数理解析研究所講究録
第1547巻 2007年 51-58

エネルギー依存逆散乱理論

東京海洋大学海洋科学部　上村　豊 (Yutaka Kamimura)
Department of Ocean Sciences,
Tokyo University of Marine Science and Technology

ポテンシャル項がエネルギーを表すスペクトルパラメータに依存する形の Schrödinger 方程式に対する逆散乱に関する理論を総称してエネルギー依存逆散乱理論という．逆散乱理論に基づく方法すなわち逆散乱法は物理数学の広い範囲において強力な手段を供給する．この論文では，エネルギー依存逆散乱の理論と応用を概観し，最近の筆者の仕事 (Kamimura [11, 12, 13]) を報告する．

1　エネルギー依存逆散乱問題と応用

エネルギー依存逆散乱理論は，本来，相対論的量子力学の代表的モデルである Klein-Gordon 方程式

$$f'' + [k^2 - 2EV(x) + V(x)^2]f = 0 \qquad (0 \le x < \infty,\ '' = \tfrac{d^2}{dx^2}), \tag{1.1}$$

のS波散乱（例えば [4, 18] 参照）の逆散乱理論の構築に動機付けられている．ここで，k は波数, $E = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ はエネルギー，V は質量 m の粒子（あるいは反粒子）の場のポテンシャルであり，(1.1) は Einstein のエネルギー等式 $(E - V)^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ において運動量 p を $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ （$\hbar$ は Plank 定数）と量子化して得られる．

(1.1) に対応する非相対論的量子力学の Schrödinger 方程式

$$f'' + [k^2 - U(x)]f = 0 \tag{1.2}$$

の逆散乱理論は1950年代前半に Marchenko により構築されたが，この Marchenko の理論（Marchenko [17]，Agranovich-Marchenko [1]，Chadan-Sabatier [4]，加藤 [15] などを参照）が Klein-Gordon 方程式 (1.1) や，それを一般化した

$$f'' + [k^2 - (U(x) + 2E\,Q(x))]f = 0 \qquad (0 \le x < \infty). \tag{1.3}$$

に対しても有効であることは Weiss-Scharf [22]，Cornille [5] により示唆された．このことを初めて系統的に明らかにしたのは Jaulent-Jean [9]，Jaulent [6, 7] である．この一連の論文は，(1.2) で $m = 0$ の場合すなわち

$$f'' + [k^2 - (U(x) + 2k\,Q(x))]f = 0 \qquad (0 \le x < \infty) \tag{1.4}$$

を扱い，束縛状態の無い場合に，Marchenkoの理論の骨格をなすMarchenkoの積分方程式に相当するMarchenko型積分方程式の一意可解性を示し，そこから $z(x) = 2\int_x^\infty Q(\eta)d\eta$ の非線形微分方程式を導き，その解を用いてポテンシャルの組 (Q,U) を散乱データから定める方法および，与えられた関数が散乱データとなるための十分条件を確立した．筆者は論文 [11, 12] においてより直接的な方法を見出し，(1.4) に対する逆散乱問題の束縛状態の無い場合の最終的な解答を与えた．これに関しては第2節で詳しく述べる．なお，方程式 (1.4) を $\boldsymbol{R}$ 上で考えた

$$f'' + [k^2 - (U(x) + 2k\,Q(x))]f = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.5}$$

の逆散乱問題（この場合は反射係数から (Q,U) の組を定める問題）が Jaulent-Jean [10] Sattinger-Szmigielski [20]，および Kamimura[12] で論じられている．

エネルギー依存逆散乱理論は，相対論的量子力学とは別に，双曲型偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - b(x)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c(x)\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{1.6}$$

