数理解析研究所講究録
第1544巻 2007年 27-33

バナッハ空間の定数とψ-直和空間について

新潟大自然科学　三谷 健一　(Ken-ichi Mitani)
新潟大理　斎藤 吉助　(Kichi-Suke Saito)

1 序文と準備

バナッハ空間の幾何学的構造の研究は, ClarksonによるL_p空間の一様凸性の研究が発端となり, 狭義凸性, smooth性, non-square性などのような空間の単位球の形状に関する概念が導入され, 様々な分野で応用されている. また, これらの幾何学的性質について, 度合いを記述する目的から, modulus of convexity, von Neumann-Jordan定数, James定数などの幾何学的定数が導入され, 現在でも盛んに研究が行われている.

本講演では, ψ-直和の概念を用いたバナッハ空間の定数を導入し, 上で述べた幾何学的性質との関連を述べる.

$\|\cdot\|$を$\mathbb{C}^2$上のノルムとする. $\|\cdot\|$がabsoluteであるとは

$$\|(|x|,|y|)\| = \|(x,y)\| \quad (\forall(x,y)\in\mathbb{C}^2)$$

のときをいう. $\|\cdot\|$がnormalizedであるとは$\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$のときをいう.

$$AN_2 = \{\|\cdot\| : \text{ absolute normalized norms on } \mathbb{C}^2\}.$$

とおく. ℓ_p−norm $\|\cdot\|_p$はabsolute normalized normの基本的な例である:

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p+|y|^p)^{1/p} & (1\le p<\infty), \\ \max(|x|,|y|) & (p=\infty). \end{cases}$$

Proposition 1.1 ([1]) $\psi\in\Psi_2$とする. $(x,y),(z,w)\in\mathbb{C}^2$とする. もし$|x|\le|z|$ $|y|\le|w|$ならば

$$\|(x,y)\|_\psi \le \|(z,w)\|_\psi.$$

任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して,

$$\psi(t) = \|(1-t,t)\| \quad (0 \le t \le 1)$$

とおくと ψ は $[0,1]$ 上の連続凸関数で次を満たす.

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t,t\} \le \psi(t) \le 1.$$

上の条件を満たす連続凸関数 ψ 全体を Ψ_2 とする.

Theorem 1.2 (cf. [4]) 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x,y)\|_\psi = \begin{cases} (|x|+|y|)\psi\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right) & ((x,y) \ne (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

と定める. このとき $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ で次が成り立つ

$$\psi(t) = \|(1-t,t)\|_\psi \ (0 \le t \le 1).$$

従って, AN_2 と Ψ_2 は一対一対応.

任意のバナッハ空間 X, Y と $\psi \in \Psi_2$ に対して, $X \oplus Y$ 上のノルムを次のように定める:

$$\|(x,y)\| := \|(\|x\|, \|y\|)\|.$$

この Banach 空間を X, Y の ψ-直和空間といい, $X \oplus_\psi Y$ とかく.

Example 1.3 (i)$\psi = \psi_p$ ならば $X \oplus_{\psi_p} Y = X \oplus_p Y$.
(ii) $1/2 \le \alpha \le 1$ とする.

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}t + 1 & \text{if } 0 \le t \le \alpha \\ t & \text{if } \alpha \le t \le 1 \end{cases}$$

と定める. このとき $\psi_\alpha \in \Psi_2$ であり,

$$\|(x,y)\|_{\psi_\alpha} = \max\{\|x\| + (2 - \frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

2 バナッハ空間の幾何学的定数

バナッハ空間の幾何学的性質の度合いを表す定数として，古くから存在する．有名な定数としては Clarkson による modulus of convexity や Lindenstrauss による modulus of smoothness などがある．

X をバナッハ空間とし，X の単位球面を $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とする．バナッハ空間 X の modulus of convexity δ_X は次のように定義される:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_X(\varepsilon) > 0$ ならば，X は uniformly convex であるという．ある $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_X(\varepsilon) > 0$ ならば，X は uniformly non-square であるという．

バナッハ空間 X の modulus of smoothness ρ_X は次のように定義される:

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\right\},$$

$\lim_{t\to 0} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$, ならば X は uniformly smooth という．

