数理解析研究所講究録
第 1548 巻 2007 年 1-8

プレイヤーの非同質性を考慮した多選択肢ゲームにおける一般化 Deegan-Packel 値

関西大学大学院工学研究科　桝屋　聡(Satoshi Masuya)
Graduate School of Engineering, Kansai University
関西大学　中井　暉久(Teruhisa Nakai)
Kansai University

1.　はじめに

特性関数形による協力ゲームにおけるプレイヤー間の力関係を測定する代表的な解には Shapley 値[1],Banzhaf 値[2]がある。また、最小勝利提携(Minimal Winning Coalition:以下 MWC)の概念を基に考案された Deegan-Packel 値（以下 DP 値）[3]などもある。これらの解は、各プレイヤーの選択肢は２つであるという状況のもとで、プレイヤー間の力関係を測定している。

そこで、各プレイヤーの選択肢は $n(n \geq 2)$ 個という状況に特性関数形ゲームを拡張したものが多選択肢ゲームである。多選択肢ゲームにおいてこれまでに提案されてきた解には、Shapley 値の多選択肢ゲームへの一般化である Bolger 値[4][5]、多選択肢 Banzhaf 値(Multialternative Banzhaf Value:以下 MBZ 値)[6]などがある。Bolger 値や MBZ 値では任意の選択肢数をもつゲームにおけるプレイヤーの力を測定できるが、「提携の形成確率は一定である」、つまり、「各々のプレイヤーは同質である」ということを仮定している。しかし、現実にはプレイヤーが全て同質であるとは考えにくい。

そこで本研究では、「プレイヤー同士は同質でない」ということを考慮した多選択肢ゲームにおける一般化 DP 値の考案を行い公理系からの導出を行う。そしてその解が、Masuya and Nakai[7]が考案した、多選択肢投票ゲームにおけるプレイヤーの非同質性を考慮した影響力指数の、多選択肢ゲームへの一般化になっていることを示す。最後に数値例を与え他の解との比較を行う。

2.　多選択肢ゲーム

まず、通常の特性関数形ゲームについて説明する。

プレイヤーの全体を $N = \{1,\cdots,n\}$ とする。これと、$v(\phi) = 0$ を満たす $v: 2^N \to R$ の組 (N,v) を特性関数形ゲームと呼ぶ。

続いて、Bolger[4]の方法による多選択肢ゲームの定義を行う。

プレイヤーの全体を $N = \{1,\cdots,n\}$ として、選択肢の集合を $R = \{1,\cdots,r\}$ とする。各プレイヤーは１つだけの選択肢を選んでいるとし、提携 Γ_j は選択肢 j を選んでいるプレイヤーの集合だとする。この提携を並べたもの、すなわち、$\Gamma = \{\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_r\}$ を提携分割と呼ぶ。提携分割 Γ が与えられたとき、提携 Γ_j が得ることのできる利得を $v(\Gamma_j,\Gamma)$ で定義する。ここで、$v(\phi,\Gamma) = 0$ とする。

v がすべての (Γ_j, Γ) に対して定まっているとき (N,R,v) を(n 人 r 選択肢の)多選択肢ゲーム(multialternative game)と呼ぶ。以下では、N と R は固定して考えるため、v とのみ表記する。提携と提携分割の組 (Γ_j, Γ) を embedded coalition(以下 ECL)と呼ぶ。N の固定された特性関数形ゲーム全体を G と表し、N と R の固定された多選択肢ゲーム全体を G_M と表す。また、任意の ECL (Γ_j, Γ) に対して 2 つの多選択肢ゲーム v, w の和 $v+w$ を以下のように定義する。

$$(v+w)(\Gamma_j, \Gamma) = v(\Gamma_j, \Gamma) + w(\Gamma_j, \Gamma)$$

3. Deegan-Packel 値

DP 値は、投票ゲームにおける MWC の概念を基に考案されたものである。そこで、MWC の概念の一般化を与える範囲が限定された特性関数形ゲームについて説明する[3]。
ゲーム族 D を以下のように定義する。

$$D = \{v \in G \mid T \subseteq S \ and \ T \neq \varnothing \Rightarrow \frac{v(T)}{|T|} \leq \frac{v(S)}{|S|}\} \tag{1}$$

