

On the existence of zeros of set-valued operators in Banach spaces

松下 慎也* (Shin-ya Matsushita) 高橋 渉† (Wataru Takahashi)

* 松江工業高等専門学校 情報工学科
Department of Information Engineering
Matsue National College of Technology

† 東京工業大学 大学院情報理工学研究科
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

E を Banach 空間、 E^* を E の共役空間、 C を E の閉凸部分集合とし、 $T: C \rightarrow 2^{E^*}$ を集合値写像とする。本研究では、次の問題を考える:

$$\text{Find } u \in C \text{ s.t. } 0 \in Tu. \quad (1.1)$$

(1.1) を満たす点 u を T の零点と呼ぶ。集合値写像の零点の存在性は、凸最小化問題、変分不等式、不動点問題などの解の存在性と関係があり重要である [2, 3, 4, 6, 12, 13]。具体的には、 $f: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とし、 $x \in E$ に対して、

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \ (\forall y \in E)\}$$

を対応させる f の劣微分 ∂f は E から E^* への集合値写像となり、 $f(u) = \min_{x \in E} f(x)$ であることは $0 \in \partial f(u)$ と同値になる。

Aubin [2] は、集合値写像 $S: C \rightarrow 2^E$ の零点の存在を示すため、次の条件について研究を行っている:

$$S(x) \cap T_C(x) \neq \emptyset \ (\forall x \in C). \quad (1.2)$$

ただし、 $T_C(x) = \text{cl}(\cup_{\lambda > 0} \frac{C-x}{\lambda})$ 、 $\text{cl}D$ は集合 D の閉包とする。Aubin は条件 (1.2) を用いて S の零点の存在を示し、更にその結果を不動点問題、微分方程式、変分不等式、相補性問題などに応用した。しかし、Banach 空間における凸関数の劣微分は、 E から E^* への集合値写像となるため、条件 (1.2) を劣微分に適用することはできない。

本研究の目的は、 E から E^* への集合値写像が零点を持つための条件について研究することである。そこで、第2節ではまず E から E^* への集合値写像に対して、その写像が零点を持つことに関する条件を提案し、いくつかの具体例を挙げる。第3節では単調で上半連続な集合値写像に対する零点の存在定理を示す。その応用として第4節では、双対写像の特徴付け、凸最小化問題の解の存在定理を示す。

2 準備

E を Banach 空間とし、 E^* をその共役空間とする。 $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ と表す。 E が狭義凸であるとは、 $\|x\| = \|y\| = 1$ で $x \neq y$ ならば $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ が成り立つことをいう。また、 E のノルムが滑らかであるとは、任意の $x, y \in U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在することをいう。任意の $x, y \in E$ に対して区間 $[x, y]$ を

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \ (t \in [0, 1])\}$$

とする。 C を Banach 空間 E の閉凸部分集合、 $T : C \rightarrow 2^{E^*}$ を集合値写像とする。 T が単調であるとは、任意の $x, y \in C, x^* \in Tx, y^* \in Ty$ に対して $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。また、 T が $x \in C$ で上半連続であるとは、任意の Tx の近傍 V に対して、ある x の近傍 U が存在して $Ty \subset V \ (\forall y \in U)$ が成り立つときをいう。 T が上半へミ連続であるとは、任意の $x, y \in C$ に対して、 T が区間 $[x, y]$ で上半連続になるときをいう。

T に対して次の条件を与える:

$$Tx \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C). \quad (2.1)$$

ただし、 $N_C(x) = \{x^* \in E^* : \langle x - y, x^* \rangle \geq 0 \ (\forall y \in C)\}$ である。次に、条件 (2.1) を満たす具体例を挙げる。

例 2.1 E の元 x に対して、 E から 2^{E^*} への集合値写像 J を

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義する。この J を E 上の双対写像という。このとき

$$-Jx \subset (N_{B[0]}(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in B[0]).$$

ただし、 $B[0] = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ である。

証明 ある $x_0 \in B[0]$ が存在して $-J(x_0) \cap N_{B[0]}(x_0) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ とする。ここで、 $\|z\| < 1$ のとき常に $N_{B[0]}(z) \setminus \{0\} = \emptyset$ となるため、 $\|x_0\| = 1$ としてよい。 $x_0^* \in -J(x_0) \cap N_{B[0]}(x_0) \setminus \{0\}$ とすると、

$$x_0^* \neq 0 \text{ かつ } \langle x_0 - y, x_0^* \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in B[0])$$