Definition 2.1 (Clarkson) バナッハ空間 X に対して，

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : (x, y) \neq (0, 0)\right\}$$

と定める．これを von Neumann-Jordan 定数という．

Proposition 2.2 (i) 任意のバナッハ空間 X に対して，$1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$. また，X がヒルベルト空間であることと $C_{NJ}(X) = 1$ は同値．
(ii) 任意のバナッハ空間 X に対して，$C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$ (by Kato-Takahashi)
(iii) X が uniformly non-square であることと $C_{NJ}(X) < 2$ は同値 (by Kato-Takahashi).
(iv) $1 \leq p \leq \infty$ ならば $C_{NJ}(L_p) = 2^{2/r-1}$ ここで $r = \min\{p, q\}$, $1/p + 1/q = 1$ (by Clarkson).

これに関連して，Yang-Wang[7] は次の定数を導入した．

Definition 2.3 ([7]) バナッハ空間 X に対して, $[0,1]$ 上の定数 γ_X を

$$\gamma_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2} : x, y \in S_X\right\}$$

と定める.

Proposition 2.4 ([7]) (i): $1 \le 1+t^2 \le \gamma_X(t) \le (1+t)^2 \le 4$.

(ii):

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\gamma_X(t)}{1+t^2} : 0 \le t \le 1\right\}.$$

Theorem 2.5 ([7]) X をバナッハ空間とする. このとき, X がヒルベルト空間であることと, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\gamma_X(t) = 1+t^2$ であることとは同値.

Theorem 2.6 ([7]) X をバナッハ空間とする. このとき次は同値.

(i) X は uniformly non-square.

(ii) 任意の $t \in (0,1]$ に対して $\gamma_X(t) < (1+t)^2$.

(iii) ある $t \in (0,1]$ に対して $\gamma_X(t) < (1+t)^2$.

Theorem 2.7 ([7]) X が ℓ_p-*space* ならば

$$\gamma_{\ell_p}(t) = \begin{cases} \left(\frac{(1+t)^p + (1-t)^p}{2}\right)^{2/p}, & 2 \le p < \infty, \\ (1+t)^2, & p = \infty. \end{cases}$$

3 バナッハ空間の定数と ψ-直和

The modulus of smoothness や γ_X を拡張した定数として次を導入する.

Definition 3.1 X をバナッハ空間とし, $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする. このとき $[0,1]$ 上の関数 $B_{X,\varphi,\psi}(t)$ を

$$B_{X,\varphi,\psi}(t) = \sup\left\{\frac{\|(x+ty, x-ty)\|_\varphi}{\|(1,t)\|_\psi} : x, y \in S_X\right\}.$$

と定める.

この定数と ρ_X や γ_X を次の意味で含む.

Remark 3.2

$$B_{X,\psi_1,\psi_1}(t) = \frac{2(\rho_X(t)+1)}{1+t},$$

$$B_{X,\psi_2,\psi_2}(t) = \left(\frac{2\gamma_X(t)}{1+t^2}\right)^{1/2}.$$

この定数について考察する.

Proposition 3.3 (Mitani-Saito) 任意のバナッハ空間 X と $\psi, \varphi \in \Psi_2$ に対して,

$$\frac{2\varphi(\frac{1-t}{2})}{(1+t)\psi(\frac{t}{1+t})} \leq B_{X,\varphi,\psi}(t) \leq \frac{2\varphi(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{t}{1+t})}.$$

次に uniformly non-square 性を考える.

Theorem 3.4 (Mitani-Saito) X をバナッハ空間とし, $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする. $\varphi(t) > \psi_\infty(t)$ for all $s \in (0,1)$ と仮定する. このとき次は同値:
(i) X は uniformly non-square.
(ii) 任意の $t \in (0,1]$ に対して $B_{X,\varphi,\psi}(t) < \dfrac{2\varphi(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{t}{1+t})}$.

(iii) ある $t \in (0,1]$ に対して $B_{X,\varphi,\psi}(t) < \dfrac{2\varphi(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{t}{1+t})}$.

