数理解析研究所講究録
第 1547 巻 2007 年 161-169

2階半線形楕円型方程式系の正値全域解の存在

尾道大学・経済情報学部　寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)
Faculty of Economics, Management & Information Science,
Onomichi University

1. Introduction

次の2階半線形楕円型方程式系の正値全域解の存在・非存在について考える:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta}, \end{cases} \quad x \in \boldsymbol{R}^N,$$

ここで $N \geq 3, \alpha > 0, \beta > 0$, は定数で $\alpha\beta > 1$ を満たすとする. $p(r) \geq 0$, $q(r) \geq 0, r = |x|$ は $[0, \infty)$ で連続とする.

(u, v) が (1.1) の全域解であるとは $u, v \in C^2(\boldsymbol{R}^N)$, (u, v) は $\boldsymbol{R}^N$ で (1.1) を満たすときをいう. また解としては, 球対称なものを考える.

注意　条件 $\alpha\beta > 1$ について. α, β が $\alpha\beta \leq 1$ を満たす場合, (1.1) の正値全域解は必ず存在する (文献 [4] 参照). よって $\alpha\beta > 1$ の場合のみ考えることにする.

方程式系 (1.1) の正値全域解については様々な結果がある (参考文献 [3, 4, 6]). 正値全域解の存在・非存在について次の結果がある:

Theorem A　p, q が

$$(1.2) \qquad \int^{\infty} sp(s)ds < \infty, \quad \int^{\infty} sq(s)ds < \infty$$

を満たすとする. このとき (1.1) の有界な正値全域解が存在する.

注意　この Theorem A では有界な正値全域解の存在が示されているが, Lair,Wood は条件 (1.2) の下で非有界な正値全域解が存在することを示している (文献 [4]).

Theorem B　p, q が

$$\frac{C_1}{r^{\lambda}} \leq p(r) \leq \frac{C_2}{r^{\lambda}}, \quad \frac{C_3}{r^{\mu}} \leq q(r) \leq \frac{C_4}{r^{\mu}}, \quad r \geq r_0,$$

を満たすとする, ここで $r_0 > 0$, $C_i > 0, i = 1, \cdots, 4$, は定数. このとき

(i) (λ, μ) が

$$\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) \leq 0 \quad \text{または} \quad \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) \leq 0$$

を満たすならば (1.1) の正値全域解は存在しない.

(ii) (λ, μ) が

$$\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) > 0, \quad \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) > 0,$$

を満たすならば (1.1) の正値全域解が存在する.

ここで積分条件 (1.2) について考えてみる:

$\int^\infty sp(s)ds, \int^\infty sq(s)ds$ の収束・発散については次の三通りが考えられる.

(I) $\displaystyle\int^\infty sp(s)ds < \infty,\quad \int^\infty sq(s)ds < \infty$

(II) $\displaystyle\int^\infty sp(s)ds < \infty,\quad \int^\infty sq(s)ds = \infty \left(\int^\infty sp(s)ds = \infty,\quad \int^\infty sq(s)ds < \infty\right)$

(III) $\displaystyle\int^\infty sp(s)ds = \infty,\quad \int^\infty sq(s)ds = \infty$

(I) の場合, Theorem A から正値全域解が存在する. (II), (III) の場合, この条件だけで, 正値全域解の存在・非存在がいえるかどうかという問題がある. 同様の問題は単独の楕円型方程式でも考えられている.

次の楕円型方程式を考える:

$$\Delta u = p(|x|)u^\alpha, \quad x \in \boldsymbol{R}^N, \quad N \geq 3,\ \alpha > 1 \tag{1.3}$$

ここで, $p(r) \geq 0$ は連続. (1.3) の正値全域解の存在に関して次の定理がある.

Theorem C p が

$$\int^\infty sp(s)ds < \infty \tag{1.4}$$

を満たすとする. このとき (1.3) の正値全域解が存在する.

次に, p が条件 (1.4) を満たさない場合, すなわち $\int^\infty sp(s)ds = \infty$ のとき,(1.3) の正値全域解が存在するかどうかの問題がある. この問題に対し, Cheng, Lin は次のように予想した (文献 [2]):

Conjecture p が

$$\int^\infty sp(s)ds = \infty \tag{1.5}$$

を満たすとする. このとき (1.3) の正値全域解は存在しない.