にしたがう波の伝播 $\phi(x,t) = f(x,k)e^{-ikt}$ に応用される．すなわち，$a(x), b(x) > 0$ のときの解 $f(x,k) = \phi(x,t)e^{ikt}$ の方程式

$$(a(x)f'(x,k))' + [k^2 b(x) + ikc(x)]f(x,k) = 0 \tag{1.7}$$

に対する逆散乱理論を利用して，(1.6) の係数である $a(x), b(x), c(x)$ を解のデータから定める係数決定問題を扱うのである．たとえば，コンデンサーとコイルと抵抗を一体としてもつ電線のキャパシタンス $a(x)^{-1}$，インダクタンス $b(x)$，抵抗 $c(x)$ を，電流 ϕ の波動の情報から定める問題をイメージされたい．Liouville変換を用いることにより，この問題は

$$f'' + [k^2 - (U(x) + 2ikQ(x))]f = 0$$

の逆散乱問題に帰着される．この逆散乱問題は Jaulent [8] で取り上げられ，Aktosun-Klaus-van der Mee [2, 3] で精力的に研究された．

上と同じ系列にあるエネルギー依存逆散乱理論の応用は Kamimura [13] で扱われた．これは，移流拡散の方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - v(x)\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \tag{1.8}$$

の移流項 $v(x)$ をトレーサー ϕ の観測データから決定する問題であり，(1.5) と異なり楕円型偏微分方程式の係数決定問題である．形式的には $\phi(x,y) = e(x,\lambda)e^{i\lambda y}$ として，(1.7) に相当する

$$e'' + [-\lambda^2 - i\lambda v(x)]e = 0$$

が得られるので，実軸上の散乱データの代わりに虚軸上の散乱のデータを用いることになる．

KdV 方程式に代表される非線形発展方程式の Cauchy 問題を散乱データの時間発展を利用して解くいわゆる逆散乱法が，古典的 Schrödinger 方程式の代わりにエネルギー依存 Schrödinger 方程式を用いることでどのように一般化されるかは興味深い問題である．これに関しては，Kaup [16] による長波の研究に用いられた Schrödinger 方程式

$$f'' + [k^2 + m^2 - (U(x) + 2ik\,Q(x))]f = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.9}$$

による逆散乱法の研究を出発点として，Sattinger-Szmigielski [20]，van der Mee-Pivovarchik [21] などの研究がなされている．

2 散乱変換と逆変換

ポテンシャルから散乱データへの対応を散乱変換という．逆散乱問題はこの変換（非線形変換）の逆変換を確立することを目的とする．逆散乱法では，散乱変換は Fourier 変換と同様の役割を果たすから，散乱変換の逆公式の導出およびこれが働く空間の設定は大変重要である．

方程式 (1.4) に対する散乱変換 $\mathcal{S}$ は，実関数の組 $(Q(x), U(x))$ に (1.4) の散乱解，すなわち

$$\psi(x,k) = e^{-ikx} - {}^{\exists}S(k)e^{ikx} + o(1) \quad (x \to \infty), \qquad \psi(0,k) = 0$$

をみたす解 $\psi(x,k)$ に現れる $S(k)$ を対応させる変換である：

$$\mathcal{S} : (Q(x), U(x)) \longmapsto S(k) \tag{2.1}$$

以後 $S(k)$ を (1.4) の散乱データという．量子力学的には S 波がポテンシャルの影響で受ける位相のずれを δ とすれば $S(k) = e^{2i\delta(k)}$ である（[4, 18] 参照）．また，ポテンシャルがない場合には $S(k) \equiv 1$ である．

関数 $Q(x), U(x)$ が

(P1) $\qquad Q(x),\ (1+x)U(x) \in L^1(0,\infty)$

をみたすならば，$x \to \infty$ のときの漸近挙動 $f(x,k) \sim e^{ikx}$ をもつ解 $f(x,k)$（これを Jost 解とよぶ）が各 k に対しただ 1 つ定まり，$k \neq 0$ ならば $\overline{f(x,k)}$ と (1.4) の基本解系をなす（Wronskian が $W[f(x,k), \overline{f(x,k)}] = -2ik$ と計算される）ので，散乱解が存在して

$$\psi(x,k) = \overline{f(x,k)} - S(k)f(x,k)$$

と表される．よって，$\psi(0,k) = 0$ より，$S(k)$ は

$$S(k) = \frac{\overline{f(0,k)}}{f(0,k)} \tag{2.2}$$

となる．

Jost 解は $\operatorname{Im} k \geq 0$ に対し定義される．そして次の表示をもつ．

$$f(x,k) = e^{i\int_x^\infty Q(\eta)d\eta}e^{ikx} + \int_x^\infty A(x,t)e^{ikt}dt \qquad (\operatorname{Im} k \geq 0). \tag{2.3}$$

