数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 57-66

Weak and Strong Convergence of Implicit Iterative Sequences for Nonlinear Operators

芝浦工業大学　厚芝 幸子　(Sachiko Atsushiba)
Department of Mathematics,
Shibaura Institute of Technology

1. 序論

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときである. $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. 不動点近似 (写像の不動点をみつける問題) はいろいろな非線形問題と関わっており, 多くの数学者により研究されてきた. そのような中で Hilbert 空間の閉凸部分集合上の非拡大写像に対する不動点近似として, Xu-Ori [34] は有限個の写像 $T_1, T_2, \ldots, T_r$ に対して次の陰的点列近似法 (implicit iteration process) を導入した: $x = x_0 \in C$ とし,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_n x_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

ここで $\{\alpha_n\}$ を $0 < \alpha_n < 1$ をみたす実数列とし, $T_n = T_{n+r}$ とする. そして Xu-Ori [34] は (1) で定義される iteration process の弱収束定理を Hilbert 空間において証明した. Liu [23] は (1) で定義される iteration process を研究し, 一様凸な Banach 空間において, 写像族 $T_1, T_2, \ldots, T_r$ の中で semicompact となる写像 T_i が存在するという仮定のもとで強収束定理を証明した ([2, 3, 12, 4, 20, 21, 28, 35] も参照).

H を Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とする. C から H への作用素 A が単調であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq 0$$

が成立するときにいう. A を C から H への単調作用素とする. このとき, すべての $v \in C$ に対して

$$\langle v - u, Au \rangle \geq 0$$

が成り立つとき, $u \in C$ を変分不等式の解といい, その解の集合を $VI(C, A)$ で表す. 変分不等式の解 u をみつける問題は変分不等式問題とよばれる. この問題に関する研究は, Stampacchia [26, 27] によって始まり, その後, 多くの数学者によって幅広く研究が行われてきた. Takahashi-Toyoda [31] は, 非拡大写像 S の不動点集合 $F(S)$ と変分不等式問題の解集合 $VI(C, A)$ の共通部分の点, 即ち, $F(S) \cap VI(C, A)$ の点を見つけるという問題に対して研究し, 点列近似法で $F(S) \cap VI(C, A)$ の点への弱収束定理を証明した.

この論文では, まず, $F(S) \cap VI(C, A)$ の点を見つけるという問題に対して, [12, 4, 31, 34] などの考えを用いて, 非拡大写像と inverse-strongly-monotone operator に対する implicit iteration process を導入する. そして, それにより $F(S) \cap VI(C, A)$ の点へ

の弱および強収束定理を証明する．さらに, Hilbert 空間における変分不等式問題を拡張したつぎの問題を扱う ([1] 参照).

Problem 1.1. E をなめらかな Banach 空間とし, E^* を E の共役空間とする. $\langle x, f\rangle$ で $x \in E$ における $f \in E^*$ の値を表す. C を空でない閉凸部分集合とし, A を C から E への増大作用素とする. すべての $v \in C$ に対して

$$\langle Au, J(v-u)\rangle \geq 0$$

をみたす $u \in C$ をもとめよ. ただし, J は E の双対写像である.

Problem 1.1 の解 $u \in C$ の集合を $S(C, A)$ であらわす. つまり,

$$S(C, A) = \{u \in C : \text{すべての } v \in C \quad \text{に対して } \langle Au, J(v-u)\rangle \geq 0\}$$

とする. この問題は, 非拡大写像の不動点問題, 増大作用素の零点をもとめる問題等と関連がある ([1, 30] 等参照).

この論文では, [1, 34] 等を参考にして, Problem 1.1 の解を求めるために次のような iteration process を考える:$x_1 = x \in C$ とし, $n = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, Q_C は E から C の上への sunny nonexpansive retraction であり, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ をみたす数列とする. 結果として得られた Banach 空間における弱収束定理および強収束定理を証明し, その応用についても記す.

2. 準備と補題

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^*\rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $x_n \rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また w-$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に弱収束することを表す. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}^+$ はそれぞれすべての正の整数からなる集合, すべての非負の整数からなる集合を表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする.

