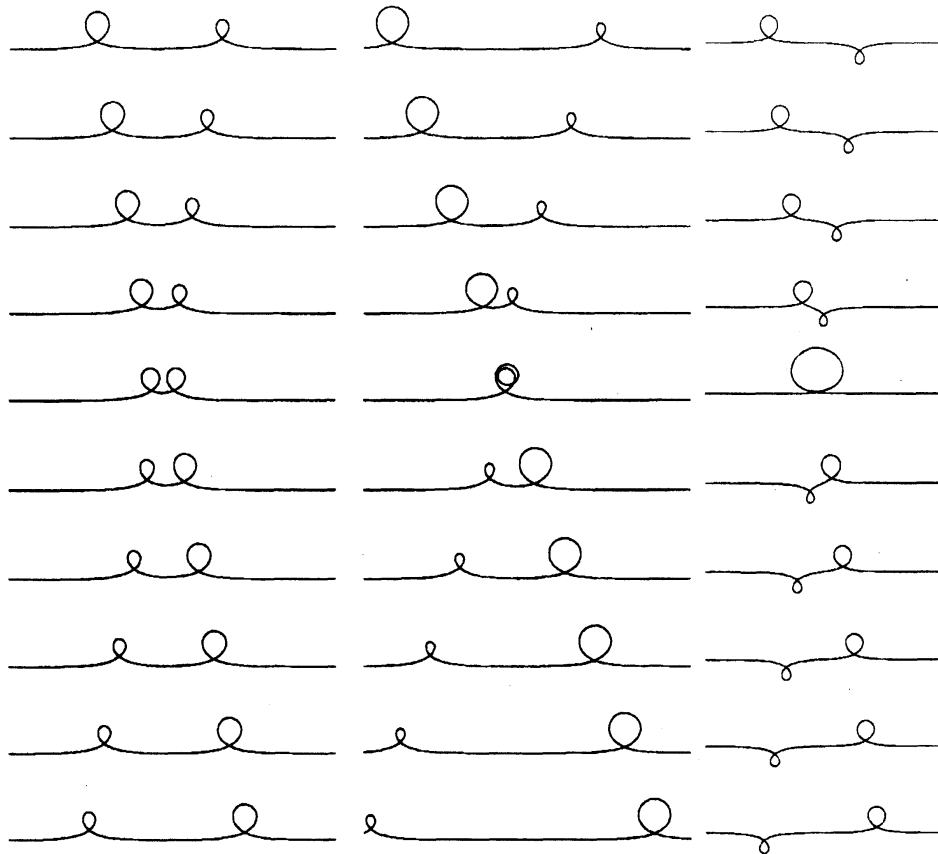


図1 $v = 0.12$ $v = 0.24$ $v = 0.12$

4 連立非分散方程式のソリトン間の effective force

Lorentz 力だけでなく張力も考慮し、より精密にするため、厳密解を用いてソリトン粒子に作用する effective force を求める。第 2.2 節と同様に、soliton-1 の速度を $v_1 = v$ ($v > 0$)、角速度を $\Omega_1 = \Omega$ 、soliton-2 の速度を $v_2 = -v$ 、角速度を $\Omega_2 = -\Omega$ とすれば、式 (5) の従属変数 F は

$$F = \beta(\tau) + \cosh 2\gamma\sigma,$$

になる。ここで

$$\beta = \frac{1}{d_{12}} [b_1 b_2 \cosh(2\gamma v \tau + \rho) + |b_{12}|^2 \cos(2\Omega \tau + \theta_{12} + \varphi)],$$

