

## HALPERN 型イテレーションに関する 2 つの最近の結果

九州工業大学・工学部 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

### 1. 序

本稿では, 筆者の最近の論文 [16, 17] に関する解説を書こうと考えている. これらの論文の中で, 筆者は非拡大写像の不動点への収束定理について論じている. 文献 [16] では Browder 型と Halpern 型と呼ばれるイテレーションについて, 文献 [17] では Halpern 型イテレーションについての新しい結果を証明している. この 2 つの文献のエッセンスを表現するために, Halpern 型イテレーションに話を絞ろうと思う. また, 細かい条件にも触れず, 多少大雑把に記述していこうと思っている.

なお, 講究録の趣旨には合わせるため, 通常の論文とは異なり, 筆者の主観的なコメントも記述している. この点について, ご容赦願いたいのと同時に, 楽しんでいただければ幸いである.

### 2. 準備

本稿を通して,  $\mathbb{N}$  を自然数全体からなる集合とする.

Banach 空間  $E$  の有界閉凸集合  $C$  上で定義された写像  $T$  が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

がすべての  $x, y \in C$  に対して成り立つことである.  $T$  を作用する前の 2 点間の距離に比べて, 作用した後の 2 点間の距離が — 文字通り — 拡大していない写像のことである.  $T$  の不動点集合を  $F(T)$  と書く. すなわち

$$F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$$

である. 1965 年に Browder [2] は,  $E$  が Hilbert 空間のとき,  $F(T)$  が空でないことを証明した. 文献 [1, 3, 6, 8] も参照のこと. 1967 年に Halpern [7] は次の収束定理を証明した.

---

キーワード. 非拡大写像, 不動点, Halpern 型イテレーション.  
住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1 九州工業大学工学部数学教室.  
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

**定理 1** (Halpern [7]).  $C$  を Hilbert 空間  $E$  の有界閉凸集合とし,  $T$  を  $C$  上で定義された非拡大写像とする.  $u \in C$  を固定し, 数列  $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$  を  $\alpha_n = n^{-\theta}$  で定義する. ただし,  $\theta \in (0, 1)$  とする. 点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と

$$(1) \quad x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T x_n$$

で定義する.  $P$  を  $C$  から  $F(T)$  への距離射影とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $Pu$  へ強収束する.

この素晴らしい収束定理は次の3つの方向へ拡張された.

- (a) 数列  $\{\alpha_n\}$  に関する条件の緩和
- (b) 空間  $E$  と集合  $C$  に関する条件の緩和
- (c) イテレーション (1) の拡張

Lions [9] は (a) 型の拡張をした. [9] での仮定は

- (C1)  $\lim_n \alpha_n = 0$
- (C2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$
- (C3)  $\lim_n (\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1}^2 = 0$

である. (C1) と (C2) が必要条件であることは, Halpern [7] が証明している. 第3の条件をどこまで緩和できるのかというのが1つの研究テーマである (Reich [12] の問題6). Wittmann [21] は (C1), (C2) として

$$(C4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty.$$

という条件の下で, Xu [22, 23] は (C1), (C2) として

$$(C5) \quad \lim_n (\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1} = 0.$$

という条件の下で, Cho, Kang & Zhou [5] は (C1), (C2) として

$$(C6) \quad |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq o(\alpha_{n+1}) + \sigma_n \text{ かつ } \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty.$$

の下で収束定理を証明した. (C6) はこの中で最も弱い条件であるが, この条件をさらに緩和できるかどうかについては分かっていない. つまり, この問題は未だ解決されていない.

Reich [11] は (b) 型の拡張をした. さらに, Xu [22, 23] は次の拡張定理を証明した.

**定理 2** (Xu [22, 23]).  $C$  を一様滑らかな Banach 空間  $E$  の有界閉凸集合とし,  $T$  を  $C$  上で定義された非拡大写像とする.  $u \in C$  を固定し, 数列  $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$  は (C1), (C2), (C5) を満たすとする. 点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と (1) で定義する.  $P$  を  $C$  から  $F(T)$  への sunny nonexpansive retraction とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $Pu$  へ強収束する.

