

ベクトル値関数に対する 高橋の最小値定理について

新潟大学大学院 自然科学研究科 荒谷 洋輔 (ARAYA, Yousuke)*
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)

新潟大学大学院 自然科学研究科 田中 環 (TANAKA, Tamaki)†
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)

1 導入とベクトル最適化からの準備

Ekeland の変分原理では取り扱う関数の定義域の基礎空間を完備距離空間と仮定する。そして実数値関数の下への有界性を仮定すると関数の下限値にいくらでも近い値をとる点の存在性が保証される。これらを Ekeland は下半連続性という関数の連続性を弱めた条件下で初期値から距離に比例した改善度による近似下限値を与える結果を 1972 年に発表している。

定理 1.1 (Ekeland [3]). (X, d) を完備距離空間とし、 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ を実効定義域が空とならない ($\text{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < \infty\} \neq \emptyset$)、下半連続な (拡張実数値) 関数とする。この時、任意の $x_0 \in \text{dom} f$ と $\varepsilon > 0$ に対して、次の 2 つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する

- (1) $f(v) \leq f(u)$,
- (2) $d(u, v) \leq 1$,
- (3) 任意の $w \neq v$ に対して $f(v) - \varepsilon d(v, w) < f(w)$ 。

この定理は、最適化の分野で数学的な理論のみならず数値計算の理論においても幅広い応用があり、様々な研究がなされている。また、その後、Caristi により応用上重要な次の不動点定理が発表された。

定理 1.2 (Caristi [2]). (X, d) を完備距離空間とし、 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\text{dom} f \neq \emptyset$ で下半連続な関数とする。写像 $T : X \rightarrow X$ が任意の $x \in X$ で

$$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

を満たすものとする。この時、写像 T は不動点をもつ。

*E-mail: yousuke@m.sc.niigata-u.ac.jp

†E-mail: tamaki@math.sc.niigata-u.ac.jp

前の2つの定理は別々に発見されたものだが、実は同値であることが後の研究で分かっている。さらに、東京工業大学の高橋渉先生は次の定理を発表し、これらの3つの定理が同値となることを示した。

定理 1.3 (高橋 [12]). (X, d) を完備距離空間とし、 $f : X \rightarrow [0, \infty]$ を $\text{dom} f \neq \emptyset$ 、下半連続な関数とする。さらに、 $\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ が成り立つ $u \in X$ に対して、 $v \neq u$ で $f(v) + d(u, v) \leq f(u)$ を満たす $v \in X$ が存在するとする。この時、 $f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$ となるような $x_0 \in X$ が存在する。

以上の結果が実数値関数の場合に知られているものである。

本稿では [1] の結果の続きとして、ベクトル値関数に対する高橋の最小値定理について考察していくことにする。私たちは Gopfert、Tammer、Zalinescu によって得られた、ベクトル値関数に対する Ekeland の変分原理の結果 ([5], [6], [13]) に注目した。Gopfert、Tammer、Zalinescu による変分原理の拡張については、大きく次の2つの手法に分類することができる。

- (1) 定義域の空間と値域の空間との直積空間に順序を導入する方法。
- (2) Tammer と Weidner が [4] で提案した、ベクトル値関数に対する非線形スカラー化関数を利用する方法。

私たちはこの2つの手法と Gopfert、Tammer、Zalinescu の結果を利用し、また上記の3つの定理の同値性に着目して、ベクトル値関数に対する2つの異なるタイプの最小値定理を得たのでここに報告する。

まず最初に、本稿で使ういくつかの記号を導入する。 (X, d) を完備距離空間、 Y を Banach 空間、 $K \subset Y$ を凸錐とする。なお、錐 K が pointed とは $K \cap (-K) = \{0\}$ を満たすことである。 $f : X \rightarrow Y$ とし、 $f(X) = \bigcup_{x \in X} \{f(x)\}$ とする。 K によって以下のようなベクトル順序 \leq_K が導入され、空間 (Y, \leq_K) は半順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \quad y_1 \leq_K y_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} y_2 - y_1 \in K.$$

もし、 K が pointed ならベクトル順序 \leq_K は反対称的となる。逆に一般の (実) 半順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。点 $a \in A \subset Y$ が A の minimal point であるとは $A \cap (a - K) = \{a\}$ を満たすときである。そして $\text{Min}(A; K)$ を K に対する A の minimal point 全体の集合とする。今特別に $Y = \mathbb{R}$ 、 $K = \mathbb{R}_+$ とすると A の minimal point とは A の最小値に他ならない。また集合値写像 $\Gamma : A \rightarrow 2^A$ が dynamical system であるとは、任意の $x \in A$ について $\Gamma(x)$ は空でないときで、点 $x_* \in A$ が Γ の critical point であるとは $\Gamma(x_*) = \{x_*\}$ を満たすときである。各 $x \in A$ に対して $\Gamma_A(x) := A \cap (x - K)$ と定めると、この Γ_A が A 上の dynamical system であることは明らかであり、また次のことも定義より容易にわかる。

