

複数の選択肢があるときの投票力指数

大阪大学大学院基礎工学研究科

鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)

乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)

Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.

1. はじめに

提携形ゲームは、ゲームに参加する意思決定主体であるプレイヤーが何らかの提携を形成することによってより多くの利益を得ようとする状況を数学的に表現したもので、その合理的な利得の分配法に関する議論は重要である。提携形ゲームにおいて各プレイヤーの意思決定は、提携に参加するかどうか二者択一なものとして議論されている。

これに対し、選択しうる選択肢が複数存在する状況を取り扱う協力ゲームとして定式化されたのが多選択肢ゲーム (r 代替案ゲーム) である [1, 3]。[3] では国連安全保障理事会を賛成、反対、棄権の 3 代替案があるという前提の例が提示されており、[1] では輸送会社の経路選択などが例として挙げられており、いくつかの解が提案されている。

多選択肢ゲームにおいては、各プレイヤーは必ず一つの選択肢を選択するということが前提とされている。しかしながら、いずれの選択肢をも選択しないような状況が存在することがある。このようなときは、選択しないということを特別視して取り扱う必要がある。この前提に基づいて提案されたのが拡張多選択肢ゲームである [8]。拡張多選択肢ゲームにおいては、Banzhaf 型貢献度期待値 [8] などが提案されている。

本論文は、複数の選択肢がある状況を拡張多選択肢ゲームで取り扱い、新しい投票力指数として Deegan-Packel 指数を提案し、この公理系を与える。

2. 通常の投票力ゲームと投票力指数

通常の協力ゲームは、プレイヤーが参加する（協力する）または参加しない（協力しない）かのいずれかの選択をするという前提に基づいており、プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とするとき、 $v(\emptyset) = 0$ を満たす $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ で定義される。このとき、関数値 $v(S)$ は、 $S \in 2^N$ が得られる最大利益または最小費用を表す。通常の協力ゲームすべてからなる集合を \mathcal{G} と表す。 N 上の全単射は、 N の順列であるとみなされ、その集合は $\Pi(N)$ と表される。順列 $\pi \in \Pi(N)$ と $S \subseteq N$ に対して、 $\pi(S) = \{\pi(i) \mid i \in S\}$ とする。このとき、ゲーム $\pi v \in \mathcal{G}$ を任意の $S \subseteq N$ に対して $\pi v(\pi(S)) = v(S)$ で定義する。

$\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して、関数 $g: \mathcal{G}' \rightarrow \mathbb{R}^n$ は、 \mathcal{G}' 上の協力ゲームの解と考えられる。協力ゲームの主要な解には、Shapley 値 [7]、Banzhaf 値 [2] などがある。

次の性質を満たす協力ゲームは、投票ゲームと呼ばれる。

1. 任意の $S \subseteq N$ に対して $v(S) \in \{0, 1\}$
2. 任意の $S \subseteq T \subseteq N$ に対して $v(S) \leq v(T)$
3. $v(S) = 1$ ならば $v(N \setminus S) = 0$
4. $v(N) = 1$

投票ゲーム全体を \mathcal{VG} と表す. 投票ゲーム v において, $v(S) = 1$ を満たす $S \subseteq N$ は, 勝利提携と呼ばれる. 勝利提携全体を $\mathcal{W}(v)$ と表すと, 投票ゲーム v は $\mathcal{W}(v)$ によって特徴づけられることから, 投票ゲーム v に対応する $\mathcal{W}(v)$ を投票ゲームと呼ぶことがある. $S \in \mathcal{W}(v)$ で, $T \subsetneq S$ となる $T \in \mathcal{W}(v)$ が存在しない S は極小勝利提携と呼ばれ, その全体は $\mathcal{MW}(v)$ と表される. また, $\mathcal{MW}_i = \{S \in \mathcal{MW} \mid S \ni i\}$ とする. 投票ゲーム $v, w \in \mathcal{VG}$ において, 任意の $(S, T) \in \mathcal{MW}(v) \times \mathcal{MW}(w)$ に対して, すなわち $v(S) = 1$ と $w(T) = 1$ を満たす任意の $S, T \subseteq N$ に対して, $S \not\subseteq T$ と $T \not\subseteq S$ が成り立つとき, v, w は融合可能 (mergeable) であるという. また, 投票ゲーム $v, w \in \mathcal{VG}$ に対して, $v \vee w \in \mathcal{VG}$ を $v \vee w(S) = \max\{v(S), w(S)\}$ で定義する.