ここで、一様滑らかな Banach 空間とは、 $\|x\| = \|y\| = 1$  をみたすすべての  $x, y \in E$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在し、しかも一様に収束していることをいう。  $L^p$  空間 (ただし、 $1 < p < \infty$ ) が一様滑らかな Banach 空間の代表例である。また、sunny nonexpansive retraction は、ある意味、Hilbert 空間における距離射影の Banach 空間版である。詳細は文献 [18, 19] 等を参照のこと。

Moudafi [10] は (c) 型の拡張をした。これについては第 4 節で述べる。

この節の最後に、Halpern 型の収束定理を得る際によく使われる補助定理を述べる。

**補助定理 1** (Weng [20]). 数列  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ ,  $\{\beta_n\} \subset [0, \infty)$ ,  $\{\gamma_n\} \subset [0, \infty)$  は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \gamma_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) \gamma_n + \alpha_n \beta_n$$

を満たすとする。このとき、 $\{\gamma_n\}$  は 0 に収束する。

### 3. REICH の問題の実質的解決

既に述べたように第 3 の条件に関する Reich の問題は、今現在も未解決である。筆者は文献 [17] において、次の定理を証明し、Reich の問題の実質的な解決をした。

**定理 3** ([17]).  $E, C, T, P$  そして  $u$  は定理 2 と同じとする。  $\lambda$  を  $\lambda \in (0, 1)$  なる実数とし、数列  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は (C1) と (C2) を満たすとする。点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と

$$(2) \quad x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) (\lambda T x_n + (1 - \lambda) x_n)$$

で定義する。このとき、 $\{x_n\}$  は  $Pu$  へ強収束する。

**定理 4** ([17]). 数列  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  に対して、以下は同値である。

- $\{\alpha_n\}$  は (C1) と (C2) を満たす。
- $E, C, T, P$  そして  $u$  は定理 1 と同じとする。  $\lambda$  を  $\lambda \in (0, 1)$  なる実数とし、点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と (2) で定義する。このとき、 $\{x_n\}$  は  $Pu$  へ強収束する。

すなわちイテレーション(2)に対する必要十分条件は「(C1)かつ(C2)」であることが分かった。定理3を証明するために本質的な役割を果たしたのは、次の補助定理である。

**補助定理 2** ([14, 15]).  $\{z_n\}, \{w_n\}$  を Banach 空間  $E$  内の有界な点列とし,  $\{\alpha_n\}$  を区間  $[0, 1]$  内の数列とする。

- すべての  $n \in \mathbb{N}$  について,  $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n) z_n$
- $\limsup_n (\|w_{n+1} - w_n\| - \|z_{n+1} - z_n\|) \leq 0$
- $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$

を仮定する。このとき,  $\lim_n \|w_n - z_n\| = 0$  が成立する。

また, Chidume & Chidume の論文 [4] において定理3と同様の結果が証明されていることを, 筆者は後に知った。論文 [4] の投稿日が2005年5月17日, 筆者の論文 [17] の投稿日が2005年3月1日なので, 筆者の方が2ヶ月半ほど早い, ほぼ同じ時期に同じ定理を証明したことになる。しかも彼らも同じ補助定理(補助定理2)を用いて証明している。

#### 4. MOUDAFI による拡張

Moudafi [10] は定理1の素晴らしい拡張定理を証明した。(a)型, (b)型の拡張は, ある意味, 誰でも思いつくことであるが, 彼はイテレーションの形を変えることで拡張している。しかも, convex optimization, linear programming, monotone inclusion そして elliptic differential equation へ応用できることを示した。さらに, Xu [24] は次のように再拡張した。

**定理 5** (Xu [24]).  $E, C, T, P$  そして  $\{\alpha_n\}$  は定理2と同じとする。  $\Phi$  を  $C$  上の縮小写像とし, 点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と

$$(3) \quad x_{n+1} = \alpha_n \Phi x_n + (1 - \alpha_n) T x_n$$

で定義する。  $z \in C$  を縮小写像  $P \circ \Phi$  の唯一の不動点とする。このとき,  $\{x_n\}$  は  $z$  へ強収束する。