および θ_{12} は初期位相の差 $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ である。

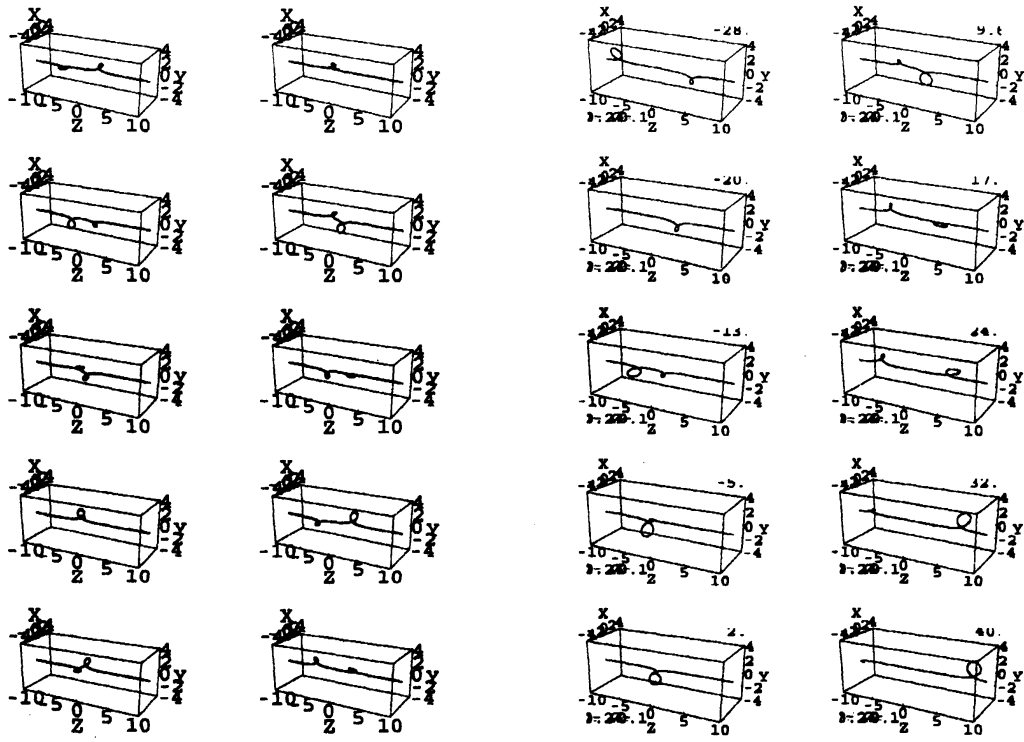


図2 $v = 0.1, \Omega = 0.2$

$v = 0.24, \Omega = 0.1$

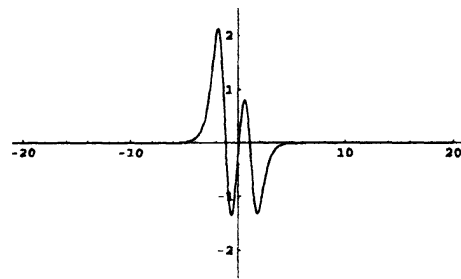
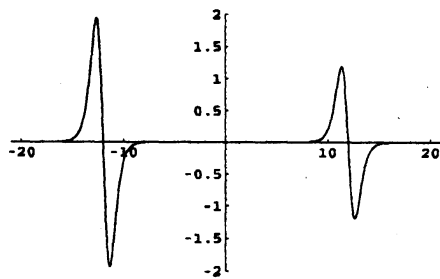


図3 $v = 0.24, \Omega = 0.1, d = 24$

$v = 0.24, \Omega = 0.1, d = 1.45$

厳密解なので各点に働く力の z 成分は $f_z = \partial_\tau^2 Z$ から求めることができ、

$$f_z = 2 \left\{ \frac{\partial_\tau^3 \beta}{\beta + \cosh 2\gamma\sigma} - \frac{3\partial_\tau^2 \beta \cdot \partial_\tau \beta}{(\beta + \cosh 2\gamma\sigma)^2} + \frac{(\partial_\tau \beta)^3}{(\beta + \cosh 2\gamma\sigma)^3} - \partial_\sigma \left[\frac{\partial_\tau^2 \beta}{\beta + \cosh 2\gamma\sigma} - \frac{(\partial_\tau \beta)^2}{(\beta + \cosh 2\gamma\sigma)^2} \right] \right\},$$