命題 1.4. 点 $x_* \in A$ が A の minimal point であることと x_* が Γ_A の critical point であることは同値である。

2 ベクトル値関数の Caristi の不動点定理と Ekeland の変分原理の同値性

まず最初に [1] の結果の拡張定理とその定理とベクトル値関数の Ekeland の変分原理との同値性について述べる。なおここで述べる定理はベクトル値関数の変分原理の証明の仕方の違いにより2つのタイプに分かれる。

2.1 type 1

このタイプでは凸錐 K を pointed とし、 $k^0 \in K \setminus \{0\}$ とする。[6] の第1章で Gopfert, Tammer, Zalinescu は、 $X \times Y$ 上に次のような半順序 \preceq_{k^0} を導入することにより極小値定理を得ている。

$$(x_1, y_1) \preceq_{k^0} (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} y_1 + d(x_1, x_2)k^0 \leq_K y_2.$$

今 K が pointed なので半順序 \preceq_{k^0} は反対称的となることから、 $(X \times Y, \preceq_{k^0})$ は半順序集合となることが確かめられる。さらに [5] で Gopfert, Tammer, Zalinescu は、関数 $f: X \rightarrow Y$ の有界性の条件 ($\exists \bar{y} \in Y$ s.t. $\bar{y} \leq_K f(x)$: [6] の第1章参照) をより弱い条件に取り替えることにより、次のような結果を得ている。

定理 2.1 (Gopfert, Tammer and Zalinescu [5]). $f: X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすとする。 $K \setminus \{0\} \subset \text{int}B$ を満たすような凸錐 $B \subset Y$ が存在し、 $f(X) \cap (\bar{y} - B) = \emptyset$ となる $\bar{y} \in Y$ が存在する。さらに、条件

(H1) $\{x' \in X \mid f(x') + d(x', x)k^0 \leq_K f(x)\}$ が任意の $x \in X$ で閉集合

が成立するものとする。この時初期ベクトル $x_0 \in X$ に対して、次の2つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する

- (1) $f(\bar{x}) + d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)$,
- (2) ある $x \in X$ が $f(x) + d(x, \bar{x})k^0 \leq_K f(\bar{x})$ ならば、 $x = \bar{x}$ 。

この定理の系として次のような不動点定理を得ることができる。尚次の定理は [1] の T を集合値写像に拡張している。

定理 2.2 (改 荒谷・田中 [1]). $f: X \rightarrow Y$ とし、凸錐 $B \subset Y$ が $K \setminus \{0\} \subset \text{int}B$ を満たし $f(X) \cap (\bar{y} - B) = \emptyset$ となる $\bar{y} \in Y$ が存在するとする。さらに、条件 (H1) が成立するものとする。加えて写像 $T: X \rightarrow 2^X$ が任意の $x \in X$ に対し、次の不等式を満たす $y \in Tx$ が存在するとする。

$$f(y) + d(y, x)k^0 \leq_K f(x)$$

この時、写像 T は不動点をもつ。つまり $x_0 \in Tx_0$ となるような $x_0 \in X$ が存在する。

Proof. 任意の $\bar{y} \in T\bar{x}$ に対して $\bar{x} \neq \bar{y}$ と仮定すると、定理 2.1 を $x_0 \in X$ に適用して [定理 2.1 の (2) 参照]

$$f(\bar{y}) + d(\bar{x}, \bar{y})k^0 \not\leq_K f(\bar{x})$$

が得られるが、これは定理 2.2 の仮定の最後の不等式に反する。 \square

定理 2.3. 上記の 2 つの定理は同値

Proof. (Gopfert, Tammer and Zalinescu) \Rightarrow (荒谷・田中) 定理 2.2 参照。
(荒谷・田中) \Rightarrow (Gopfert, Tammer and Zalinescu)

$$X_0 := \{x \in X \mid f(x) + d(x, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)\}$$

とすると仮定より X_0 は閉集合ではたがって完備。また

$$Sx := \{y \in X \mid x \neq y, f(y) + d(x, y)k^0 \leq_K f(x)\}$$

$$Tx := \begin{cases} \{x\} & Sx = \emptyset \\ Sx & Sx \neq \emptyset \end{cases}$$

とする。すると $T: X_0 \rightarrow 2^{X_0}$ がわかる。したがって定理 2.2 の仮定を満たし、 T は不動点 $\bar{x} \in X_0$ をもつ。 $\bar{x} \in X_0$ より定理 2.1 の (1) が成立する。また $S\bar{x} = \emptyset$ から (2) が成立する。 \square