となる。ここで $x_0^* \in -J(x_0)$ より、

$$\langle -y, x_0^* \rangle \geq -\langle x_0, x_0^* \rangle = \|x_0\|^2 = 1 \quad (\forall y \in B[0])$$

となる。特に $y = 0$ とすると、 $0 \geq 1$ となり矛盾を得る。したがって、

$$-Jx \subset (N_{B[0]}(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in B[0]).$$

一方、 T が一価写像のとき次のような結果が得られている。

命題 2.1 ([9]) E を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間、 C を E の閉凸部分集合、 $T: C \rightarrow E^*$ を一価写像とする。このとき、以下の条件は同値である。

- (1) $-Tx \in (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C)$;
- (2) $\inf_{y \in C} V(y, (J - T)x) < V(x, (J - T)x)$
 $(\forall x \in C, J^{-1}(J - T)x \notin C)$.

ここで、 $V: E \times E^* \rightarrow [0, \infty)$ は $V(x, x^*) = \|x\|^2 - 2\langle x, x^* \rangle + \|x^*\|^2$ である。

命題 2.1 と [8] の結果より、条件 (2.1) は、制約可能性問題、凸最小化問題の解が存在するときの必要条件となる。

例 2.2 E を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間、 $\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の閉凸部分集合族、 D を E の閉凸部分集合とする。このとき、 $\bigcap_{i=1}^m C_i \cap D \neq \emptyset$ ならば

$$-(J - J\Pi_1\Pi_2 \cdots \Pi_m)x \in (N_D(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in D).$$

ただし、 $\Pi_i: E \rightarrow C_i$ は $\Pi_i x = \operatorname{argmin}_{y \in C_i} V(y, Jx)$ で定義される generalized projection ([1] を参照) とする。

例 2.3 E を一様に滑らかな一様凸 Banach 空間、 $f: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数、 $S = \{u \in E: f(u) = \min_{x \in E} f(x)\}$ 、 D を E の閉凸部分集合とする。このとき、 $S \cap D \neq \emptyset$ ならば

$$-(J - JQ_r)x \in (N_D(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in D).$$

ただし、 $Q_r: E \rightarrow D(\partial f)$ は $Q_r x = \operatorname{argmin}_{y \in E} \{f(y) + \frac{1}{2r}\|y\| - \frac{1}{r}\langle y, Jx \rangle\}$ とする。

3 存在定理

この節では、単調で上半へミ連続な集合値写像に対する零点の存在定理を得る。以下の結果は主定理を証明するのに必要となる。

定理 3.1 (Takahashi [11, 12, 13]) Y を線形位相空間 E のコンパクト集合とし、 X を E の凸部分集合で、 $X \subset Y$ となるものとする。 A を X から 2^Y への集合で、任意の $y \in Y$ に対して、 $A^{-1}y$ が常に凸集合になっているものとする。このとき、 X から 2^Y への写像 B で、次の3つの条件:

- (1) 任意の $x \in X$ に対して、 $Bx \subset Ax$ である;
- (2) 任意の $y \in Y$ に対して、 $B^{-1}y \neq \emptyset$;
- (3) 任意の $x \in X$ に対して、 Bx は開集合である

を満たすものが存在するならば、 $x_0 \in Ax_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する。

定理 3.2 (Kneser [7]) X を線形空間の凸部分集合、 Y を Hausdorff 線形位相空間のコンパクト凸部分集合とし、 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ を、任意の $x \in X$ に対して、 $y \in Y$ の関数 $f(x, y)$ が下半連続な凸関数であり、任意の $y \in Y$ に対して、 $x \in X$ の関数 $f(x, y)$ が凹関数であるとする。このとき

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

が成り立つ。

補助定理 3.1 (Shih-Tan [10]) C を Banach 空間 E の閉凸部分集合、 $T: C \rightarrow 2^{E^*}$ を上半へミ連続 (ただし、 E^* の位相は汎弱位相)、任意の $x \in C$ に対して、 Tx が E^* の汎弱コンパクト凸部分集合とする。このとき、

$$\sup_{x^* \in Tx} \langle u_0 - x, x^* \rangle \leq 0 \quad (\forall x \in C)$$

ならば、

$$\inf_{u^* \in Tu_0} \langle u_0 - x, u^* \rangle \leq 0 \quad (\forall x \in C)$$