この予想が正しければ (1.4) は (1.3) の正値全域解が存在するための必要十分条件となる. しかし Cheng, Lin はこの予想が正しくないことを示した (文献 [5] 参照). その後, Benguria, Lorca, Yarur らも条件 (1.5) の下で正値全域解が存在する例を示した (文献 [1]). よって (1.5) の条件だけでは正値全域解は非存在とはならない.

方程式系 (1.1) に戻って (III) の場合を考える. Theorem B において $\lambda = \mu = 2$ としてみる. このとき Theorem B(i) の条件を満たすことがわかる. よってこの場合, 解は非存在となる. さらに積分条件 (III) を満たすこともわかる. 従って, 条件 (III) を満たせば正値全域

解は存在しないと予想される．しかし，この予想は誤りである．条件 (III) を満たし，(1.1) の正値全域解が存在する ような p, q の例については文献 [5] を参考に作ることができる．よって条件 (III) だけでは正値全域解は非存在とはならない (解が非存在になるためにはもう少し条件が必要である．これについては今後の課題である)．

最後に (II) の場合を考える．まず次の二つの方程式系を考える：

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha} = \dfrac{1}{(1+|x|)^{2\alpha+2}}v^{\alpha}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta} = u^{\beta}, \end{cases} \qquad x \in \boldsymbol{R}^N,$$

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha} = \dfrac{1}{(1+|x|)^{2\alpha+3}}v^{\alpha}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta} = u^{\beta}, \end{cases} \qquad x \in \boldsymbol{R}^N.$$

方程式系 (1.6),(1.7) はともに積分条件 (II) を満たしている．また，p, q は

$$\frac{C_1}{r^{\lambda}} \le p(r) \le \frac{C_2}{r^{\lambda}},\ \frac{C_3}{r^0} \le q(r) \le \frac{C_4}{r^0}, \quad r \ge 1$$

を満たすことがわかる，ここで $\lambda = 2\alpha + 2$ ((1.6)), $2\alpha + 3$ ((1.7))．Theorem B の条件を満たすかどうか調べてみる．

(1.6) の場合:

$$\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 2\alpha + 2 - 2 + \alpha(0 - 2) = 0.$$

よって Theorem B (i) から (1.6) の正値全域解は存在しない．

(1.7) の場合:

$$\begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 2\alpha + 3 - 2 + \alpha(0 - 2) = 1 > 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) = 0 - 2 + \beta(2\alpha + 3 - 2) = 2\alpha\beta - 2 + \beta > 0. \end{cases}$$

よって Theorem B (ii) から (1.7) の正値全域解が存在する．

これらの例からわかるように積分条件 (II) だけでは解の存在・非存在はわからない．

また次の方程式系を考える：

$$(1.8)\qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha} = \dfrac{1}{(1+|x|)^{2\alpha+2}(\log(e+|x|))^2}v^{\alpha}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta} = \dfrac{1}{(\log(e+|x|))^2}u^{\beta}, \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^N.$$

この方程式系 (1.8) は積分条件 (II) を満たしている．また p, q は

$$\frac{C_1}{r^{2\alpha+2+\varepsilon_1}} \le p(r) \le \frac{C_2}{r^{2\alpha+2}},\ \frac{C_3}{r^{\varepsilon_2}} \le q(r) \le C_4, \quad r \ge e,$$

を満たすことがわかる，ここで，$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, C_i > 0$ は定数．Theorem B の条件を満たすかどうか調べてみる:

$\lambda = 2\alpha + 2 + \varepsilon_1$, $\mu = \varepsilon_2$ とする．このとき

$$\begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 2\alpha + 2 + \varepsilon_1 - 2 + \alpha(\varepsilon_2 - 2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) = \varepsilon_2 - 2 + \beta(2\alpha + 2 + \varepsilon_1 - 2) = 2\alpha\beta - 2 + \beta\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0. \end{cases}$$

また, $\lambda = 2\alpha + 2, \mu = 0$ とする．このとき

$$\begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 2\alpha + 2 - 2 + \alpha(0 - 2) = 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) = 0 - 2 + \beta(2\alpha + 2 - 2) = 2\alpha\beta - 2 > 0. \end{cases}$$