D の要素を *cardinally monotone game* と呼ぶ。

すると、特性関数形ゲーム (N,v) における DP 値 $\rho : D \rightarrow R^n$ は次のように定義される。ここで $\bar{v} = \sum_{S \subseteq N} v(S)$ とする。

$$\rho_i(v) = \frac{v(N)}{\bar{v}} \sum_{i \in S} \frac{v(S)}{|S|} \quad i \in N \tag{2}$$

$\rho_i(v)$:ゲーム v におけるプレイヤー i の DP 値.

Deegan and Packel[3]は、(2)で定義される DP 値の公理系からの導出を行っている。また、*cardinally monotone game* の条件である $T \subseteq S \ and \ T \neq \varnothing \Rightarrow \frac{v(T)}{|T|} \leq \frac{v(S)}{|S|}$ は、MWC の概念の自然な一般化となっており、DP 値は投票ゲームのクラスで定義される Deegan-Packel 指数の特性関数形ゲームへの一般化となっている。また、[3]では DP 値は任意の $v \in D$ に対して配分となることも示されている。

4. 新しい解の概念

多選択肢ゲームにおけるプレイヤーの非同質性を考慮した一般化 DP 値(Generalized Multialternative Deegan-Packel Value:以下 GMDP 値)の考案を行う。まず、GMDP 値の special case となる MDP 値(Multialternative Deegan-Packel Value)の構築を行う。cardinally monotone game の多選択肢ゲームへの一般化となるゲームの族 D_M を以下のように定義する。

$$D_M = \{v \in G_M \mid \text{任意の2つのECL}\,(\Gamma_j^1,\Gamma^1)(\Gamma_j^1 \neq \emptyset),(\Gamma_j^2,\Gamma^2)(j=1,\cdots,r)\text{に対して},$$

$$\Gamma_j^1 \subseteq \Gamma_j^2 \Rightarrow \frac{v(\Gamma_j^1,\Gamma^1)}{|\Gamma_j^1|} \leq \frac{v(\Gamma_j^2,\Gamma^2)}{|\Gamma_j^2|}\} \tag{3}$$

D_M の要素を *multialternative cardinally monotone game (m.c.m.g.)* と呼ぶことにする。D_M に関して以下の定理が成り立つことが示された。

定理 1. $v,w \in D_M \Rightarrow v+w \in D_M$

すると、MDP 値 $\rho^j : D_M \rightarrow R^n$ $(j=1,\cdots,r)$ は次のように定義される。

$$\rho_i^j(v) = \frac{v(\tilde{\Gamma}_j,\tilde{\Gamma})}{\sum_S v(S_j,S)} \sum_{\substack{\Gamma \\ i \in \Gamma_j}} \frac{v(\Gamma_j,\Gamma)}{|\Gamma_j|} \quad i \in N \tag{4}$$

$\tilde{\Gamma} : \tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}_1,\cdots,\tilde{\Gamma}_r)$ *where* $\tilde{\Gamma}_j = N, \tilde{\Gamma}_k = \phi (k \neq j)$

$v(\tilde{\Gamma}_j,\tilde{\Gamma})$ は、全プレイヤーが第 j 選択肢を支持する提携に属している時にその提携が得る利得を表している。

続いて GMDP 値の構築を行う。提携の形成確率は、以下のような性質を持つとする。

- ECL (Γ_j,Γ) の形成確率は、プレイヤー間の非同質性に関するユークリッド距離の α 乗に反比例し、提携の要素数 $|\Gamma_j|$ の β 乗に反比例する。