**注意.**  $z$  は  $T$  の不動点である。また, すべての  $x \in C$  について  $\Phi x = u$  のとき, (3) は (1) と一致する。

Xu の証明は大変技巧的で, 感動したのを今でも覚えている。筆者には彼の発想の源が全く分からず, 「なぜ, このような証明を思いつくことができたのだろうか」という疑問を持った。筆者にも理解できる証明はないか, と探したところ, 意外にも, 次の非常に簡潔な別証明を得ることができた。

**定理5の別証明** ([16]).  $\Phi$  は縮小写像なので, 実数  $r \in [0, 1)$  が存在して, すべての  $x, y \in C$  に対して,  $\|\Phi x - \Phi y\| \leq r \|x - y\|$  を満たす. 点列  $\{y_n\} \subset C$  を  $y_1 \in C$  と  $y_{n+1} = \alpha_n \Phi z + (1 - \alpha_n) T y_n$  で定義する. 定理2により,  $\{y_n\}$  は  $P \circ \Phi z$ , すなわち  $z$  に収束する. すべての  $n \in \mathbb{N}$  について,

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \\ & \leq (1 - \alpha_n) \|T x_n - T y_n\| + \alpha_n \|\Phi x_n - \Phi z\| \\ & \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - y_n\| + \alpha_n r \|x_n - z\| \\ & \leq (1 - \alpha_n + \alpha_n r) \|x_n - y_n\| + \alpha_n r \|y_n - z\| \\ & = (1 - \alpha_n + \alpha_n r) \|x_n - y_n\| + (\alpha_n - \alpha_n r) \frac{r \|y_n - z\|}{1 - r} \end{aligned}$$

が成立する. 補助定理1により,  $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$  を得る. つまり  $\lim_n \|x_n - z\| = 0$  が証明された.  $\square$

この別証明は, 実は, 次の定理の証明にもなっている.

**定理6** ([16]).  $C$  を Banach 空間  $E$  の閉凸集合とする.  $T$  を  $C$  上で定義された非拡大写像とし,  $\Phi$  を  $C$  上の縮小写像とする. 数列  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は (C1) と (C2) を満たしているとする. 以下の仮定をする:

- すべての  $u \in C$  に対して,  $u_1 = u$  と  $u_{n+1} = (1 - \alpha_n) T u_n + \alpha_n u$  で定義される点列  $\{u_n\} \subset C$  は強収束する.

この収束先を  $Pu$  で表す. 点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と (3) で定義する.  $z \in C$  を縮小写像  $P \circ \Phi$  の唯一の不動点とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $z$  へ強収束する.

**注意.** この定理を平たく言うと, Halpern 型の収束定理が成立すれば, 自動的に Halpern-Moudafi 型の収束定理も成立することを意味する. また, 命題に関しては次の2つの事柄に注意する必要がある.

- $Pu$  を定義する際, 初期点  $u_1$  は  $u$  である必要はない. つまり,  $Pu$  は初期点には依存しない.
- $P$  は  $C$  上の非拡大写像になる.

**証明.** 既に述べたように, 証明の本質的な部分は終わっている. 「注意」の2つの事柄について証明しよう. まず (i) について.  $u \in C$  を固定し, 初期点のみが異なる2つの点列  $\{u_n\}, \{y_n\} \subset C$  を  $u_1 = u, y_1 \in C$  として

$$u_{n+1} = (1 - \alpha_n) T u_n + \alpha_n u, \quad y_{n+1} = (1 - \alpha_n) T y_n + \alpha_n u$$

で定義する. このとき,

$$\|u_{n+1} - y_{n+1}\| \leq (1 - \alpha_n) \|Tu_n - Ty_n\| \leq (1 - \alpha_n) \|u_n - y_n\|$$

がすべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して成立するので, 補助定理 1 により,  $\lim_n \|u_n - y_n\| = 0$  を得る. すなわち, 収束先は初期点に依存しない. 次に (ii) を示す.  $v \in C$  を固定し, 点列  $\{v_n\} \subset C$  を  $v_1 = v$  と

$$v_{n+1} = (1 - \alpha_n) Tv_n + \alpha_n v$$

で定義する. このとき,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - v_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n) \|Tu_n - Tv_n\| + \alpha_n \|u - v\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|u_n - v_n\| + \alpha_n \|u - v\| \end{aligned}$$

がすべての  $n \in \mathbb{N}$  で成立する. この不等式と  $u_1 = u, v_1 = v$  より, 数学的帰納法を用いて,  $\|u_n - v_n\| \leq \|u - v\|$  を証明することができる. すなわち  $\|Pu - Pv\| \leq \|u - v\|$  が言える.  $\square$

定理 6 によって, (c) 型の拡張定理に関する研究は完全に終わったことになる. なお, 論文 [16] では, 写像族に関する収束定理を意識して, もう少し一般的な設定で証明している. 詳細は文献を参照のこと.

定理 3 と定理 6 により, 以下の定理が — 自動的に — 導かれる.

**定理 7.**  $E, C, T$  そして  $P$  は定理 2 と同じとする.  $\Phi$  を  $C$  上の縮小写像とする.  $\lambda$  を  $\lambda \in (0, 1)$  なる実数とし, 数列  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は (C1) と (C2) を満たすとする. 点列  $\{x_n\} \subset C$  を  $x_1 \in C$  と

$$(4) \quad x_{n+1} = \alpha_n \Phi x_n + (1 - \alpha_n) (\lambda T x_n + (1 - \lambda) x_n)$$

で定義する.  $z \in C$  を縮小写像  $P \circ \Phi$  の唯一の不動点とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $z$  へ強収束する.

## 5. まとめ

Halpern の収束定理 (定理 1) には, (a) 型, (b) 型, (c) 型の 3 つの拡張の方向がある. (c) 型については完全に解決された. (a) 型については, 実質的には解決されたが, 未だ未解決の部分がある. (b) 型については, Browder 型収束との関係が分かっている [13, 17]. しかし, 完全な解決のための糸口は未だ見えていない.

## 参考文献

- [1] J. B. Baillon, *Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach. I, II.* (in French), Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (1978–1979), Exp. No. 7-8, 45 pp., École Polytech., Palaiseau, 1979.
- [2] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1272–1276.
- [3] ———, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041–1044.
- [4] C. E. Chidume and C. O. Chidume, *Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **318** (2006), 288–295.
- [5] Y. J. Cho, S. M. Kang and H. Zhou, *Some control conditions on iterative methods*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., **12** (2005), 27–34.
- [6] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr., **30** (1965), 251–258.
- [7] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.
- [8] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004–1006.
- [9] P.-L. Lions, “*Approximation de points fixes de contractions*”, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **284** (1977), A1357–A1359.
- [10] A. Moudafi, *Viscosity approximation methods for fixed-points problems*, J. Math. Anal. Appl., **241** (2000), 46–55.
- [11] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.
- [12] ———, *Some problems and results in fixed point theory*, Contemp. Math., **21** (1983), 179–187.
- [13] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3641–3645.
- [14] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2005** (2005), 103–123.
- [15] ———, *Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals*, J. Math. Anal. Appl., **305** (2005), 227–239.
- [16] ———, *Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions*, J. Math. Anal. Appl., **325** (2007), 342–352.
- [17] ———, *A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 99–106.
- [18] 高橋涉, “非線形関数解析学”, 近代科学社 (1988).

- [19] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [20] X. Weng, *Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping*, Proc. Amer. Math. Soc., **113** (1991), 727–731.
- [21] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel), **58** (1992), 486–491.
- [22] H. K. Xu, *Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., **65** (2002), 109–113.
- [23] ———, *Iterative algorithms for nonlinear operators*, J. London Math. Soc., **66** (2002), 240–256.
- [24] ———, *Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **298** (2004), 279–291.