したがって Theorem B の条件を満たさない．よって (1.8) には正値全域解が存在するかどうかわからない．

本研究の目的は, 積分条件 (II) の下で, (1.1) の正値全域解が存在するまたは存在しないための条件を求めることである．

2. Main results

(1.1) の正値全域解の存在に関して次の結果が得られた：

Theorem 1 次を満たすような (λ, μ) が存在するとする．

$$\int^{\infty} s^{\lambda} p(s)ds < \infty, \quad \int^{\infty} s^{\mu} q(s)ds < \infty, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \lambda - 1 + \alpha(\mu - 1) \geq 0, \\ \mu - 1 + \beta(\lambda - 1) \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

このとき (1.1) の正値全域解が存在する．

注意 Theorem 1 で $\lambda = \mu = 1$ の場合, Theorem A になる．

Introduction で考えた方程式系 (1.8) に解が存在するかどうか調べる：

$$\begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha} = \dfrac{1}{(1 + |x|)^{2\alpha+2}(\log(e + |x|))^2} v^{\alpha}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta} = \dfrac{1}{(\log(e + |x|))^2} u^{\beta}, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^N. \tag{1.8}$$

$\lambda = 2\alpha + 1, \mu = -1$ とする．このとき積分条件 (2.1)

$$\int^{\infty} s^{2\alpha+1} p(s)ds < \infty, \quad \int^{\infty} s^{-1} q(s)ds < \infty$$

が成立することは容易にわかる．条件 (2.2) については次の通り:

$$\begin{cases} \lambda - 1 + \alpha(\mu - 1) = 2\alpha + 1 - 1 + \alpha(-1 - 1) = 0, \\ \mu - 1 + \beta(\lambda - 1) = -1 - 1 + \beta(2\alpha + 1 - 1) = 2\alpha\beta - 2 > 0. \end{cases}$$

よって (2.2) も満たすから, 方程式系 (1.8) の正値全域解が存在する.

当然ながら次のような疑問がある：Theorem 1 の条件 (2.1),(2.2) を満たす (λ, μ) が存在しないとき, (1.1) の正値全域解は存在しない？.

この問題に関して, 次の方程式系を考える:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \Delta u = p(|x|)v^{\alpha} = \dfrac{1}{(1+|x|)^{2\alpha+2}(\log(e+|x|))^{\alpha+2}}, \\ \Delta v = q(|x|)u^{\beta} = u^{\beta}, \end{cases} \qquad x \in \boldsymbol{R}^N.$$

まず, 条件 (2.1) を満たす (λ, μ) として, $\lambda = 2\alpha + 1, \mu = -1-\varepsilon$, を取る, ここで $\varepsilon > 0$ は定数. この λ, μ が (2.2) を満たすかどうか調べる:

$$\begin{cases} \lambda - 1 + \alpha(\mu - 1) = 2\alpha + 1 - 1 + \alpha(-1-\varepsilon-1) = -\alpha\varepsilon < 0, \\ \mu - 1 + \beta(\lambda - 1) = -1 - \varepsilon - 1 + \beta(2\alpha + 1 - 1) = 2\alpha\beta - 2 - \varepsilon. \end{cases}$$

したがって (2.2) を満たさない. 方程式系 (2.3) では (2.1),(2.2) を同時に満たす (λ, μ) は存在しない.

この方程式系 (2.3) には正値全域解が存在しない？. 実は, 次の定理から (2.3) には正値全域解が存在することがわかる.

Theorem 2 p, q が

$$p(|x|) \le \frac{C_1}{|x|^{\lambda}(\log|x|)^{\lambda_1}}, \quad q(|x|) \le \frac{C_2}{|x|^{\mu}(\log|x|)^{\mu_1}}, \quad r \ge r_0$$

を満たすとする, ここで $r_0 > 0,\ C_1 > 0,\ C_2 > 0$ は定数. (λ, μ) は

$$\begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) \ge 0, \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) \ge 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) = 0, \end{cases}$$

を満たし, (λ_1, λ_2) は

$$\begin{cases} \lambda_1 - 1 + \alpha(\mu_1 - 1) > 0, \\ \mu_1 - 1 + \beta(\lambda_1 - 1) > 0, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき (1.1) の球対称な正値全域解が存在する.