ここで $A(x,\cdot) \in L^1(x,\infty)$ である．これを Jost 解の変換核表示という．そして，$A(x,t)$ を変換核という．

(P1) に加え次を仮定する：

(P2) $\quad f(0,0) \neq 0, \quad f(0,k) \neq 0 \ (\mathrm{Im}\, k > 0).$

これは，量子力学的には，準束縛状態も束縛状態もない（すなわち散乱状態のみの）状況を考えていることに相当する．この仮定より $f(0,k)$ は上半平面で正則，実軸までこめて連続で実軸および上半平面で零点をもたないことに注意する．さらに，次の追加的な仮定をおく：

(P3) $\quad (1+x)Q'(x) \in L^1(0,\infty).$

上の仮定 (P1)–(P3) からしたがう実軸上の関数 $S(k)$ の性質を列挙すると，まず，明らかに

(S1) $\quad |S(k)| = 1$

である．次に，$f(0,0) \neq 0$ より，$S(k)$ は $|C| = 1$ なる複素定数 C（$Q(x)$ を用いて書けば $C = \exp\{2i \int_x^\infty Q(\eta)d\eta\}$ である）と関数 $F(t) \in L^1(\boldsymbol{R})$ により

(S2) $\quad S(k) = C + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-ikt}dt$

と一意的に表されることがわかる．これは，(2.2)，(2.3) と Wiener-Lévy の定理（たとえば [14, 第 4 章] 参照）からの帰結である．さらに，仮定 (P2) と偏角の原理により

$$\mathrm{ind}\, f(0,k) := \frac{1}{2\pi}\left[\arg f(0,k)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{2.4}$$

であり，よって

(S3) $\quad \mathrm{ind}\, S(k) = 0$

である．次に，表現 (S2) における $F(t)$ を用いて積分方程式

$$\overline{\Delta(x,t)} + \int_x^\infty \Delta(x,r)\,F(r+t)dr + \int_x^\infty F(r+t)dr = 0 \qquad (x \le t). \tag{2.5}$$

を考える．この方程式の導出に関しては後述するが，$(Q(x),U(x))$ と $S(k)$ とはこの方程式によって完全に関係付けることができる．方程式 (2.5) は，Riesz-Shauder の交代定理と Wiener-Hopf の技法により，空間 $BC[x,\infty)$（有界連続な関数の空間）において一意可解である．この解を $\Delta(x,t)$ とするとき，$x \ge 0$ に対し $1+\Delta(x,x) \neq 0$ であり，次の関係式が成り立つことが示される．

(S4) $\quad \exp\{2i\left[\arg(1+\Delta(x,x))\right]_0^\infty\} = C.$

また，追加的な仮定 (P3) より，次がしたがう．

(S5) $\quad (1+t)F'(t) \in L^1(0,\infty).$

(S1)–(S5) は散乱データの十分条件でもある．このことを述べるために，(P1)–(P3) をみたす実関数の組 $(Q(x), U(x))$ の全体を Π，(S1)–(S5) をみたす関数 $S(k)$ の全体を Σ と書く：

$$\Pi := \{(Q(x), U(x)) \mid Q(x), U(x) \text{ は (P1)–(P3) をみたす } [0,\infty) \text{ 上の実関数}\} \tag{2.6}$$

$$\Sigma := \{S(k) \mid S(k) \text{ は (S1)–(S5) をみたす } \boldsymbol{R} \text{上の関数}\} \tag{2.7}$$

定理 1 ([12]) 散乱変換 $\mathcal{S}$ は Π から Σ の上への1対1の変換で，逆変換は (2.5) の解 $\Delta(x,t)$ により，次で与えられる：

$$Q(x) = -\frac{d}{dx}(\mathrm{Im}\ \log(1+\Delta(x,x))), \tag{2.8}$$

$$U(x) = \left(\frac{d}{dx}(\mathrm{Re}\ \log(1+\Delta(x,x)))\right)^2 - \frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{Re}\ \log(1+\Delta(x,x))), \tag{2.9}$$