$B_1 = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする. Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in B_1$ に対して

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{2}$$

が存在するときにいう. このとき, Banach 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $x \in B_1$ に対して, 極限 (2) が $y \in B_1$ に関して一様に収束するとき, Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. 極限 (2) が $x, y \in B_1$ に関して一様に収束するとき, Banach 空間 E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるという. このとき,

Banach 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう. Banach 空間 E が Opial 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ をみたすならば

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in E$ に対して成立するときにいう ([25] 参照). 回帰的な Banach 空間においては, この条件は E の net$\{x_\alpha\}$ が $\text{w-}\lim_\alpha x_\alpha = x$ をみたすならば

$$\varliminf_\alpha \|x_\alpha - x\| < \varliminf_\alpha \|x_\alpha - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するという条件と同値である ([7] 参照). 双対写像 J: $E \to E^*$, $x \mapsto \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ が一価で弱点列連続であれば E は Opial 条件をみたす. すべての Hilbert 空間, $\ell^p(1 < p < \infty)$ は Opial 条件をみたす ([22, 25] 参照). L^p-空間 $(p \neq 2)$ は Opial 条件をみたさないが, 過分な Banach 空間は Opial をみたすようにリノルミング可能である ([17, 25] 参照).

次のように定義される関数 $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ は E の modulus of smoothness とよばれる:

$$\rho(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1 : x, y \in E, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Banach 空間 E が一様になめらかであるための必要十分条件は $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau)/\tau = 0$ が成立することであると知られている. q は $1 < q \leq 2$ をみたす実数とする. Banach space E が q-uniformly smooth であるとは, ある定数 $c > 0$ が存在して, すべての $\tau > 0$ に対して $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ が成立するときにいう ([14, 32] 等参照). q-uniformly smooth Banach 空間については次の補題が知られている ([14, 15] 参照).

Lemma 2.1 ([14, 15]). q は $1 < q \leq 2$ をみたす実数とする. Banach 空間 E が q-uniformly smooth であるための必要十分条件は, ある定数 $K \geq 1$ が存在し, 任意の $x, y \in E$ に対して

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^q + \|x-y\|^q) \leq \|x\|^q + \|Ky\|^q \tag{3}$$

が成立することである.

不等式 (3) を成立させる最も良い定数 K は E の q-uniformly smoothness constant とよばれる ([14] 等参照).

q は $q > 1$ をみたす実数とする. 各 $x \in E$ に対して, 次のように定義される E から 2^{E^*} への写像 J_q は一般化された双対写像 (generalized duality mapping) という:

$$J_q(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^q, \|x^*\|^q = \|x\|^{q-1}\}.$$

特に $J = J_2$ は正規化された双対写像 (normalized duality mapping) とよばれる. $x \neq 0$ である任意の $x \in E$ に対して, $J_q(x) = \|x\|^{q-2}J(x)$ が成立する. E が Hilbert 空間であれば, J は E の恒等写像 I となる (詳細は [14, 32] 等を参照). 次の補題は Lemma 2.1 を用いて証明される ([33] 参照) .

Lemma 2.2 ([33]). qを$1 < q \leq 2$をみたす実数とし, Eをq-uniformly smooth Banach空間であるとする. このとき, 任意の$x, y \in E$に対して,

$$\|x+y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q \tag{4}$$

が成立する. ここでJ_qはEのgeneralized duality mappingであり, KはEのq-uniformly smoothness constantである.

CをBanach空間Eの空でない閉凸部分集合とし, KをCの部分集合とする. CからKの上への写像Qがsunnyであるとは, 任意の$x \in C$と$t \geq 0$に対して$Qx+t(x-Qx) \in C$ならば

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

がつねに成り立つときをいう. CからKの上への写像Qがretractionであるとは$Q^2x = Qx$が任意の$x \in C$に対して成立するときにいう. CからKの上へのsunny nonexpansive retractionが存在すれば, Kはsunny nonexpansive retractであるといわれる. EがHilbert空間であれば, sunny nonexpansive retractionはEからCの上への距離射影に一致する. 次の補題はsunny nonexpansiveの1つの特徴づけを記している([30]等参照).