以下では、この性質を数式化する。各プレイヤーを m 次元ユークリッド空間上の点で表し、$x^i = (x_1^i, x_2^i, \cdots, x_m^i)$, $i=1,\cdots,n$ とする。これらの点はプレイヤーの行動に関するデータに対して因子分析などを用いることによって求めることができる。このような空間を選好空間とも呼ぶ。ECL $(\Gamma_j,\Gamma)(\Gamma_j \neq \phi)$ が与えられたとして、プレイヤー i,k 間の距離 $d(i,k)$ を次のように定義する。

$$d(i,k) = \sqrt{\sum_{l=1}^{m} \left(x_l^i - x_l^k\right)^2}, \quad \textit{for } i,k \in \Gamma_j$$

$d(i,k) \geq 1$とする。ECL$(\Gamma_j,\Gamma)(\Gamma_j \neq \phi)$の距離$d(\Gamma_j,\Gamma)$を以下のように定義する。$h_j$は$\Gamma_j$の中でプレイヤー間のユークリッド距離を求めた回数である。表記を簡単にするため、以降では$d(\Gamma_j,\Gamma)$が参照された場合は、$\Gamma_j \neq \phi$と仮定する。

$$d(\Gamma_j,\Gamma) = \begin{cases} \sum_{\substack{i,k \in \Gamma_j \\ i<k}} \dfrac{d(i,k)}{h_j} & if\ |\Gamma_j| \geq 2 \\ 1 & if\ |\Gamma_j| = 1 \end{cases} \tag{5}$$

すると、ECL(Γ_j,Γ)の形成確率$p_j(\Gamma_j,\Gamma)$は以下のように表される。

$$p_j(\Gamma_j,\Gamma) = \frac{d(\Gamma_j,\Gamma)^{-\alpha}|\Gamma_j|^{-\beta}}{\sum_S d(S_j,S)^{-\alpha}|S_j|^{-\beta}},\quad where\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \tag{6}$$

GMDP値がDP値の一般化となるようにするためと公理系からの導出を行うために、$p'_j(\Gamma_j,\Gamma)$を以下のように定義する。

$$p'_j(\Gamma_j,\Gamma) = \frac{d(\Gamma_j,\Gamma)^{-\alpha}|\Gamma_j|^{-\beta}\cdot v(\tilde{\Gamma}_j,\tilde{\Gamma})}{\sum_S d(S_j,S)^{-\alpha}|S_j|^{-\beta}\cdot v(S_j,S)},\quad where\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \tag{7}$$

(7)式を用いてGMDP値$\rho^{g\,j}: D_M \to R^n\ (j = 1,\cdots,r)$を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\rho_i^{g\,j}(v) &= \sum_{\substack{\Gamma \\ i \in \Gamma_j}} p'_j(\Gamma_j,\Gamma) \times \frac{v(\Gamma_j,\Gamma)}{|\Gamma_j|} \\ &= \sum_{\substack{\Gamma \\ i \in \Gamma_j}} \frac{d(\Gamma_j,\Gamma)^{-\alpha}|\Gamma_j|^{-\beta}\cdot v(\tilde{\Gamma}_j,\tilde{\Gamma})}{\sum_S d(S_j,S)^{-\alpha}|S_j|^{-\beta}\cdot v(S_j,S)} \times \frac{v(\Gamma_j,\Gamma)}{|\Gamma_j|},\quad where\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0\end{aligned} \tag{8}$$

$\rho_i^{g\,j}(v)$ ：多選択肢ゲームvにおける選択肢jに対するプレイヤーiのGMDP値.

α, β ：定数（$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$）.