である。ソリトンが一様な位相速度 v で進むものとし、初期位相を考慮して soliton-1 の位置を

$\sigma = v\tau - \delta_1$, soliton-2 の位置を $\sigma = -v\tau - \delta_2$ とおく。個々のソリトン粒子に作用する力を積分

$$\mathcal{F}_{zn} = \int_{v_n\tau - \delta_n - a_n}^{v_n\tau - \delta_n + a_n} d\sigma f_z$$

で与える。 a_n はソリトンの大きさを決める自由パラメータ ($a_n > 0$) で、 a_1 と a_2 の関係はソリトンの運動量 $P_{zn} = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \partial_\tau Z = 2A_n v_n$ を「ソリトン粒子の運動量」 $\bar{P}_{zn} = \int_{v_n\tau - \delta_n - a_n}^{v_n\tau - \delta_n + a_n} d\sigma \partial_\tau Z = 2A_n v_n \tanh \gamma_n a_n$ で置き換え、運動量の比を保つように決定する。このとき、 $v_1 = -v_2 = v$, $\Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega$ であるから、 $a_1 = a_2 = a$ である。また、

$$a = \frac{1}{\gamma} \operatorname{sech}^{-1} \frac{1}{10}$$

とすればソリトン面積の 90 パーセント以上を覆うので、 a としてこれを用いる。以下に、effective force を図示する (横軸は τ , 縦軸は effective force \mathcal{F}_z)。正の振幅同士の $v = 0.1, \Omega = 0, \theta_{12} = 0$ の場合 (図 4) と $v = 0.24, \Omega = 0, \theta_{12} = 0$ の場合 (図 5) には \mathcal{F}_z が soliton-1 に対しては負、soliton-2 に対しては正になるのでソリトン間に斥力が働くことがわかる。一方、正と負の振幅のソリトンの相互作用、 $v = 0.1, \Omega = 0, \theta_{12} = \pi$, の場合 (図 6) および $v = 0.24, \Omega = 0, \theta_{12} = \pi$ の場合 (図 7) には \mathcal{F}_z の符号が逆転し、引力が働いていることになる。回転している場合 ($v = 0.1, \Omega = 0.2, \theta_{12} = 0$, 図 8) には引力斥力を周期的に繰り返すことがわかる。

従って、回転しない場合には位相速度に関係なく正の振幅同士では斥力が働き、特に、相対位相速度が遅い場合には斥力によりソリトン同士が停止しするが (図 1 左)、その後、斥力によって離れて行くと考えられる。相対位相速度が大きいときには停止にまでは至らず大きいソリトンの内部に突入してしまう (図 1 中)。正と負の振幅では引力で加速され激しく衝突する (図 1 右)。また、回転する場合には引力斥力を周期的に繰り返、おそらくは前後に揺らいでいる。これらからこの方法でソリトンの相互作用を少なくとも定性的あるいは半定量的に説明できるといえる。厳密な 2 ソリトン解を用いた際にはソリトンの位置が問題になるが、現在のところこれを解析的に決定する方法を見いだしていない。実際、effective force によりその位置は $v\tau$ で決定される位置にいないので、図を描く際には数値的にソリトンのピークを求め、それをソリトンの位置として、初期位相に繰り込んだ。次節で他の方程式への応用の可能性を探る。

5 他のソリトン方程式への応用の可能性 — KdV 方程式への応用

5.1 KdV 方程式

連立非分散方程式は Newton の運動方程式であったが、KdV 方程式はそうではない。そのため、KdV 方程式において「力」をどうやって定義するかが問題になる。KdV 方程式は非線形格子や浅水波などから導出できるが、これらの物理系から「力」を導出するのは困難であろう。また、ある系がひとたび KdV 方程式で記述されるのなら KdV 方程式に基づいて考察するのが自然であ