Lemma 2.3. EをなめらかなBanach空間とし, CをEの空でない閉凸部分集合とする. EからCの上へのretraction Q_Cがsunny nonexpansiveであるための必要十分条件は,

$$\langle x - Q_C x, J(y - Q_C x)\rangle \leq 0$$

がすべての$x \in C$と$y \in K$に対して成立することである. ただし, JはEからE^*への双対写像である.

HをHilbert空間とし, CをHの空でない閉凸部分集合とする. CからHへの写像Aがinverse-strongly-monotoneであるとは, ある$\alpha > 0$が存在して,

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2$$

がすべての$x, y \in C$に対して成立するときをいう. このような場合, Aはα-inverse-strongly-monotoneであるという(詳細や例は[16, 24, 31]参照). なめらかなBanach空間において, Hilbert空間のinverse-strongly-monotone mappingの1つの拡張の定義を記述する([1]等参照). Cを滑らかなBanach空間Eの空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$をとる. CからEへの作用素Aは任意の$x, y \in C$に対して

$$\langle Ax - Ay, J(x - y)\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2 \tag{5}$$

をみたすならば, α-inverse-strongly-accretiveであるといわれる. 不等式(5)から,

$$\|Ax - Ay\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x - y\| \tag{6}$$

がすべての$x, y \in C$に対して成立することもわかる.

次の補題は本論文の中でも重要な役割を担う.

Lemma 2.4 ([1]). C を 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha>0$ とする. A を C から E への α-inverse-strongly-accretive operator で $S(C,A)\neq\emptyset$ をみたすものとする. λ を $0<\lambda\leq\alpha/K^2$ をみたす実数とする. このとき, $I-\lambda A$ は C から E への非拡大写像となる. ここで, K は E の 2-uniformly smoothness constant である.

3. INVERSE-STRONGLY-MONOTONE OPERATOR と非拡大写像に対する収束定理

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha>0$ をとる. S を C から C への非拡大写像とし, A を C から H への α-inverse-strongly-monotone mapping であるとする. Takahashi-Toyoda [31] は, $F(S)\cap VI(C,A)$ の点を見つけるという問題に対して, 次の iteration process を導入した: $x_1=x\in C$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n Ax_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, P_C は H から C の上への距離射影であり, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$ をみたす数列であり, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列とする. Takahashi-Toyoda [31] はこの iteration process により, $F(S)\cap VI(C,A)$ の点への弱収束定理を証明した.

この節ではこの $F(S)\cap VI(C,A)$ の点を見つけるという問題に対して, [31] も参考にしながら, (1) で定義される iteration process をもとに次の iteration process を導入して考察する: $x_1=x\in C$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$x_n=\alpha_n x_{n-1}+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n Ax_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$ をみたす数列であり, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列とする. [12, 4, 31, 34] の考えを用いて, 次の $F(S)\cap VI(C,A)$ の点への弱収束定理を証明できる.

Theorem 3.1. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha>0$ をとる. S を C から C への非拡大写像とし, A を C から H への α-inverse-strongly-monotone mapping で $F(S)\cap VI(C,A)\neq\emptyset$ をみたすものとする. P_C を H から C の上への距離射影とする. $x_1=x\in C$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$x_n=\alpha_n x_{n-1}+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n Ax_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a,b\in(0,2\alpha)$ をみたすある実数 a,b に対して, $\{\lambda_n\}\subset[a,b]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$ と $\alpha_n\to0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $F(S)\cap VI(C,A)$ の点 z に弱収束する. ここで $z=\lim_{n\to\infty}P_{F(S)\cap VI(C,A)}x_n$ となる.

[12, 4, 31, 34] の考えを用いて, 次の強収束定理も証明できる.