である。

次に主定理を示す。

定理 3.3 X を Banach 空間 E の閉凸部分集合とし、 $T: X \rightarrow 2^{E^*}$ を単調でへミ連続 (ただし、 E^* の位相は汎弱位相) とし、任意の $x \in X$ に対して、 Tx は E^* の汎弱コンパクト凸部分集合とする。このとき、 X の弱コンパクト凸部分集合 C が存在して、

$$-Tx \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C) \quad (3.1)$$

が成り立つならば、 $T^{-1}0 \neq \emptyset$ 。

証明の概略

はじめに、 $\sup_{x^* \in Tx} \langle u_0 - x, x^* \rangle \leq 0$ ($\forall x \in C$) を満たす $u_0 \in C$ が存在することを示す。任意の $y \in C$ に対して、

$$\left\{ x \in C : \sup_{x^* \in Tx} \langle y - x, x^* \rangle > 0 \right\} \neq \emptyset$$

と仮定する。ここで、2つの集合値写像 $A, B : C \rightarrow 2^C$ をそれぞれ次のように定義する。

$$Ax = \left\{ y \in C : \inf_{y^* \in Ty} \langle y - x, y^* \rangle > 0 \right\},$$

$$Bx = \left\{ y \in C : \sup_{x^* \in Tx} \langle y - x, y^* \rangle > 0 \right\}.$$

このとき、任意の $y \in C$ に対して、

$$A^{-1}y = \left\{ x \in C : \inf_{y^* \in Ty} \langle y - x, y^* \rangle > 0 \right\}$$

は凸集合となる。また、任意の $y \in C$ に対して、

$$B^{-1}y = \left\{ x \in C : \sup_{x^* \in Tx} \langle y - x, y^* \rangle > 0 \right\} \neq \emptyset$$

となる。一方、 T の単調性から $Bx \subset Ax$ ($\forall x \in C$)、 B の定義から任意の $x \in C$ に対して、 Bx が開集合となる。このことから、 A と B は定理 3.1 の条件を満たす。よって、ある $u_0 \in C$ が存在して $u_0 \in Au_0$ となる。つまり、

$$0 < \inf_{u^* \in Tu_0} \langle u_0 - u_0, u^* \rangle = 0.$$

これは矛盾。すなわち、

$$\sup_{x^* \in Tx} \langle u_0 - x, x^* \rangle \leq 0 \quad (\forall x \in C) \quad (3.2)$$

を満たす $u_0 \in C$ が存在する。

(3.2) と補助定理 3.1 より、

$$\inf_{u^* \in Tu_0} \langle u_0 - x, u^* \rangle \leq 0 \quad (\forall x \in C)$$

となり、

$$\sup_{x \in C} \inf_{u^* \in Tu_0} \langle u_0 - x, u^* \rangle \leq 0$$

が得られる。定理 3.2 より、

$$\inf_{u^* \in Tu_0} \sup_{x \in C} \langle u_0 - x, u^* \rangle \leq 0$$

が得られ、 $N_C(u_0)$ の定義と条件 (3.1) より、

$$0 \in Tu_0$$

となる。 ■

4 応用

この節では、定理 3.3 を用いて、双対写像の特徴付け、凸最小化問題の解の存在に関する必要十分条件について議論する。

定理 4.1 E を Banach 空間、 $J: E \rightarrow 2^{E^*}$ を双対写像とする。このとき、以下の条件は同値である。

- (1) E が回帰的である:
- (2) J が全射である。

証明 (2) ならば (1) が成り立つことは、James の定理 (例えば、[5, 12, 13]) から示される。よって、(1) ならば (2) を示す。 $x^* \in E^*$ 、 $r > 0$ 、 $\|x^*\| < r$ とする。このとき、 $x^* \in R(J)$ を示せばよい。はじめに、

$$-(Jx - x^*) \subset (N_{B_r[0]}(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in B_r[0])$$

を示す。ただし、 $B_r[0] = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ である。そこで、

$$-(Jx_0 - x^*) \cap (N_C(x_0) \setminus \{0\}) \neq \emptyset$$

となる $x_0 \in B_r[0]$ が存在すると仮定する。一般性を失うことなく $\|x_0\| = r$ としてよい。したがって、 $-x_0^* + x^* \in N_{B_r[0]}(x_0) \setminus \{0\}$ を満たす $x_0^* \in Jx_0$ が存在する。このとき、 $-x_0^* + x^* \neq 0$ かつ $\langle x_0 - y, -x_0^* + x^* \rangle \geq 0$ ($\forall y \in B_r[0]$) が成り立つ。これより、任意の $y \in B_r[0]$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle y, x_0^* - x^* \rangle &\geq \langle x_0, x_0^* - x^* \rangle \\ &= \langle x_0, x_0^* \rangle - \langle x_0, x^* \rangle \\ &\geq \|x_0\|^2 - \|x_0\| \|x^*\| \\ &= r(r - \|x^*\|) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ここで、 $y = 0$ とおくと、 $0 \geq r(r - \|x^*\|) > 0$ となり矛盾。よって

$$-(Jx - x^*) \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in B_r[0])$$

が成り立つ。

集合値写像 $T: E \rightarrow 2^{E^*}$ を $Tx = Jx - x^*$ ($\forall x \in E$) と定義すると、 T は $B_r[0]$ において定理 3.3 の条件を満たしており、 $T^{-1}0 \neq \emptyset$ となる。よって、 $x^* \in R(J)$ となる。 ■