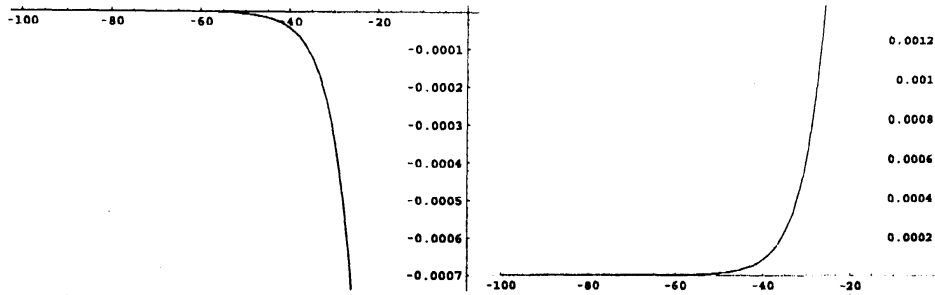


図 4 Soliton-1(right mover)

Soliton-2(left mover)

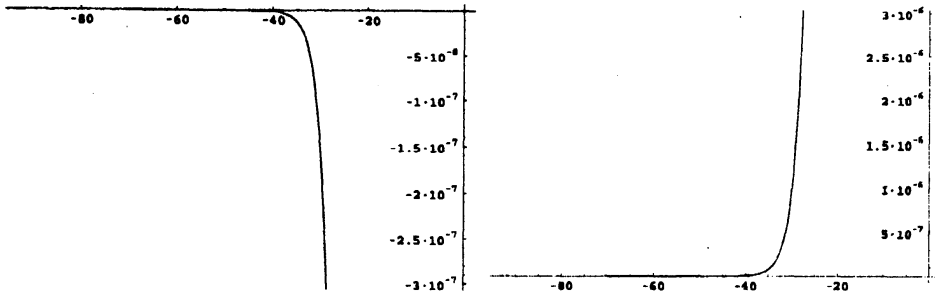


図 5 Soliton-1(right mover)

Soliton-2(left mover)

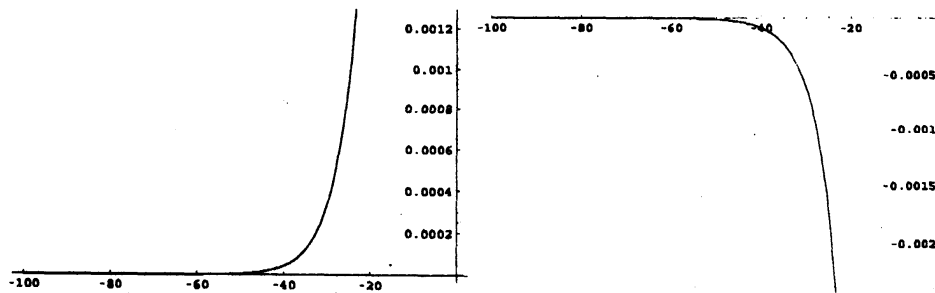


図 6 Soliton-1(right mover)

Soliton-2(left mover)

ろう。そこで KdV 方程式から、直接、「力」を定義するため、Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_x q \cdot \partial_t q + \frac{1}{6} (\partial_x q)^3 - \frac{1}{2} (\partial_x^2 q)^2,$$

を考える。これから、 q に対する Euler-Lagrange 方程式を求め、 $u = \partial_x q$ とおけば

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0,$$

のように KdV 方程式が得られる。一方、 q の正準運動量は

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t q)} = \frac{1}{2} \partial_x q = \frac{1}{2} u,$$

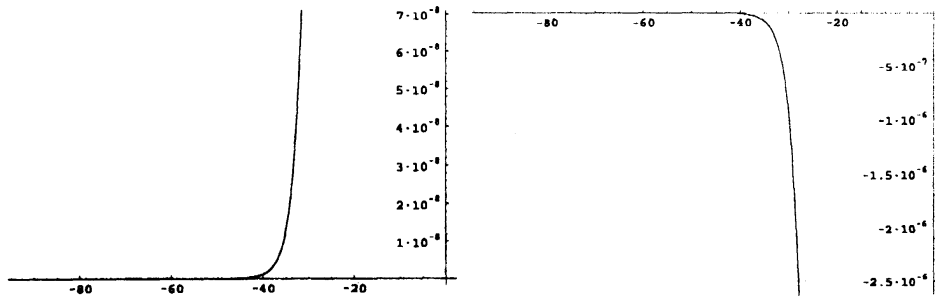


図 7 Soliton-1(right mover)