GMDP値は、プレイヤーの得る期待利得に比例した値とみなすことができる。αが大きくなればなるほど、プレイヤー間の考え方が似ているほど提携は形成されやすいという性質を強く考慮することになる。βが大きくなればなるほど、提携の要素数が少ないほど提携は形成されやすいという性質を強く考慮することになる。α=0 かつβ=0 のときはプレイヤーの非同質性をまったく

考慮せず GMDP 値は MDP 値に一致する。さらに m.c.m.g.の条件である、任意の 2 つの ECL

$(\Gamma_j^1,\Gamma^1)(\Gamma_j^1 \neq \emptyset),(\Gamma_j^2,\Gamma^2)(j=1,\cdots,r)$に対して, $\Gamma_j^1 \subseteq \Gamma_j^2 \Rightarrow \dfrac{v(\Gamma_j^1,\Gamma^1)}{|\Gamma_j^1|} \leq \dfrac{v(\Gamma_j^2,\Gamma^2)}{|\Gamma_j^2|}$

が多選択肢投票ゲームの MWC の概念の一般化を与えており、GMDP 値は Masuya and Nakai[7] が考案した多選択肢投票ゲームにおける一般化 Deegan-Packel 指数の多選択肢ゲームへの一般化となっている。

5．　公理系からの導出

ここでは、GMDP 値の公理系からの導出を行う。以下では、全てのゲームでプレイヤーの集合 N が固定されているという条件をはずす。また、下で定義される j *-zero player*$(j=1,\cdots,r)$ を含むゲームは、自明なゲームでない限り m.c.m.g. とならないので、下で定義される j *-zero player*$(j=1,\cdots,r)$ はゲームに参加しないものとする。

定義 1. $v \in G_M$ とする。$i \in T_j$ となるような任意の ECL (T_j,T) が与えられたとき常に $v(T_j,T)=0$ ならば、i を j *-zero player* と呼ぶ。

定義 2.　ゲームの和 $(N_1,R,v_1)+(N_2,R,v_2)=(N_1 \cup N_2,R,v_1+v_2)$ を次のように定義する。表記を簡単にするため、以下では単に v_1+v_2 と表記する。

$$\begin{aligned}&(v_1+v_2)(\Gamma_j,\Gamma)=v_1(\Gamma_j^1,\Gamma^1)+v_2(\Gamma_j^2,\Gamma^2)\\ &\textit{where } (\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_r)=(\Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2,\Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2,\cdots,\Gamma_r^1 \cup \Gamma_r^2)\end{aligned}$$

定義 3. ゲーム $(N,v^{(N;j)})$ $(j=1,\cdots,r)$ を以下のように定義する。

$$v^{(N;j)}(\Gamma_j,\Gamma)=\begin{cases}1 & \textit{if } \Gamma_j=N\\ 0 & \textit{otherwise}\end{cases}$$

定義 4.　$v \in D_M$ とし、2 人のプレイヤー $i,k \in N$ をとる。選択肢 $j \in R$ と ECL$(\Gamma_j,\Gamma)(\Gamma_j \neq \phi)$ に対して、i を k , k を i とおいて得られる ECL を (Γ'_j,Γ') とする。任意の (Γ_j,Γ) に対して、$v(\Gamma_j,\Gamma)=v(\Gamma'_j,\Gamma')$ *and* $d(\Gamma_j,\Gamma)=d(\Gamma'_j,\Gamma')$ が成り立つならば、i と k はゲーム v と選好空間において選択肢 j に対して対称であるという。

定義 5.　$(N,R,v)\in D_M$ としたとき、$(N_{k,l},v^{k,l})\in D_M$ $(k=1,\cdots,m_l;l=1,\cdots,2^n)$ を次のように定義する。

$$v^{k,l}=v(\Gamma_j^{k,l},\Gamma^{k,l})v^{(N_{k,l};j)}\quad where\ \Gamma_j^{k,l}=N_{k,l}$$

k は選択肢 j を支持する提携を固定したときの提携分割の組み合わせを意味する。l は N の部分集合の組み合わせを意味する。m_l は $N_{k,l}$ を第 j 要素にもつ提携分割の個数を意味する。$(N_{k,l},v^{k,l})$ を (N,v) の *divided game* と呼ぶ。