Theorem 3.2. C を Hilbert 空間 H の空でないコンパクト凸部分集合とし, $\alpha>0$ をとる. S を C から C への非拡大写像とし, A を C から H への α-inverse-strongly-monotone mapping とする. P_C を H から C の上への距離射影とする. $x_1=x\in C$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$x_n=\alpha_n x_{n-1}+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n Ax_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する．ここで，$\{\lambda_n\}$ は $a,b \in (0,2\alpha)$ をみたすある実数 a,b に対して，$\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ をみたす数列とし，$\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ と $\alpha_n \to 0$ をみたす数列とする．このとき，$\{x_n\}$ は $F(S) \cap VI(C,A)$ の点 z に強収束する．ここで $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$ となる．

4. INVERSE-STRONGLY-ACCRETIVE OPERATOR に対する収束定理

この節では，inverse-strongly-accretive operator に対する弱収束定理を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間で証明し，次に 2-uniformly smooth Banach 空間における強収束定理を証明する．主定理の証明には次の補題を用いる．

Lemma 4.1. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし，Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする．$\alpha > 0$ をとる．A を C から E への α-inverse-strongly-accretive operator で $S(C,A) \neq \emptyset$ をみたすものとする．$x_1 = x \in C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する．ここで，$\{\lambda_n\}$ は $a \in (0,2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して $\lambda_n \in [a, \alpha/K^2]$ をみたし，$\{\alpha_n\}$ は $\alpha_n \in (0,1)$ をみたす数例とする．このとき，任意の $u \in S(C,A)$ に対して，$\|x_{n+1} - u\| \le \|x_n - u\|$ が成立し，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u\|$ が成立する．

次のように Banach 空間における弱収束定理が示せる．

Theorem 4.2 ([13]). C を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし，$\alpha > 0$ をとる．A を C から E への α-inverse-strongly-accretive operator で $S(C,A) \neq \emptyset$ をみたすものとする．Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする．$x_1 = x \in C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する．ここで，$\{\lambda_n\}$ は $a \in (0,2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して，$\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/K^2]$ をみたす数列とし，$\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ と $\alpha_n \to 0$ をみたす数列とする．このとき，$\{x_n\}$ は $S(C,A)$ のある点 z に弱収束する．

Proof. $y_n = Q_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ とする．$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である．$\{x_n\}$ の部分点列で $x_{n_i} \rightharpoonup z$ となるものが存在する．$\{x_n\}$ の定義より，

$$\|x_n - y_n\| = \alpha_n \|x_{n-1} - y_n\|.$$

を得る．さらに，$\{\alpha_n\}$ の仮定より $\|x_n - y_n\| \to 0$ を得る．ある $a > 0$ に対して，$\lambda_{n_i} \subset [a, \alpha/K^2]$ であることから $\{\lambda_{n_i}\}$ は有界であり，$\{\lambda_{n_i}\}$ の部分点列 $\{\lambda_{n_{i_j}}\}$ で $\lambda_0 \in [a, \alpha/K^2]$ に収束するものが存在する．一般性を失うことなく，$\lambda_{n_i} \to \lambda_0$. としてよい．$z \in S(C,A)$ を示す．Q_C は非拡大であり，$y_{n_i} = Q_C(x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})$ なので，

$$\begin{aligned}\|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - x_{n_i}\| &\le \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - y_{n_i}\| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \\ &\le \|(x_{n_i} - \lambda_0 A x_{n_i}) - (x_{n_i} - \lambda_{n_i} A x_{n_i})\| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \\ &\le M|\lambda_{n_i} - \lambda_0| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \qquad (7)\end{aligned}$$

が成立する．ここで，$M = \sup\{\|Ax_n\| : n = 1, 2, \ldots\}$ である．$\{\lambda_{n_i}\}$ が収束することから，

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 Ax_{n_i}) - x_{n_i}\| = 0 \tag{8}$$

を得る．一方，[1] より $z \in F(Q_C(I - \lambda_0 A) = S(C, A)$ を示せる．

最後に，$\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の点に弱収束することを示す．x_{n_i} と x_{n_j} は $\{x_n\}$ の部分点列で，それぞれ $x_{n_i} \rightharpoonup z_1, x_{n_j} \rightharpoonup z_2$ をみたすものとする．これまでの議論より $z_1, z_2 \in z \in S(C, A)$ が得られる．$z_1 = z_2$ であることを証明する．$z_1 \neq z_2$ であると仮定する．Lemma 4.1 と Opial 条件より，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z_1\| \\
&< \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z_2\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - z_2\| \\
&= \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - z_2\| \\
&< \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - z_1\| = \lim_{j\to\infty} \|x_n - z_1\|.
\end{aligned}$$