次に、定理 3.3 を凸最小化問題に応用する。 $f: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper な下半連続な凸関数とする。このとき、 $x \in E$ に対して、

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \quad (\forall y \in E)\}$$

で定義される E から E^* への集合値写像 ∂f を x における f の劣微分という。

定理 4.2 E を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間、 $f : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数、 $r > 0$ とする。このとき、以下の条件は同値である。

- (1) ある $u \in E$ が存在して、 $f(u) = \min_{x \in E} f(x)$;
 (2) E の有界閉凸集合部分 C が存在して、

$$-A_r x \in (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C). \quad (4.1)$$

ただし、 $J_r x = (I + rJ^{-1}\partial f)^{-1}x$, $A_r x = \frac{1}{r}J(x - J_r x)$ とする。

証明 まず、(2) ならば (1) を証明する。ここで、 A_r は一価で単調へミ連続となる (例えば、[5, 12, 13])。また、条件 (4.1) より定理 3.3 を用いると、 $A_r^{-1}0 \neq \emptyset$ となる。 $u \in A_r^{-1}0$ とすると、 $0 = A_r u = \frac{1}{r}J(u - J_r u)$ 。よって、 $J_r u = u$ となる。 J_r の定義より、 $0 \in \partial f(u)$ となるので (1) が成り立つ。

次に、(1) ならば (2) を示す。 $u \in E$ を $f(u) = \min_{x \in E} f(x)$ とし、 $\delta > 0$ とする。このとき、

$$-A_r x \in (N_{B_\delta[u]}(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in B_\delta[u]) \quad (4.2)$$

となることを示す。 $-A_r x_0 \in N_{B_\delta[u]}(x_0) \setminus \{0\}$ となる $x_0 \in B_\delta[u]$ の存在を仮定する。つまり、

$$-A_r x_0 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \langle x_0 - y, -A_r x_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in B_\delta[u])$$

となる。 $\langle x_0 - J_r x_0 + J_r x_0 - y, -A_r x_0 \rangle \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} \langle J_r x_0 - y, -A_r x_0 \rangle &\geq \langle x_0 - J_r x_0, A_r x_0 \rangle \\ &= \langle x_0 - J_r x_0, \frac{1}{r}J(x_0 - J_r x_0) \rangle \\ &= \frac{1}{r} \|x_0 - J_r x_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

ここで、特に $y = u$ とおくと A_r の単調性より、

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle J_r x_0 - u, -A_r x_0 \rangle \\ &\geq \frac{1}{r} \|x_0 - J_r x_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

よって、 $x_0 = J_r x_0$ となる。これは、 $-A_r x_0 \neq 0$ に矛盾。よって (4.2) が成り立つ。 ■

参考文献

- [1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, in A. G. Kartsatos (Ed.), *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*, Marcel Dekker, New York, 1996, pp.15-50.

- [2] J.-P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing, Amsterdam-New York, 1979.
- [3] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [4] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [5] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Non-linear Problems*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands (1990).
- [6] A.G. Kartsatos, *On the connection between the existence of zeros and the asymptotic behavior of resolvents of maximal monotone operators in reflexive Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 3967-3987.
- [7] H. Kneser, *Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux*, C. R. Acad. Sci. Paris, **234** (1952), 2418-2420.
- [8] S. Matsushita and W. Takahashi, *On the existence of zeros of monotone operators in reflexive Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **323** (2006), 354-1364.
- [9] S. Matsushita and W. Takahashi, *Existence theorems for set-valued operators in Banach spaces*, Set-Valued Anal. (to appear).
- [10] M.-H. Shih and K.-K. Tan, *Browder-Hartman-Stampacchia variational inequalities for multi-valued monotone operators*, J. Math. Anal. Appl. **134** (1988), 431-440.
- [11] W. Takahashi, *Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, **45** (1986), 419-427.
- [12] 高橋 渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.
- [13] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama-Publishers, 2000.