次に、GMDP 値の公理系について説明する。$\pi^j(v)=\{\pi_1^j(v),\cdots,\pi_n^j(v)\}$ $(j=1,\cdots,r)$ を任意の $v\in D_M$ に対する n 次元実数ベクトルとする。

Axiom 1. 2 人のプレイヤー $i,k\in N$ がゲーム $v(\in D_M)$ と選好空間において選択肢 j に対して対称ならば、以下が成り立つ。

$$\pi_i^j(v)=\pi_k^j(v)$$

Axiom 2. $\sum_{i\in N}\pi_i^j(v)=v(\tilde{\Gamma}_j,\tilde{\Gamma})\quad(j=1,\cdots,r)$

Axiom 3. ゲーム $(N,R,v)\in D_M$ とその *divided game* $(N_{k,l},R,v^{k,l})\in D_M$

$(k=1,\cdots,m_l;l=1,\cdots,2^n)$ について以下が成り立つ。

$$\frac{\sum_S d(S_j,S)^{-\alpha}\left|S_j\right|^{-\beta}\cdot v(S_j,S)}{v(\tilde{\Gamma}_j,\tilde{\Gamma})}\times\pi^j(v)=\sum_{l=1}^{2^n}\sum_{k=1}^{m_l}\frac{d(\tilde{\Gamma}_j^{k,l},\tilde{\Gamma}^{k,l})^{-\alpha}\left|\tilde{\Gamma}_j^{k,l}\right|^{-\beta}\cdot v^{k,l}(\tilde{\Gamma}_j^{k,l},\tilde{\Gamma}^{k,l})}{v^{k,l}(\tilde{\Gamma}_j^{k,l},\tilde{\Gamma}^{k,l})}\times\pi^j(v^{k,l})$$

$\tilde{\Gamma}^{k,l}:\tilde{\Gamma}^{k,l}=(\tilde{\Gamma}_1^{k,l},\cdots,\tilde{\Gamma}_r^{k,l})$ *where* $\tilde{\Gamma}_j^{k,l}=N_{k,l},\tilde{\Gamma}_i^{k,l}=\phi\ (i\neq j)$

定理 2. Axiom 1,2,3 を満たす写像 $\pi^j:D_M\to R^n(j=1,\cdots,r)$ は GMDP 値のみである。

6. 数値例

具体例として 3 選択肢アルバイトゲームという状況を考え GMDP 値、MDP 値、Bolger 値、MBZ 値の比較を行う。このゲーム(N,R,v)は次のように表現することができる。この例では、各プレイヤーの値は選択肢に依存しないものとする。

$N=\{A,B,C\}, R=\{1,2,3\},$

$v(\{A\},\{(A),(B),(C)\})=8, v(\{B\},\{(A),(B),(C)\})=6, v(\{C\},\{(A),(B),(C)\})=4,$

$v(\{A\},\{(A),(B,C),(\phi)\})=5, v(\{B,C\},\{(A),(B,C),(\phi)\})=18,$

$v(\{B\},\{(B),(A,C),(\phi)\})=3, v(\{A,C\},\{(B),(A,C),(\phi)\})=25,$

$v(\{C\},\{(C),(A,B),(\phi)\})=1, v(\{A,B\},\{(C),(A,B),(\phi)\})=30,$

$v(\{A,B,C\},\{(A,B,C),(\phi),(\phi)\})=50, v(T,\Gamma)=0\ \mathit{for\ each}(T,\Gamma)\ \mathit{if}\ T=\phi.$

$v\in D_M$ となる。また、A,B,C の行動に関するデータを因子分析してプレイヤーが 2 次元ユークリッド空間上に配置されたとし、A(1,2),B(0,0),C(4,0)だとする。