方程式系 (2.3) が Theorem 2 の条件を満たすことを確かめる:
p, q は

$$p(r) \le \frac{C_1}{r^{2\alpha+2}(\log r)^{\alpha+2}}, \quad q(r) \le \frac{C_2}{r^{0}(\log r)^{0}}, \quad r \ge e$$

を満たすことがわかる. $\lambda = 2\alpha + 2, \lambda_1 = \alpha + 2, \mu = \mu_1 = 0$ より

$$\begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 2\alpha + 2 - 2 + \alpha(0 - 2) = 0, \\ \mu - 2 + \beta(2\alpha + 2 - 2) = 2\alpha\beta - 2 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 1 + \alpha(\mu_1 - 1) = \alpha + 2 - 1 + \alpha(0 - 1) = 1 > 0, \\ \mu_1 - 1 + \beta(\lambda_1 - 1) = 0 - 1 + \beta(\alpha + 2 - 1) = \alpha\beta - 1 + \beta > 0. \end{cases}$$

よって Theorem 2 の条件を満たす. したがって (2.3) の正値全域解が存在する.

(1.1) の正値全域解の非存在に関しては, 次のように予想している:

Conjecture p, q が

$$p(|x|) \geq \frac{C_1}{|x|^{\lambda}(\log|x|)^{\lambda_1}}, \quad q(|x|) \geq \frac{C_2}{|x|^{\mu}(\log|x|)^{\mu_1}}, \quad r \geq r_0$$

を満たすとする, ここで $r_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ は定数. (λ, μ) は

$$\begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) = 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) \geq 0, \end{cases} \text{または} \quad \begin{cases} \lambda - 2 + \alpha(\mu - 2) \geq 0, \\ \mu - 2 + \beta(\lambda - 2) = 0, \end{cases}$$

を満たし, (λ_1, λ_2) は

$$\begin{cases} \lambda_1 - 1 + \alpha(\mu_1 - 1) \leq 0 \quad \text{または} \\ \mu_1 - 1 + \beta(\lambda_1 - 1) \leq 0, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき (1.1) の球対称な正値全域解は存在しない.

3. Outline of proof

(u, v) を (1.1) の球対称な正値全域解とすると (u, v) は次の常微分方程式系を満たす:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} r^{1-N}(r^{N-1}u'(r))' = p(r)v^{\alpha}, \quad r > 0, \quad u'(0) = 0, \\ r^{1-N}(r^{N-1}v'(r))' = q(r)v^{\beta}, \quad r > 0, \quad v'(0) = 0. \end{cases}$$

(3.1) を二回積分して, (3.1) と同値な積分方程式系

$$(3.2) \qquad \begin{cases} u(r) = a + \dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] p(s)v(s)^{\alpha} ds, \\ v(r) = b + \dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] q(s)u(s)^{\beta} ds, \end{cases}$$

を得る, ここで $a = u(0), b = v(0)$. よってこの積分方程式系 (3.2) の正値解の存在を示せばよい. (3.2) の解の存在を示すために Schauder-Tychonoff の不動点定理を使う.

Theorem 1 の証明の概略 (a, b) を

$$\begin{cases} \dfrac{(3b)^{\alpha}}{N-2}\displaystyle\int_0^1 sp(s)ds \leq a, \\ \dfrac{(3b)^{\alpha}}{N-2}\displaystyle\int_1^{\infty} s^{\lambda}p(s)ds \leq a, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(3a)^{\beta}}{N-2}\displaystyle\int_0^1 sq(s)ds \leq b, \\ \dfrac{(3a)^{\beta}}{N-2}\displaystyle\int_1^{\infty} s^{\mu}q(s)ds \leq b, \end{cases}$$

を満たすようにとる ($\alpha\beta > 1$ だから, このような (a, b) は必ずとれる). $A(r), B(r)$, 集合 X を次で定義する.

$$A(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ r^{\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}}, & r \geq 1, \end{cases} \qquad B(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ r^{\frac{\mu-1+\beta(\lambda-1)}{\alpha\beta-1}}, & r \geq 1. \end{cases}$$

$$X=\{(u,v)\in C[0,\infty)\times C[0,\infty)\ ;\ a\le u(r)\le 3aA(r), b\le v(r)\le 3bB(r),\quad r\ge 0\}.$$