Schrödinger 方程式 (1.2) の（散乱状態のみの場合の）逆散乱理論における散乱変換（これを $\mathcal{S}_0$ と書く）は，上の定理の中に次のように組み込まれている（[11, Theorem 4.3]）：

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\ \mathcal{S}\ } & \Sigma \\ \cup & & \cup \\ \Pi_0 & \xrightarrow{\ \mathcal{S}_0\ } & \Sigma_0 \end{array}$$

ただし

$$\Pi_0 = \{(Q(x), U(x)) \in \Pi \mid Q(x) = 0\}, \qquad \Sigma_0 := \left\{S(k) \in \Sigma \mid S(-k) = \overline{S(k)}\right\}$$

とした．

例をあげる．α, β を $\mathrm{Im}\,\alpha, \beta > 0$ なる複素数とし

$$S(k) := \frac{(k+\alpha)(k+\overline{\beta})}{(k+\overline{\alpha})(k+\beta)} \qquad (k \in \boldsymbol{R})$$

を考える．このとき，$S(k)$ は (S1)–(S3) および (S5) をみたす（(S2) の C は $C=1$ である）．そして，方程式 (2.5) を解いて (S4) のための条件を求めると $\beta = c\alpha$（$c > 0$）となることがわかる（[11, §5]）．以上により，上の $S(k) \in \Sigma$ のためには $\beta = c\alpha$（$c > 0$）が必要十分である．この条件をみたす $S(k)$ に対する $Q(x), U(x)$ は，(2.8) と (2.9) により，具体的に（初等関数で）書き下すことができる．また，$S(k) \in \Sigma_0$ であるためには α, β が純虚数であることが必要十分である．

定理1がどのようにして導き出されるのかを簡単に説明しておく．(2.3) は $K(x,t) = -\int_t^\infty A(x,s)ds$ とおいて部分積分を行い，$k=0$ として得られる $f(x,0) + K(x,x) = \exp\{i\int_x^\infty Q(\eta)d\eta\}$ を用いて

$$f(x,k) = f(x,0)e^{ikx} - ik\int_x^\infty K(x,t)e^{ikt}dt \tag{2.10}$$

と書き直される．そして，$K(x,t)$ は積分方程式

$$\overline{K(x,t)} + \int_x^\infty K(x,r)\,F(r+t)dr + f(x,0)\int_x^\infty F(r+t)dr = 0 \qquad (x \le t)$$

をみたす．これは Schrödinger 方程式 (1.2) に対する Marchenko 方程式の積分形に相当する．この方程式は (2.5) と同様に，空間 $BC[x,\infty)$ において一意可解である．よって，$f(x,0)=0$ とすると $K(x,t)=0$ ゆえに $A(x,t)=0$ となるが，これは (2.3) より得られる $f(x,0)=\exp\{i\int_x^\infty Q(\eta)d\eta\}$ に矛盾する．これより $f(x,0)\neq 0$ である．したがって，$\Delta(x,t)=f(x,0)^{-1}K(x,t)$ として（$f(x,0)$ は実関数であることに注意）積分方程式 (2.5) が得られる．この解 $\Delta(x,t)$ に対し $1+\Delta(x,x)\neq 0 \quad (x\geq 0)$ であり，$Q(x)\in BC[0,\infty)$ の仮定の下で，$\Delta(x,t)$ からポテンシャルの組 $(Q(x),U(x))$ を復元するための復元公式が成り立つ：

$$\frac{2\Delta_t(x,x)}{1+\Delta(x,x)} = \int_x^\infty [U(r)+Q(r)^2]dr - i\,Q(x), \quad 0\leq x<\infty, \tag{2.11}$$

更に (2.5) の解 $\Delta(x,t)$ は，次の性質をもつ：

(i) 関数 $\dfrac{\Delta_x(x,x)-\Delta_t(x,x)}{1+\Delta(x,x)}$ は実関数である．

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\Delta_x(x,x)-\Delta_t(x,x)}{1+\Delta(x,x)}\right) = \left|\dfrac{\frac{d}{dx}\Delta(x,x)}{1+\Delta(x,x)}\right|^2 \quad (x\geq 0).$