投票ゲーム上の解, すなわち $f: \mathcal{VG} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は, 投票力指数と呼ばれ, 投票ゲーム上の Shapley 値, Banzhaf 値, 正規化 Banzhaf 値は, それぞれ Shapley-Shubik 指数, Banzhaf 指数, 正規化 Banzhaf 指数と呼ばれる. また, 主に投票ゲームで定義される重要な投票力指数として, Deegan-Packel 指数がある. いずれも, 投票状況での意思決定者の影響力分析に有効であることが知られている.

Deegan-Packel 指数は,

1. 極小勝利提携に属しているときに各投票者は影響力を持つ.
2. 各極小勝利提携において, それに属する投票者はすべて同じ影響力を持つ.
3. 各極小勝利提携はすべて同じ確率で生じる.

の前提に基づいて, 次のように定義される.

定義 1 [5] 次で定義される投票力指数 $\gamma: \mathcal{VG} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は, Deegan-Packel 指数と呼ばれる.

$$\gamma_i(v) = \frac{1}{|\mathcal{MW}(v)|} \sum_{S \in \mathcal{MW}_i(v)} \frac{1}{|S|}$$

Deegan-Packel 指数は, 次のような公理系によって特徴づけられている [5]. 投票力指数 $f: \mathcal{VG} \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して, 次の公理を定義する.

公理 C1 任意の $v \in \mathcal{VG}$ に対して, $f_i(v) = 0 \iff \mathcal{MW}_i(v) = \emptyset$ が成り立つ.

公理 C2 任意の $v \in \mathcal{VG}$ と任意の $i \in N$ と任意の順列 $\pi \in \Pi(N)$ に対して, $f_{\pi(i)}(\pi v) = f_i(v)$ が成り立つ.

公理 C3 任意の $v \in \mathcal{VG}$ に対して, $\sum_{i \in N} f_i(v) = 1$ が成り立つ.

公理 C4 v, w が融合可能であるとき, 任意の $v, w \in \mathcal{VG}$ に対して次が成り立つ.

$$f(v \vee w) = \frac{|\mathcal{MW}(v)|}{|\mathcal{MW}(v \vee w)|} f(v) + \frac{|\mathcal{MW}(w)|}{|\mathcal{MW}(v \vee w)|} f(w)$$

定理 1 [5] 公理 C1 – C4 を満たす投票力指数は唯一存在して, Deegan-Packel 指数である.

3. 多選択肢ゲーム

プレイヤーが複数の選択肢の中から一つを選択するような状況は数多く存在する。このような状況を取り扱うため、Bolger [3] は、多選択肢ゲーム (multialternative games, games with r alternatives) を定義した。プレイヤーが選択できる選択肢の集合を $R = \{1, 2, \dots, r\}$ としたとき、プレイヤーがどの選択肢を選んでいるかを表すものとして、次のアレンジメントが提案された。

定義 2 [3, 4] 次を満たす $Y = (Y_k)_{k \in R}$ を N に対する多選択肢間のアレンジメント、あるいは単にアレンジメントとよぶ。

1. $\cup_{k \in R} Y_k = N$,
2. $Y_k \cap Y_l = \emptyset, \forall k \neq l$

アレンジメント全体の集合を R^N と表す。

アレンジメントは、各プレイヤーが選択肢を一つ選択している状況を表している。

定義 3 [3, 4] 次式を満たす関数 $m' : R^N \rightarrow \mathbb{R}^r$ を多選択肢ゲームという。

$$\begin{aligned} m'(Y) &= (m'_1(Y), \dots, m'_r(Y)) \\ m'_k(Y) &= 0 \quad \forall k \in R, Y_k = \emptyset \end{aligned}$$

$m'_k(Y)$ は、各プレイヤーが部分アレンジメント Y に従って選択肢を選ぶときに提携 Y_k が得られる利益 (または費用) を表す。

$r = 1$ のときの多選択肢ゲームは、通常の協力ゲームとは一致しない。 $r = 2$ のときの多選択肢ゲームにおいて、選択肢 1 を選択することを協力する、選択肢 2 を選択することを協力しないとみなすと、値域の第一成分 m'_1 のみに着目すれば、通常の協力ゲームと一致する。