となるが，これは矛盾である．従って $z_1 = z_2$ であることが示せたことになる．以上より，$\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の点に弱収束することを示せた． □

次に，2-uniformly smooth Banach 空間において inverse-strongly-accretive operator に対する強収束定理を証明する．

Theorem 4.3 ([13]). C を 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし，$\alpha > 0$ をとる．A を C から E への α-inverse-strongly-accretive operator とする．Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする．$x_1 = x \in C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する．ここで，$\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して，$\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/K^2]$ をみたす数列とし，$\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \to 0$ をみたす数列とする．このとき，$\{x_n\}$ は $S(C, A)$ のある点 z に強収束する．

Proof. $y_n = Q_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$ とする．$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である．C がコンパクトなので，$\{x_n\}$ の部分点列で $x_{n_i} \to z$ となるものが存在する．$\{x_n\}$ の定義より，

$$\|x_n - y_n\| = \alpha_n \|x_{n-1} - y_n\|.$$

を得る．さらに，$\{\alpha_n\}$ の仮定より $\|x_n - y_n\| \to 0$ を得る．ある $a > 0$ に対して，$\lambda_{n_i} \subset [a, \alpha/K^2]$ であることから $\{\lambda_{n_i}\}$ は有界であり，$\{\lambda_{n_i}\}$ の部分点列 $\{\lambda_{n_{i_j}}\}$ で $\lambda_0 \in [a, \alpha/K^2]$ に収束するものが存在する．一般性を失うことなく，$\lambda_{n_i} \to \lambda_0$. としてよい．$z \in S(C, A)$ を示す．Q_C は非拡大であり，$y_{n_i} = Q_C(x_{n_i} - \lambda_{n_i} Ax_{n_i})$ なので，

$$\|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 Ax_{n_i}) - x_{n_i}\| \le M|\lambda_{n_i} - \lambda_0| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| \tag{9}$$

が成立する．ここで，$M = \sup\{\|Ax_n\| : n = 1, 2, \ldots\}$ である．$\{\lambda_{n_i}\}$ が収束することから，

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_C(x_{n_i} - \lambda_0 Ax_{n_i}) - x_{n_i}\| = 0 \tag{10}$$

を得る．一方，[1] より $z \in F(Q_C(I - \lambda_0 A) = S(C, A)$ を得る．

Lemma 4.1 より，

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z\| = 0$$

を得る．以上より，$\{x_n\}$ が $S(C, A)$ の点に強収束することを示せた． □

次に主定理 (Theorem 4.2) の応用を述べる．C をなめらかな Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし，$\alpha > 0$ とし，$\beta > 0$ とする．C から E への operator A が α-strongly-accretive であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle Ax - Ay, J(x - y)\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2$$

が成立するときにいう．ここで，J は E から E^* への双対写像である．C から E への写像 A が β-Lipschitz continuous であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Ax - Ay\| \leq \beta\|x - y\|$$

をみたすときにいう．α-strongly-accretive でかつ β-Lipschitz continuous な operator は α/β^2-inverse-strongly-accretive になることが知られている．一方，$k \in [0, 1)$ とする．C から C への写像 T が k-strictly pseudocontractive であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して，ある $j(x - y) \in J(x - y)$ が存在し，

$$\langle Tx - Ty, j(x - y)\rangle \leq \|x - y\|^2 - \frac{1-k}{2}\|(I - T)x - (I - T)y\|^2$$

が成立するときにいう．$I - T$ は C から E への $(1 - k)/2$-inverse-strongly-accretive になることが知られている．まず Theorem 4.2 より得られる α-strongly-accretive でかつ β-Lipschitz continuous である写像に対する弱収束定理から述べる．

Theorem 4.4. C を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし，$\alpha > 0$ をとり，$\beta > 0$ をとる．A を C から E への写像で α-strongly-accretive で β-Lipschitz continuous であり，$S(C, A) \neq \emptyset$ をみたすものとする．Q_C を E から C の上への sunny nonexpansive retraction とする．$x_1 = x \in C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n)Q_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する．ここで，$\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha/\beta^2)$ をみたすある実数 a に対して，$\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/\beta^2 K^2]$ をみたす数列とし，$\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ と $\alpha_n \to 0$ をみたす数列とする．このとき，$\{x_n\}$ は $z \in S(C, A)$ に弱収束する．