2.2 type 2

このタイプでは K は閉凸錐で $k^0 \in K \setminus (-K)$ とする (凸錐 K は pointed とは限らない)。Gopfert, Tammer, Zalinescu はスカラー化関数 $\varphi: Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ として $\varphi(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - K\}$ を導入した。関数 φ は線形ではないが線形に近い性質を持っている ([6] の第 3 章を参照せよ)。この関数を使ってベクトル値関数をスカラー化し、Ekeland の変分原理を適用するという手法で Gopfert, Tammer, Zalinescu は次の結果を得た。

定理 2.4 (Gopfert, Tammer and Zalinescu[6]). $f: X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすとする。

(H2) 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し、集合 $\{x \in X \mid f(x) \leq_K f(x_0) + rk^0\}$ は閉集合

さらに、任意の $x_0 \in X$ 、 $\varepsilon > 0$ に対し $f(X) \cap (f(x_0) - \varepsilon k^0 - K \setminus \{0\}) = \emptyset$ とする。この時次の 3 つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する。

- (1) $f(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon}d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)$,
- (2) $d(\bar{x}, x_0) \leq \sqrt{\varepsilon}$,
- (3) ある $x \in X$ が $f(x) + \sqrt{\varepsilon}d(\bar{x}, x)k^0 \leq_K f(\bar{x})$ ならば $x = \bar{x}$ 。

定理 2.5 (改 荒谷・田中 [1]). $f : X \rightarrow Y$ が条件 (H2) を満たし、 $f(X) \cap (\tilde{y} - K \setminus \{0\}) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在するとする。加えて写像 $T : X \rightarrow 2^X$ が任意の $x \in X$ に対し、次の不等式を満たす $y \in Tx$ が存在するとする。

$$f(y) + d(y, x)k^0 \leq_K f(x)$$

この時、 T は不動点を持つ。

Proof. [1] の定理 3.3 参照。 □

定理 2.6. 上記の 2 つの定理は同値。

Proof. (Gopfert, Tammer and Zalinescu) \Rightarrow (荒谷) [1] の定理 3.3 参照。
(荒谷) \Rightarrow (Gopfert, Tammer and Zalinescu)

$$X_0 := \{x \in X | f(x) + d(x, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)\}$$

とすると仮定より X_0 は閉集合ではしたがって完備。一般性を失うことなく $0 < \varepsilon < 1$ とする。そして $\tilde{y} := f(x_0) + \varepsilon k^0$ とする。また

$$Sx := \{y \in X | x \neq y, f(y) + \sqrt{\varepsilon}d(x, y)k^0 \leq_K f(x)\}$$

$$Tx := \begin{cases} \{x\} & Sx = \emptyset \\ Sx & Sx \neq \emptyset \end{cases}$$

とする。すると $T : X_0 \rightarrow 2^{X_0}$ がわかる。したがって定理 2.5 の仮定を満たし、 T は不動点 $\bar{x} \in X_0$ をもつ。 $\bar{x} \in X_0$ より

$$f(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon}d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(\bar{x}) + d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0) \quad (1)$$

となり、定理 2.4 の (1) が成立する。また $d(\bar{x}, x_0) > \sqrt{\varepsilon}$ とすると $(d(\bar{x}, x_0) - \sqrt{\varepsilon})k^0 + K \subset K \setminus \{0\}$ がわかり $(\sqrt{\varepsilon}d(\bar{x}, x_0) - \varepsilon)k^0 + K \subset K \setminus \{0\}$ がいえる。(1) より

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\in f(x_0) - \sqrt{\varepsilon}d(\bar{x}, x_0)k^0 - K \\ &\in f(x_0) - \varepsilon k^0 - (\sqrt{\varepsilon}d(\bar{x}, x_0) - \varepsilon)k^0 - K \\ &\in f(x_0) - \varepsilon k^0 - K \setminus \{0\} \end{aligned}$$

となり仮定に矛盾する。したがって (2) が成立する。さらに $S\bar{x} = \emptyset$ から (3) が成立する。 □

3 ベクトル値の critical point theorem とベクトル値の高橋の最小値定理について

3.1 ベクトル値の critical point theorem

前章で述べたベクトル値の Caristi の定理を利用して私たちはベクトル値関数の critical point の存在定理を得た。

定理 3.1 (type 1). $f: X \rightarrow Y$ が条件 (H1) を満たし、さらに凸錐 $B \subset Y$ が $K \setminus \{0\} \subset \text{int}B$ を満たし $f(X) \cap (\tilde{y} - B) = \emptyset$ となる $\tilde{y} \in Y$ が存在するとする。加えて写像 $T: X \rightarrow 2^X$ が任意の $x \in X$ に対し $Tx \neq \emptyset$ であつ、任意の $y \in Tx$ に対し次の不等式を満たすとする

$$f(y) + d(y, x)k^0 \leq_K f(x).$$

この時、写像 T は critical point をもつ。

Proof. 定理 2.2 と同様の議論により不動点 $\bar{x} \in X$ をもつ。さらに任意の $y \in T\bar{x}$ について $y = \bar{x}$ が成立するので critical point をもつ。 \square