多選択肢ゲームにおいては、Bolger [3, 4] によっていくつかの解が提案されている。また、多選択肢ゲームに対する Deegan-Packel 指数 [6] も提案されている。

4. 拡張多選択肢ゲーム

多選択肢ゲームでは、各プレイヤーは 1 つの選択肢を必ず選択するものという前提に基づいており、次のようなプレイヤー集合の分割が基礎となっている。これに対し、いずれの選択肢も選択していないプレイヤーがいる状況を考えると次のようなプレイヤー集合の族が考えられる。

定義 4 [8] 次を満たす $Y = (Y_k)_{k \in R}$ を N に対する多選択肢間の部分アレンジメント、あるいは単に部分アレンジメントとよぶ。

1. $Y_k \subseteq N, \forall k \in R$
2. $Y_k \cap Y_l = \emptyset, \forall k \neq l$

部分アレンジメント全体の集合を $(R \cup \{0\})^N$ と表す。

$Y_0 = N \setminus \cup_{l \in R} Y_l$, $R_0^N = (R \cup \{0\})^N \setminus \{(\emptyset, \dots, \emptyset)\}$ とする. また, 部分アレンジメント $S = (S_k)_{k \in R} \in (R \cup \{0\})^N$ とその $l \in R$ 番目の要素の組 (S_l, S) を埋め込み提携と呼び, その全体を \mathcal{EC} と表す.

$k \in R$ と $S \subseteq N$ に対して, $S^k = (S_l^k)_{l \in R} \in (R \cup \{0\})^N$ を次で定義する.

$$S_l^k = \begin{cases} S & \text{if } k = l \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

任意の $k \in R$ に対して $S_k \subseteq T_k$ が成り立つとき, $S \subseteq T$ と表す.

部分アレンジメントに基づき, 拡張多選択肢ゲームを次のように定義する.

定義 5 [8] 次式を満たす関数 $m : (R \cup \{0\})^N \rightarrow \mathbb{R}^r$ を拡張多選択肢ゲームという.

$$\begin{aligned} m(Y) &= (m_1(Y), \dots, m_r(Y)) \\ m_k(\emptyset, \dots, \emptyset) &= 0 \quad \forall k \in R \end{aligned}$$

$m_k(Y)$ は, 各プレイヤーが部分アレンジメント Y に従って選択肢を選択するときに提携 Y_k が得られる利益 (または費用) を表す. $r = 1$ のとき, 拡張多選択肢ゲームは通常の協力ゲームと一致しており, 協力ゲームの自然な拡張であると考えられる.

5. 拡張多選択肢投票ゲームと投票力指数

複数の選択肢のもとで, いずれの選択肢も選択しないということを特別視して扱うときの投票ゲームを次のように定義する.

定義 6 次を満たす拡張多選択肢ゲーム $m : (R \cup \{0\})^N \rightarrow \{0, 1\}^r$ を拡張多選択肢投票ゲームと呼ぶ.

1. $m_k(S) \in \{0, 1\}, \forall k \in R, \forall S \in (R \cup \{0\})^N$
2. $m_k(S) \leq m_k(S'), \forall S \subseteq S'$
3. $m_l(S) = 0, \forall l \in R, l \neq k, \text{ if } m_k(S) = 1$
4. $m_k(N^k) = 1$

$r = 1$ のとき, 通常の投票ゲームと一致する. 拡張多選択肢投票ゲーム全体を MVG と表す.

$m_l(S) = 1$ のとき, $(S_l, S) \in \mathcal{EC}$ を勝利提携であるといい, $\mathcal{W}(m) = \{(S_l, S) \in \mathcal{EC} \mid m_l(S) = 1\}$ とする. 任意の $T \subseteq S$ に対して $(T_l, T) \notin \mathcal{W}(m)$ が成り立つとき, $S \in \mathcal{W}(m)$ を極小勝利提携と呼び, $\mathcal{MW}(m) = \{(S_l, S) \in \mathcal{W}(m) \mid (T_l, T) \notin \mathcal{W}(m), \forall T \subseteq S\}$ とし, $\mathcal{MW}_i(m) = \{(S_l, S) \in \mathcal{MW}(m) \mid S_l \ni i\}$ とする.

$m \vee m' \in MVG$ を任意の $k \in R$ と $S \in (R \cup \{0\})^N$ に対して $(m \vee m')_k(S) = \max\{m_k(S), m'_k(S)\}$ で定義する.