復元公式 (2.11) と (i) より

$$Q(x) = -2\,\mathrm{Im}\,\frac{\Delta_t(x,x)}{1+\Delta(x,x)} = -\mathrm{Im}\,\frac{\frac{d}{dx}\Delta(x,x)}{1+\Delta(x,x)} = -\frac{d}{dx}\arg\left(1+\Delta(x,x)\right)$$

が得られる．これより (S4) および (2.8) が得られる．また，(2.11) と (ii) より (2.9) が得られる．

逆に，$S(k)\in\Sigma$ が与えられたとき，$Q(x),U(x)$ を (2.8)，(2.9) で定めると

$$f(x,k) = \frac{1}{|1+\Delta(x,x)|}\left(e^{ikx} - ik\int_x^\infty \Delta(x,t)e^{ikt}dt\right)$$

が (1.4) の Jost 解となり (2.2) が成り立つことが示される．

References

[1] Agranovich, Z.S. and Marchenko, V.A., *The Inverse Problem of Scattering Theory*, Gordon and Breach, New York, 1963.

[2] Aktosun, T., Klaus, M. and van der Mee, C., Wave scattering in one dimension with absorption, J. Math. Phys., **39**, 1957–1992 (1998).

[3] Aktosun, T., Klaus, M. and van der Mee, C., Inverse scattering in one-dimensional non-conservative media, Integral Equations and Operator Theory, **30**, 279–316 (1998).

[4] Chadan, K. and Sabatier, P. C., *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1989.

[5] Cornilla, H., Existence and uniqueness of crossing symmetric $N/D-$type equations corresponding to the Klein-Gordon equation. J. Math. Phys., **11**, 79–98 (1970).

[6] Jaulent, M., On an inverse scattering problem with an energy-dependent potential, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect A, **17**, 363–378 (1972).

[7] Jaulent, M., Sur le problème inverse de la diffusion pou l'équation de Shcrödinger radiale avec un potentiel dépendent de l'énrgie, C. R. Acad. Sc. Paris, **280**, 1467–1470 (1975).

[8] Jaulent, M., Inverse scattering problems in absorbing media, J. Math. Phys., **17**, 1351–1360 (1976).

[9] Jaulent, M. and Jean, C., The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, Comm. Math. Phys., **28**, 177–220 (1972).

[10] Jaulent, M. and Jean, C., The inverse problem for the one-dimensional Shcrödinger equation with an energy-dependent potential, I,II, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect A, **25**, 105–118, 119-137 (1976).

[11] Kamimura, Y., An inversion formula in energy dependent scattering, J. Int. Eq. Appl., in press.

[12] Kamimura, Y., Energy dependent inverse scattering, Funkcialaj Ekvacioj, in press.

[13] Kamimura, Y., An inverse problem in advection-diffusion, J. Physics: Conference Series, in press.

[14] 上村　豊, 積分方程式, 共立出版, 2001.

[15] 加藤祐輔, 散乱理論における逆問題, 岩波書店, 1983.

[16] Kaup, D. J., A higher-order water-wave equation and the method for solving it, Prog. Theor. Phys., **54**, 396–408 (1975).

[17] Marchenko, V.A., *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Operator Theory: Advances and Applications, **22**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1986.

[18] 西島和彦, 相対論的量子力学, 培風館, 1973.

[19] Sattinger, D. H. and Szmigielski, J., Energy dependent scattering theory, Diff. Int. Eq., **8**, 945–959 (1995).

[20] Sattinger, D. H. and Szmigielski, J., A Riemann-Hilbert problem for an energy dependent Schrödinger operator, Inverse Problems, **12**, 1003–1025 (1996).

[21] van der Mee, C. and Pivovarchik, V, Inverse scattering for a Schrödinger equation with energy dependent potential, J. Math. Phys., **42**, 158–181 (2001).

[22] Weiss, R., Scharf, G., The inverse problem of potential scattering according to the Klein-Gordon equation, Helv. Phys. Acta, **44**, 910–929 (1971).