Theorem 3.5 (Mitani-Saito) X をヒルベルト空間とし $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする. $\varphi \geq \psi_2$ かつ φ/ψ_2 が $s = 1/2$ で最大と仮定. このとき任意の $t \in (0,1)$ に対して,

$$B_{X,\varphi,\psi}(t) = \frac{2(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\varphi(\frac{1}{2})}{(1+t)\psi(\frac{t}{1+t})}.$$

Theorem 3.6 (Mitani-Saito) X をバナッハ空間とし, $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする. $\varphi \leq \psi_2$ かつ φ/ψ_2 が $s = 1/2$ で最小とする. φ が $B_{X,\varphi,\psi}(1) = \sqrt{2}$ を満たすならば X はヒルベルト空間である.

Theorem 3.7 (Mitani-Saito) $2 \le p < \infty$ かつ $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする. $\varphi \ge \psi_p$ かつ φ/ψ_p が $t = 1/2$ で最大と仮定する. このとき

$$B_{L_p,\varphi,\psi}(t) = 2^{1-1/p}\psi(1/2)\frac{((1+t)^p + (1-t)^p)^{1/p}}{(1+t)\psi(\frac{t}{1+t})}.$$

$\psi \in \Psi_2$ に対して, $\widetilde{\psi} \in \Psi_2$ を $\widetilde{\psi}(s) = \psi(1-s)$ とする. また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$\ell_\psi^2(X) = X \oplus_\psi X$ とおく. 特に $\ell_{\psi_p}^2(X) = \ell_p^2(X)$ とする.

Proposition 3.8 (Mitani-Saito) X をバナッハ空間とし $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする.
(i)

$$\|A : \ell_\psi^2(X) \to \ell_\varphi^2(X)\| = \|A : \ell_{\widetilde{\psi}}^2(X) \to \ell_{\widetilde{\varphi}}^2(X)\|.$$

(ii)

$$\|A : \ell_\psi^2(X) \to \ell_\varphi^2(X)\| = \sup_{0 \le t \le 1} \max\{B_{X,\varphi,\psi}(t), B_{X,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}}(t)\}.$$

特に, ψ と φ が $s = 1/2$ で対称ならば,

$$\|A : \ell_\psi^2(X) \to \ell_\varphi^2(X)\| = \sup_{0 \le t \le 1} B_{X,\varphi,\psi}(t).$$

これから, 次が得られる.

Theorem 3.9 (Mitani-Saito [2]) $\psi, \varphi \in \Psi_2$ とする. $\psi \ne \psi_1$ かつ $\varphi(t) > \psi_\infty(t)$ for all $s \in (0,1)$ と仮定する. このとき, バナッハ空間 X が uniformly non-square であることと

$$\|A : \ell_\psi^2(X) \to \ell_\varphi^2(X)\| < \frac{2\varphi(\frac{1}{2})}{\psi(t_0)}$$

が成り立つことは同値, ここで t_0 は ψ の最小点.

Corollary 3.10 (Takahashi-Kato [5]) バナッハ空間 X において, 次は同値.
(i) X が uniformly non-square.
(ii) 任意の (resp. ある) p $(1 < p < \infty)$ に対して

$$\|A : \ell_p^2(X) \to \ell_p^2(X)\| < 2.$$

(iii) 任意の (resp. ある) r と s $(1 < r \leq \infty,\ 1 \leq s < \infty)$ に対して

$$\|A : \ell_r^2(X) \to \ell_s^2(X)\| < 2^{1/r'+1/s},$$

が成り立つ. ここで $1/r + 1/r' = 1$.

参考文献

[1] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity, J. Austral. Math. Soc., 75(2003), 413-422.

[2] K. -I. Mitani and K. -S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ-direct sums, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[3] K. -S. Saito and M. Kato, Uniform convexity of ψ-direct sums of Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 277(2003), 1-11.

[4] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., 252(2000), 879–905.

[5] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces. Nihonkai Math. J., 9(1998), 155-169.

[6] Y. Takahashi and M. Kato, Functions related to convexity and smoothness of Banach spaces, 北海道大学数学講究録 70(2002), 52-55.

[7] C. Yang and F. Wang *On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant*, to appear in J. Math. Anal. Appl.