写像 $\mathcal{T}:X\to C[0,\infty)\times C[0.\infty)$ を $\mathcal{T}(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$ で定義する, ここで

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \tilde{u}(r)=a+\dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]p(s)v(s)^\alpha ds,\\ \tilde{v}(r)=b+\dfrac{1}{N-2}\displaystyle\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]q(s)u(s)^\beta ds. \end{cases}$$

Schauder-Tychnoff の不動点定理を適用するため, 次を示す:

(I) $\mathcal{T}(X)\subset X$, (II) $\mathcal{T}$ は連続, (III) $\mathcal{T}(X)$ は相対コンパクト.

(I) $\mathcal{T}(X)\subset X$. $\tilde{u}(r)\ge a$, $\tilde{v}(r)\ge b$, $r\ge 0$ が成立するのは明らか. $0\le r\le 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(r)= &\ a+\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]p(s)v(s)^\alpha ds\\
\le &\ a+\frac{1}{N-2}\int_0^1 sp(s)(3bB(s))^\alpha ds\\
= &\ a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds\\
\le &\ a+a\le 3a=3aA(r).
\end{aligned}$$

$r\ge 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(r)= &\ a+\frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]p(s)v(s)^\alpha ds\\
\le &\ a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^r sp(s)B(s)^\alpha ds\\
= &\ a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_0^1 sp(s)ds+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_1^r sp(s)s^{\frac{\alpha(\mu-1)+\alpha\beta(\lambda-1)}{\alpha\beta-1}}ds\\
\le &\ a+a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_1^r s^{\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}}s^\lambda p(s)ds\\
\le &\ 2a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_1^r s^\lambda p(s)ds\, r^{\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}}\\
\le &\ 2a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_1^\infty s^\lambda p(s)ds\, r^{\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}}\\
\le &\ 2ar^{\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}}+ar^{\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}}=3aA(r).
\end{aligned}$$

よって $\tilde{u}(r)\le 3aA(r)$, $r\ge 0$, である. 同様にして $\tilde{v}(r)\le 3bB(r)$, $r\ge 0$, も示すことが出来る. よって $\mathcal{T}(X)\subset X$.

注意 $\mu-1+\beta(\lambda-1)=0$ のとき

$$\frac{\lambda-1+\alpha(\mu-1)}{\alpha\beta-1}=1-\lambda\ge 0$$

となる. $\lambda-1+\alpha(\mu-1)=0$ の場合も同様.

(II) $\mathcal{T}$ は連続, (III) $\mathcal{T}(X)$ は相対コンパクト

も容易に示すことができる. よって Schauder-Tychonoff の不動点定理から X に不動点が存在し, この不動点が求める (1.1) の正値全域解になる.

Theorem 2 の証明の概略 一般性を失うことなく $r_0=e$ としてもよい. (a,b) を

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(3b)^\alpha}{N-2}e^{\frac{\alpha(\mu-2)+\alpha\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}\displaystyle\int_0^e sp(s)ds \le a\\ \dfrac{(3b)^\alpha(\alpha\beta-1)}{(N-2)\{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)\}}\le a\end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{(3a)^\beta}{N-2}e^{\frac{\beta(\lambda-2)+\beta\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}\displaystyle\int_0^e sq(s)ds \le b\\ \dfrac{(3a)^\beta(\alpha\beta-1)}{(N-2)\{\mu_1-1+\beta(\lambda_1-1)\}}\le b\end{array}\right.$$

を満たすように取る (このような (a,b) は $\alpha\beta>1$ だから必ず取れる). $A(r)$, $B(r)$, 集合 Y を次で定義する.

$$A(r)=\left\{\begin{array}{ll}e^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}, & 0\le r\le e,\\ r^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}(\log r)^{\frac{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)}{\alpha\beta-1}}, & r\ge e,\end{array}\right.$$

$$B(r)=\left\{\begin{array}{ll}e^{\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}, & 0\le r\le e,\\ r^{\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}(\log r)^{\frac{\mu_1-1+\beta(\lambda_1-1)}{\alpha\beta-1}}, & r\ge e,\end{array}\right.$$

$$Y=\{(u,v)\in[0,\infty)\times[0,\infty); a\le u(r)\le 3aA(r), b\le v(r)\le 3bB(r),\ r\ge 0\}.$$

写像 $\mathcal{T}: Y\to C[0,\infty)\times C[0,\infty)$ を $\mathcal{T}(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$ で定義する, ここで $\tilde{u},\tilde{v}$ は (3.3) で定義したものである.