Soliton-2(left mover)

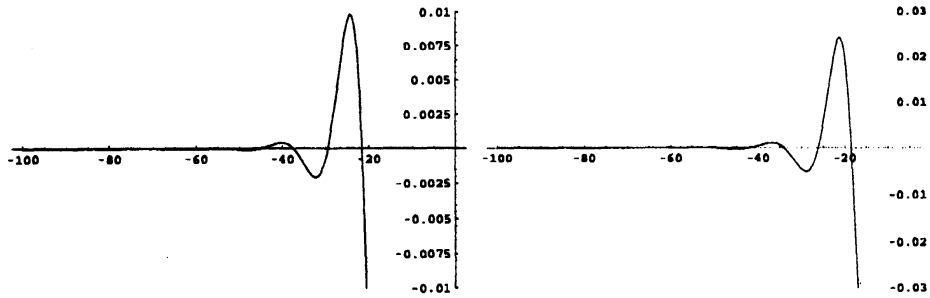


図 8 Soliton-1(right mover)

Soliton-2(left mover)

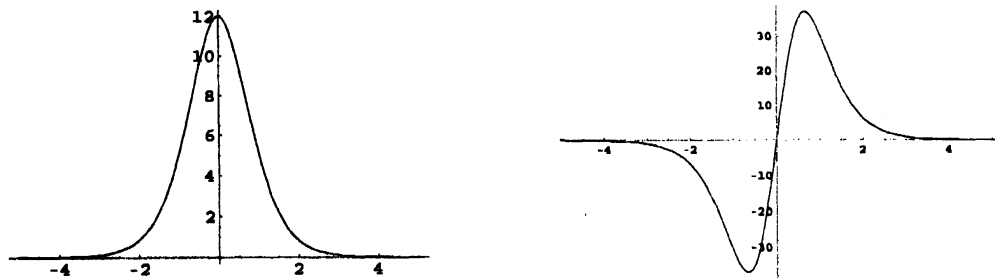


図 9 1ソリトン解と各点に働く「力」

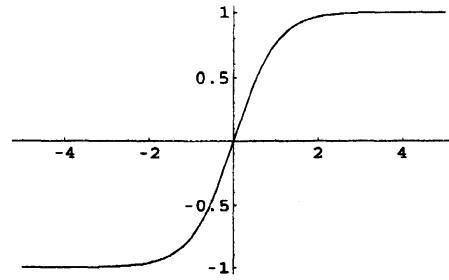
であるから、KdV 方程式を Newton の運動方程式と見なせば運動量の時間微分は作用する力に等しいので、

$$\partial_t u = -u \partial_x u - \partial_x^3 u = -\partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 + \partial_x^2 u \right),$$

の右辺が各点に働く力である。v を位相速度とする 1 ソリトン解

$$u = 12k^2 \operatorname{sech}^2 k(x - kt + \delta) = 3v \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v}{4}}(x - vt + \delta),$$

を用いて、1 ソリトン解と 1 ソリトンに作用する「力」を図 9 に与えた。連立非分散方程式の場合とは異なり、この「力」は u の縦軸方向に働き (図 9 左)、ソリトンの進行方向には働かない。ソリトンの運動は q の縦軸方向の運動に対応するが、q は右上がりのキネク型 (図 10) であり、q が減少することがソリトンの前進に対応するので、負の力がソリトンの駆動力と解釈できる。

図 10 q

5.2 KdV 方程式の Effective force

今, 2 ソリトン解を 1 ソリトン解 + 1 ソリトン解で近似する。

$$u = 3v_1 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_1}{4}}(x - v_1 t + \delta_1) + 3v_2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}}(x - v_2 t + \delta_2),$$