定理 3.2 (type 2). $f: X \rightarrow Y$ が条件 (H2) を満たし、さらに $f(X) \cap (\tilde{y} - K \setminus \{0\}) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在するとする。加えて写像 $T: X \rightarrow 2^X$ が任意の $x \in X$ に対し $Tx \neq \emptyset$ であつ、任意の $y \in Tx$ に対し次の不等式を満たすとする

$$f(y) + d(y, x)k^0 \leq_K f(x)$$

この時、写像 T は critical point を持つ。

3.2 ベクトル値関数の高橋の最小値定理

定理 3.3 (type 1). U を空でない集合とし、 $f: U \rightarrow Y$ とする。完備な部分集合 $X \subseteq f(U)$ が次を満たすとする

- (i) 条件 (H1)、
- (ii) 凸錐 $B \subset Y$ が $K \setminus \{0\} \subset \text{int}B$ を満たし $f(X) \cap (\tilde{y} - B) = \emptyset$ となる $\tilde{y} \in Y$ が存在する、
- (iii) $\Gamma(X) \subseteq X$ 、
- (iv) 集合値写像 $\Gamma(x) := f(X) \cap (x - K)$ が任意の $x \in X$ 、 $y \in \Gamma(x)$ に対し $f(y) + d(y, x)k^0 \leq_K f(x)$ が成り立つ。

そのとき $\text{Min}(f(X); K)$ は空でない。

Proof. 命題 1.4 と定理 3.1 を使うと得られる。 \square

定理 3.4 (type 2). U を空でない集合とし、 $f: U \rightarrow Y$ とする。完備な部分集合 $X \subseteq f(U)$ が次を満たすとする

- (i) 条件 (H2)、
- (ii) $f(X) \cap (\tilde{y} - K \setminus \{0\}) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在する、
- (iii) $\Gamma(X) \subseteq X$ 、
- (iv) 集合値写像 $\Gamma(x) := f(X) \cap (x - K)$ が任意の $x \in X$ 、 $y \in \Gamma(x)$ に対し $f(y) + d(y, x)k^0 \leq_K f(x)$ が成り立つ。

そのとき $\text{Min}(f(X); K)$ は空でない。

注意 1. 今特別に $Y = \mathbb{R}$ 、 $K = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 、 $k^0 = 1 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ とすると、定理 3.3 と定理 3.4 は特殊な場合の定理 1.3 となる。

4 まとめ

Minimal point (Efficient point) の存在性についての研究はベクトル最適化のなかで重要なものの一つである。Luc[9]、Borwein、Jahn やその参考文献の著者によって様々な研究がなされてきたが、ある種のコンパクト性の仮定が課せられていた。私たちの結果はコンパクト性の仮定を加えることなく Minimal point の存在定理を得ることができた。

参考文献

- [1] Y. Araya, T. Tanaka, *On generalizing Caristi's fixed point theorem*, Nonlinear analysis and convex analysis (Okinawa, 2005), Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 41–46.
- [2] J. Caristi and W. A. Kirk, *Geometric fixed point theory and inwardness conditions*, Lecture Notes in Math. 490, Springer, Berlin, 1975, 74–83.
- [3] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324–354.
- [4] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67 (1990), 297–320.
- [5] A. Gopfert, C. Tammer, and C. Zalinescu, *A new minimal point theorem in product space*, Z. Anal. Anwendungen. (Journal for Analysis and its Applications) 18 (1999), 767–770.
- [6] A. Gopfert, C. Tammer, and C. Zalinescu, *On the vectorial Ekeland's variational principle and minimal points in product spaces*, Nonlinear Anal. 39 (2000), 909–922.
- [7] G. Isac, *The Ekeland's principle and the Pareto ε -Efficiency*, Multi-objective programming and goal programming: theories and applications, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, 432 Springer Berlin (1996), 148–163.
- [8] J. Jahn, *Vector optimization: Theory, applications, and extensions*, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [9] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, 319 Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [10] N. Mizoguchi, W. Takahashi, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 141 (1989), 177–188.
- [11] R. R. Phelps, *Convex function, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Math., 1364, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [12] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed points*, Yokohama publishers, Yokohama (2000) (Japanese).
- [13] C. Tammer, *A generalization of Ekeland's variational principle*, Optimization 25 (1992), 129–141.