Schauder-Tychnoff の不動点定理を適用するため, 次を示す:

(I) $\mathcal{T}(Y)\subset Y$, (II) $\mathcal{T}$ は連続, (III) $\mathcal{T}(Y)$ は相対コンパクト.

(I) $\mathcal{T}(Y)\subset Y$. $\tilde{u}(r)\ge a, \tilde{v}(r)\ge b$ は明らか. $0\le r\le e$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r)\le&\ a+\frac{1}{N-2}\int_0^r sp(s)v(s)^\alpha ds\\ \le&\ a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}e^{\frac{\alpha(\mu-2)+\alpha\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}\int_0^e sp(s)ds\\ \le&\ a+a<3a\\ \le&\ 3ae^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}=3aA(r).\end{aligned}$$

$r\ge e$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r)\le&\ a+\frac{1}{N-2}\int_0^e sp(s)v(s)^\alpha ds+\frac{1}{N-2}\int_e^r sp(s)v(s)^\alpha ds\\ \le&\ a+a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_e^r s^{1-\lambda+\alpha\frac{\mu-2+\beta(\lambda-2)}{\alpha\beta-1}}(\log s)^{-\lambda_1+\alpha\frac{\mu_1-1+\beta(\lambda_1-1)}{\alpha\beta-1}}ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_e^r s^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}} s^{-1}(\log s)^{\frac{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)}{\alpha\beta-1}-1}ds \\
&\le 2a+\frac{(3b)^\alpha}{N-2}\int_1^{\log r} t^{\frac{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)}{\alpha\beta-1}-1}dt\, r^{\frac{\lambda-2+\beta(\mu-2)}{\alpha\beta-1}} \\
&= 2a+\frac{(3b)^\alpha(\alpha\beta-1)}{(N-2)\{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)\}}\left\{(\log r)^{\frac{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)}{\alpha\beta-1}}-1\right\} r^{\frac{\lambda-2+\beta(\mu-2)}{\alpha\beta-1}} \\
&\le 2a+ar^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}(\log r)^{\frac{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)}{\alpha\beta-1}} \\
&\le 3ar^{\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1}}(\log r)^{\frac{\lambda_1-1+\alpha(\mu_1-1)}{\alpha\beta-1}} = 3aA(r).
\end{aligned}
$$

同様に $\tilde{v}(r) \le 2bB(r)$ を示すことが出来る. よって $\mathcal{F}(Y) \subset Y$.

注意 $\mu-2+\beta(\lambda-2)=0$ のとき

$$
\frac{\lambda-2+\alpha(\mu-2)}{\alpha\beta-1} = 2-\lambda \ge 0
$$

となる. $\lambda-2+\alpha(\mu-2)=0$ の場合も同様.

(II) $\mathcal{T}$ は連続, (III) $\mathcal{T}(Y)$ は相対コンパクト となることも容易に示すことができる. よって Schauder-Tychonoff の不動点定理から Y に不動点が存在し, この不動点が求める (1.1) の正値全域解になる.

参考文献

[1] R. D. Benguria, S. Lorca and C. S. Yarur, Nonexistence results for solutions of semilinear elliptic equations, Duke Math. J., 74(1994), 615-634.

[2] K.-S. Cheng and J.-T. Lin, On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^\sigma$ and $\Delta u = K(x)e^{2u}$, Trans. Amer. Math. Soc., 304(1987), 639-668.

[3] N. Kawano, On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J., 14(1984), 124-158.

[4] A. V. Lair and A. W. Shaker, Existence of entire large positive solutions of semilinear elliptic systems, J. Diff. Eq, 164(2000), 380-394.

[5] J.-T. Lin and K.-S. Cheng, Examples of solution for semilinear elliptic equations, Chinese J. Math., 15(1987), 615-634.

[6] T. Teramoto, On nonnegative entire solutions of second order semilinear elliptic systems, Electron. J. Diff. Eq., 94(2003), 1-22.