$MVG' \subseteq MVG$ に対して, 関数 $f : MVG' \rightarrow \mathbb{R}^n$ を MVG' 上の投票力指数と呼ぶ.

複数の選択肢のもとでの投票力指数として, Deegan-Packel 指数を導入するために, 通常の協力ゲームの Deegan-Packel 指数の前提と同様に, 次の前提を考える.

1. 極小勝利提携に属しているときに各投票者は影響力をもつ。
2. 各極小勝利提携においてそ、それに属する投票者はすべて同じ影響力をもつ。
3. 各極小勝利提携はすべて同じ確率で生じる。

このとき、複数の選択肢のもとでの Deegan-Packel 指数は次のように定義される。

定義 7 $\delta: \mathcal{VG} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を複数選択肢のもとでの Deegan-Packel 指数とよぶ。

$$\delta_i(m) = \frac{1}{|\mathcal{MW}(m)|} \sum_{(S_i, S) \in \mathcal{MW}_i(m)} \frac{1}{|S_i|}$$

$r = 1$ のとき、明らかに通常の協力ゲームにおける Deegan-Packel 指数と一致する。Deegan-Packel 指数の合理性を示すため、次の公理を導入する。

公理 M1 任意の $m \in \mathcal{MVG}$ に対して $\eta_i(m) = 0 \iff \mathcal{MW}_i(m) = \emptyset$ が成り立つ。

公理 M2 任意の $m \in \mathcal{MVG}$ と $i \in N$ と任意の順列 $\pi \in \Pi(N)$ に対して、 $\eta_{\pi(i)}(\pi m) = \eta_i(m)$ が成り立つ。

公理 M3 任意の $m \in \mathcal{MVG}$ に対して $\sum_{i \in N} \eta_i(m) = 1$ が成り立つ。

公理 M4 $\mathcal{MW}(m) \cap \mathcal{MW}(m') = \emptyset$ のとき、任意の $m, m' \in \mathcal{MVG}$ に対して次が成り立つ。

$$\eta(m \vee m') = \frac{|\mathcal{MW}(m)|}{|\mathcal{MW}(m \vee m')|} \eta(m) + \frac{|\mathcal{MW}(m')|}{|\mathcal{MW}(m \vee m')|} \eta(m')$$

定理 2 公理 M1-M4 を満たす投票力指数 $\eta: \mathcal{VG} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は唯一存在して、Deegan-Packel 指数である。

最後に、数値例を与える。

例 1 $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{1, 2\}$, $\mathcal{MW}(m) = \{(\{1, 2\}, (\{1, 2\}, \{3\})), (\{2, 3, 4\}, (\{1\}, \{2, 3, 4\}))\}$ であるとき、Deegan-Packel 指数 δ は、次のように得られる。

$$\delta(m) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

6. おわりに

本論文では、複数の選択肢のもとでの意思決定を複数の選択肢がある状況を拡張多選択ゲームで取り扱い、各意思決定者の影響力を測るための新しい投票力指数として Deegan-Packel 指数を提案し、この公理系を与えた。

謝辞

この研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金若手 (B) No. 16710113 の助成を受けています。

参考文献

- [1] M. J. Albizuri, J. C. Santos and J. M. Zarzuelo, Solutions for cooperative games with r alternatives, *Review of Economic Design*, Vol. 4, pp. 345-356 (1999)
- [2] J.F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, Vol. 19, pp. 317-343 (1965)
- [3] E. Bolger, A value for games with n players and r alternatives, *Int. J. of Game Theory*, Vol. 22, No. 1, pp. 319-334 (1993)
- [4] E.M. Bolger, A consistent value for games with n players and r alternatives, *Int. J. of Game Theory*, Vol. 29, pp. 93-99 (2000)
- [5] J. Deegan and E.W. Packel, A new index of power for simple n -person games, *Int. J. of Game Theory*, Vol. 7, pp. 113-123 (1978)
- [6] 中井暉久, A new power index and its axioms systems for a voting game with multialternatives, 京都大学数理解析研究所「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会報告集 No. 1252, pp.185-196 (2002)
- [7] L. S. Shapley: A Value for n -person games, *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, pp. 307-317 (1953)
- [8] M. Tsurumi, M. Inuiguchi, T. Tanino, A solution for fuzzy generalized multialternative games, The 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006) Conference Proceedings, pp. 95-98 (2006)