一般性を失うこと無く $v_1 > v_2$ とし, $t = 0$ で衝突するとすれば初期位相は $\delta_n = 0$ であるので, KdV 方程式から

$$\mathcal{F}_n = - \int_{v_n t - a_n}^{v_n t + a_n} dx \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 + \partial_x^2 u \right) = - \left[\frac{1}{2} u^2 + \partial_x^2 u \right]_{v_n t - a_n}^{v_n t + a_n},$$

により effective force のを求めることができる。振幅の大きい soliton-1 に対しては

$$\mathcal{F}_1 = -3 \left(v_2^2 + 3v_1 v_2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_1}{4}} a_1 \right) \times \left\{ \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} [(v_1 - v_2)t + a_1] - \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} [(v_1 - v_2)t - a_1] \right\},$$

振幅の小さい soliton-2 に対しては

$$\mathcal{F}_2 = +3 \left(v_1^2 + 3v_1 v_2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} a_2 \right) \times \left\{ \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_1}{4}} [(v_1 - v_2)t + a_2] - \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_1}{4}} [(v_1 - v_2)t - a_2] \right\},$$

を得る。衝突前には $t < 0$ であるから, $|(v_1 - v_2)t + a| < |(v_1 - v_2)t - a|$ が成立し,

$$\operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} [(v_1 - v_2)t + a] > \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} [(v_1 - v_2)t - a],$$

なので, soliton-1 に作用する effective force は $\mathcal{F}_1 < 0$ で, soliton-2 に作用する effective force は $\mathcal{F}_2 > 0$ になりいずれも引力である。同様に, 衝突後には $t > 0$ であるから, $|(v_1 - v_2)t + a| > |(v_1 - v_2)t - a|$ が成立し,

$$\operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} [(v_1 - v_2)t + a] < \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{v_2}{4}} [(v_1 - v_2)t - a],$$

なので, soliton-1 に作用する effective force は $\mathcal{F}_1 > 0$ で, soliton-2 に作用する effective force は $\mathcal{F}_2 < 0$ になり, いずれも引力でであることがわかる。すなわち, KdV ソリトンには常に引力

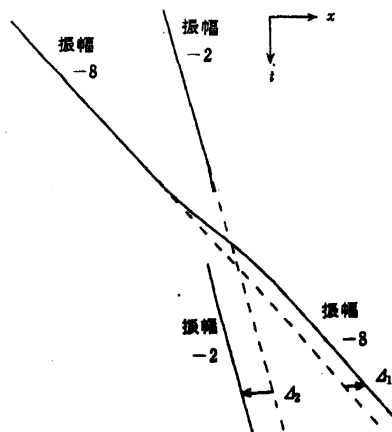


図 11 soliton trajectory

が作用する。従って、ソリトンの軌道 (図 11) をみると、衝突前には引力により大きい方のソリトンが加速され、小さい方のソリトンが減速される。大きいソリトンは小さいソリトンを追い越した後、引力により減速され、小さいソリトンは引力により加速されて元の位相速度に戻ってゆくと解釈できる。

6 Summary

ソリトンを粒子と見なして、ソリトン粒子間の effective force を求めた。連立非分散方程式では回転しない場合に正の振幅同士ではソリトン間に斥力が働き、正と負の振幅の衝突ではソリトン間に引力が働いていることを示した。また、回転するソリトンの effective force は引力と斥力を周期的に繰り返すことがわかった。一方 KdV 方程式ではソリトン間に常に引力が働いていることを示した。従って、この方法により、両者ともソリトンの軌道の変化や衝突の様子などソリトン相互作用を定性的あるいは半定量的に説明できることがわかった。この方法の応用は可積分方程式に限られない。残念ながらこの方法ではソリトン同士が重複している間の様子を知ることはできない。また、厳密解を用いた際に、ソリトンの位置を解析的に決定する方法は未解決である。

参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] H. Kakuata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [3] H.Kakuata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.