このゲームにおいて各値を計算すると Table1 のようになった。Table 1 では、各値の総和が 1 となるように正規化している。

Table1. 3 選択肢アルバイトゲームにおける各プレイヤーの値

Player	Value			
	GMDP	MDP	Bolger	MBZ
Player A	0.4768	0.3906	0.4166	0.4173
Player B	0.3379	0.3306	0.3266	0.3279
Player C	0.1851	0.2786	0.2566	0.2547
Total	1	1	1	1

Table1 から本研究で考案した GMDP 値と MDP 値、Bolger 値、MBZ 値を比較する。
B の値を見てみると、GMDP 値、MDP 値、Bolger 値、MBZ 値のいずれの値でも同じぐらいの値をとっている。A と C の値を見てみると、GMDP 値、MDP 値、Bolger 値、MBZ 値のいずれの値も A を C よりも高く評価しているが、その差は GMDP 値が最も高く、次いで Bolger 値、MBZ 値、そして MDP 値が最も小さい。MDP 値、Bolger 値、MBZ 値に関して、このような現象が多選択肢ゲームの特別なケースである投票ゲームにおいて起きることは知られている。そうなる理由は、Deegan-Packel 指数が Shapley-Shubik 指数や Banzhaf 指数と異なり、影響力指数の定義が MWC を基準にして考えられているからであった。その現象が投票ゲームの拡張である多選択肢ゲームにおいても起きていると考えられる(MDP 値、Bolger 値、MBZ 値はそれぞれ Deegan-Packel 指数、Shapley-Shubik 指数、Banzhaf 指数の多選択肢ゲームへの一般化)。GMDP 値が MDP 値よりも a をより高く評価し c をより低く評価しているのは、GMDP 値が選好空間におけるプレイヤーの位置を考慮しているからである。直感的にではあるが、ゲームの特性関数値

及び選考空間での各プレイヤーの位置から、MDP 値よりも GMDP 値の方がより現実を反映していると考えられる。

また、計算量の観点からの議論であるが、Bolger 値や MBZ 値は解の計算に階乗や指数関数を含んでいるが、GMDP 値や MDP 値はプレイヤーの組み合わせのみである。つまり、プレイヤーの数や選択肢の数が多くなるほど、Bolger 値や MBZ 値は GMDP 値や MDP 値に比べて解の計算が困難になる。このような観点から、GMDP 値は Bolger 値や MBZ 値に比べて優れているといえる。

7. 結論

プレイヤーの非同質性を考慮し、かつ多選択肢ゲーム上で定義され、公理系も導出された解を考案することができた。その解が、計算量の観点からも従来の解に比べて優れているということを示した。

参考文献

[1] Shapley, L. S., "A value for n-person games", in Kuhn, H. W. and A. W. Tucker eds., *Contributions to the theory of games,* Annals of Mathematics Studies No. 28, Princeton University Press, pp.307-317, 1953.

[2] Lehrer, E., "An axiomatization of the Banzhaf value", *Int. Journal of Game Theory,* Vol. 17,pp. 89-99, 1988.

[3] J. Deegan and E. W. Packel, "A new Index of Power for simple n-person games", *Int. Journal of Game Theory,* Vol. 7, pp.113-123, 1978.

[4] Bolger, E. M., "A value for games with n players and r alternatives", *Int. Journal of Game Theory,* Vol. 22, pp.319-334, 1993.

[5] Bolger E. M., "A consistent value for games with n players and r alternatives", *Int. Journal of Game Theory,* Vol 29, pp.93-99, 2000.

[6] Ono, R., "Values for multialternative games and multilinear extensions", In Holler M and Owen G eds., *Power indices and coalition formation,* Kluwer Academic Publishers, pp. 63-86, 2001.

[7] S. Masuya and T. Nakai, "A Generalized Deegan- Packel index for multialternative voting games in case of nonhomogeneous voters", *Journal of Interdisciplinary Mathematics,* Vol 8, pp.419-434, 2005.