次の定理は，inverse-strongly-accretive operator の零点をみつける問題に関する弱収束定理である．

Theorem 4.5. E を Opial 条件をみたす 2-uniformly smooth Banach 空間とし, $\alpha > 0$ をとる. A を E から E への inverse-strongly-accretive operator で $A^{-1}0 = \{u \in E : Au = 0\} \neq \emptyset$ をみたすものとする. $x_1 = x \in E$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n)(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で $\{x_n\}$ を定義する. ここで, $\{\lambda_n\}$ は $a \in (0, 2\alpha)$ をみたすある実数 a に対して, $\{\lambda_n\} \subset [a, \alpha/K^2]$ をみたす数列とし, $\{\alpha_n\}$ は $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ と $\alpha_n \to 0$ をみたす数列とする. このとき, $\{x_n\}$ は $z \in A^{-1}0$ に弱収束する.

References

[1] K. Aoyama, H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2006** (2006), 1-13.

[2] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 57-68.

[3] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T.Tanaka Eds.), pp.9–16, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004. g

[4] S. Atsushiba, *Approximating zero points of accretive operators by an implicit iterative sequences*, to appear.

[5] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska **51** (1997), 1–16.

[6] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117-127.

[7] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.

[8] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A weak convergence theorem for nonexpansive semigroups by the Mann iteration process in Banach spaces,* Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W.Takahashi and T. Tanaka Eds.), pp. 102–109, World Scientific, Singapore, 1999.

[9] S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximating common fixed points by the Mann iteration procedure in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 351–361.

[10] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains*, Fixed Point Theory and Applications, Vol.**3** (Y.J. Cho, J.K.Kim and S.M.Kang Eds.), pp. 15–31, Nova Science Publishers, New York, 2002.

[11] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence of Mann's-type iterations for nonexpansive semigroups in general Banach spaces,* Nonlinear Anal. **61** (2005), 881–899.

[12] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive semigroups in Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications, **2005** (2005), 343–354.

[13] S. Atsushiba and W.Takahashi, *Weak and strong convergence of an implicit iterative process for inverse-strongly-accretive operators*, to appear.

[14] K. Ball, E.A. Carlen and E.J.Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), 463–482.

[15] H.Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland, 1982.

[16] F.E. Browder and W.V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967) 197–228.

[17] D. Van Dulst, *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London. Math. Soc. **25** (1982), 139–144.

[18] H. Iiduka and W. Takahashi *Weak convergence theorems by Cesáro means for nonexpansive mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. 7 (2006),105–113.

[19] H. Iiduka, W. Takahashi and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, PanAmer. Math. J. **14** (2004), 49–61.

[20] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **80** (1979), 493–501.

[21] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of an implicit iterative process for a countable family of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect.A **58** (7) (2004), 69-78.

[22] J. P. Gossez and E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math. **40** (1972), 565–573.

[23] J.A.Liu, *Some convergence theorems of implicit iterative process for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math.Commun. **7** (2002) , 113–118.

[24] F. Liu and M.Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-Valued Anal. **6** (1998), 313–344.

[25] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[26] D. Kinderlehrer and G. Stamppacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure and Applied Mathematics, 88. Academic Press, New York-London, 1980.

[27] J.L. Lions and G. Stamppacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 493–519.

[28] Z.H.Sun, C.He and Y.Q.Ni, *Strong convergence of an implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **8** (2003), 595– 602.

[29] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1287-1293.

[30] W. Takahashi, Nonlinear functional analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[31] W.Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.

[32] Y.Takahashi, K.Hashimoto and M. Kato, *On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 267–281.

[33] H. K. Xu *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.

[34] H. K. Xu and R.G.Ori, *An implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **22** (2001), 767–773.

[35] Y.Zhou and S.S. Chang, *Convergence of implicit iteration process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 23 (2002), 911–921.

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, FUKASAKU, MINUMA-KU, SAITAMA-CITY, SAITAMA 337–8570, JAPAN

E-mail address: `atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp`