数理解析研究所講究録
第1548巻 2007年 31-36

出現個数がランダムな場合のodds-theorem

玉置光司 (Mitsushi Tamaki)　王 琦 (Qi Wang)
愛知大学経営学部　　経営研究科 M2
Department of Business Administration, Aichi University

1 はじめに

Bruss(2000) は無情報最良選択問題 (no information best choice problem) の一般化として次のような問題を考えた。毎時1つずつ対象が出現し、その総数 N は既知である。対象は出現時にレコード (record) か否かが判明し、最後のレコードで停止するという問題である。厳密には次のように記述される。時刻 j の対象がレコードのとき、1の値を取り、そうでないとき、0の値を取る確率変数 I_j を導入する。$I_1, I_2, \cdots, I_N$ が独立で、$\alpha_j = P\{I_j = 1\}, 1 \le j \le N$ が与えられている。意思決定者は毎時 I_j の値を観測し、最後のレコードで停止する確率を最大にする停止時刻 σ^*, すなわち、

$$\sup_{1 \le \sigma \le N} P\{I_\sigma = 1; I_{\sigma+1} + \cdots + I_N = 0\} = P\{I_{\sigma^*} = 1; I_{\sigma^*+1} + \cdots + I_N = 0\}$$

を満足する σ^* を求めたい。$\alpha_j = 1/j$ とすると、この問題は無情報最良選択問題となる。Bruss(2000) はこの問題の解を odds-theorem と呼んでいる。

本稿では、Bruss の問題を出現個数 N が未知な場合に拡張する。N を有界確率変数とし、その確率分布 $p_k = P\{N = k\}, 1 \le k \le n, (p_n > 0)$ が与えられているものとする。また、N と $I_1, I_2, \cdots, I_N$ との独立性も仮定する。無情報最良選択問題のこのような拡張は既に Petruccelli(1983) によってなされているが、同様な拡張が Bruss の問題に対しても成立することを示す。ランダムな出現個数を持つ無情報最良選択問題の研究は Petruccelli(1983) 以外にも Presman and Sonin(1972),Rasmussen and Robbins(1975) による研究がある。

2 モデルと定式化

最後のレコードで停止することを簡単に"勝ち"と呼ぼう。したがって、意思決定者の目的は勝つ確率の最大化である。毎時停止か継続かを決めなければならないが、停止の決定を選ぶのは、レコードが出現した場合のみである。時刻 j で $I_j = 1$ を観測した状態を簡単に状態 j と呼び、次の値を定義する。

$S(j)$: 状態 j で停止して勝つ確率
$C(j)$: 状態 j のレコードを流し、それ以降最適に継続して勝つ確率

したがって、

$$V(j) = \max\Big\{S(j), C(j)\Big\}, \qquad 1 \le j \le n$$

は状態 j で最適に振舞って勝つ確率を表している。再帰関係式を導くために次の記号を準備する。

$$\beta_j = P\{I_j = 0\} = 1 - \alpha_j$$
$$\pi_j = P\{j \leq N \leq n\} = \sum_{i=j}^{n} p_i$$
$$B_{j,k} = P\{I_{j+1} = 0, \cdots, I_k = 0\} = \prod_{i=j+1}^{k} \beta_i$$

このとき、$S(j), C(j)$ が次のように表されるのは明らかである。

$$S(j) = \sum_{k=j}^{n} B_{j,k} \frac{p_k}{\pi_j}$$
$$C(j) = \sum_{k=j+1}^{n} B_{j,k-1} \alpha_k \frac{\pi_k}{\pi_j} V(k)$$

扱いやすくするために、次のように変換する。

$$s(j) = B_{1,j}\pi_j S(j)$$
$$c(j) = B_{1,j}\pi_j C(j)$$
$$v(j) = B_{1,j}\pi_j V(j)$$

このとき、次の関係が成立する。ただし、$r_j = \alpha_j/\beta_j$ である。

$$s(j) = \sum_{i=j}^{n} B_{1,i} p_i, \qquad 1 \leq j \leq n \tag{1}$$
$$c(j) = \sum_{i=j+1}^{n} r_i v_i, \qquad 1 \leq j \leq n-1 \tag{2}$$
$$v(j) = \max\{s(j), c(j)\} \tag{3}$$

(1),(2) より直ちに次の再帰関係式を得る。

補題 1 $s(j), c(j)$ は次の再帰関係を満足する。

(i) $s(j) = B_{1,j}p_j + s(j+1)$
(ii) $c(j) = c(j+1) + r_{j+1}v(j+1)$

今、$t(n) = \max\{l \geq 1 : \sum_{j=l}^{n} r_j > 1\}$ と定義すると、Bruss の odds-theorem によれば、$P\{N = n\} = 1$ のとき、最初の $t(n) - 1$ 個の対象を流し (停止しないで、次の対象を観測する)、$t(n)$ 以降の最初のレコードで停止するのが最適停止ルールとなる。このルールのように、ある時点以降の最初のレコードの出現で停止するルールを閾値ルールと呼ぶ。またその限界点を閾値と呼ぶ。したがって、Bruss の odds-theorem は、出現個数 n が既知の場合、閾値 $t(n)$ の閾値ルールが最適停止ルールとなることを述べている。N が未知の場合、最適停止ルールは分布 $\{p_j\}_{j=1}^{n}$ に依存し、一般には閾値ルールとならない([2],[3] 参照)。

以降、煩雑さを避けるため、$0 < \alpha_j < 1,\ 1 \leq j \leq n$ で $1 \leq t(n) \leq n$ となる場合に限定して議論する (その他の場合も、同様な議論が可能)。

補題 2

既知の n に対して、$P\{N \le n\} = 1$ で $p_n > 0$ のとき、もし最初の $t(n) - 1$ 個の対象で停止しなかったならば、最適停止ルールは時刻 $t(n)$ 以降の最初のレコードで停止する。

証明

$$s(j) > c(j), \qquad t(n) \le j \le n \tag{4}$$

を示せばよい。$s(n) = B_{1,n}p_n > 0 = c(n)$ であるから、$j = n$ では (4) が成立している。したがって $k \ge t(n)$ のとき、

$$s(j) > c(j), \qquad k+1 \le j \le n$$

の成立を仮定し、そのとき $s(k) > c(k)$ となることを示せば十分である。(2) と仮定より

$$c(k) = \sum_{j=k+1}^{n} r_j s(j) \tag{5}$$

故に (1) より

$$\begin{aligned} s(k) - c(k) &= \sum_{i=k}^{n} B_{1,i}p_i - \sum_{j=k+1}^{n} r_j\Big(\sum_{i=j}^{n} B_{1,i}p_i\Big) \\ &= B_{1,k}p_k + \sum_{i=k+1}^{n} B_{1,i}p_i\Big(1 - \sum_{j=k+1}^{i} r_j\Big) \end{aligned}$$

となり、$t(n)$ の定義より、右辺は正となり、証明が終了する。

次に最適停止ルールが閾値ルールとなる条件を調べよう。G_k を

$$G_k = p_k - \alpha_{k+1}\Big(\sum_{i=k+1}^{n} B_{k+1,i}p_i\Big), \qquad 1 \le k < n$$

と定義する。このとき、次の結果が成立する。

定理 1

最適停止ルールが閾値ルールとなるための 1 つの十分条件は

$$G_k > 0 \Rightarrow G_j > 0, \qquad k < j \le t(n) - 1$$

で与えられる。

証明

補題 1 より、次の表現を得る。

$$s(k) - c(k) = \{s(k+1) - c(k+1)\} + \{B_{1,k}p_k - r_{k+1}v(k+1)\} \tag{6}$$

はじめに、次のことを示そう。

状態 $k+1$ で停止することが最適であり、同時に $G_k > 0$ が成立すれば、状態 k でも停止するのが最適となる。 (7)

状態 $k+1$ で停止するのが最適という仮定から (6) の右辺の最初の波カッコは正となる。また、仮定の下では $v(k+1) = s(k+1)$ であるので、このとき、2 つ目の波カッコが正であることを示せばよい。

$$\begin{aligned}
B_{1,k}p_k - r_{k+1}s(k+1) &= B_{1,k}\Big(p_k - r_{k+1}\frac{\sum_{j=k+1}^{n} B_{1,j}p_j}{B_{1,k}}\Big) \\
&= B_{1,k}\Big(p_k - r_{r+1}\frac{B_{1,k+1}\sum_{j=k+1}^{n} B_{k+1,j}p_j}{B_{1,k}}\Big) \\
&= B_{1,k}G_k
\end{aligned}$$

これより、$G_k > 0$ であれば上式は正となり、(7) が示される。

補題 2 より、$s(j) > c(j), j \geq t(n)$ であるから、$k \leq t(n) - 1$ に対して、$s(j) > c(j),\ k \leq j \leq n$ となることを示すには $G_j > 0,\ k \leq j \leq t(n) - 1$ を示せば十分である。今、

$$\xi = \max\{1 \leq k \leq n : G_k \leq 0\}$$

と定義すると、定理 1 の前提より

$$G_j \leq 0, \qquad\qquad 1 \leq j \leq \xi$$

である。(6) 式右辺の 2 つ目の波カッコを次のように変形する。

$$\begin{aligned}
B_{1,k}p_k - r_{k+1}v(k+1) &= B_{1,k}p_k - r_{k+1}[s(k+1) + \max\{0, c(k+1) - s(k+1)\}] \\
&= B_{1,k}p_k - r_{k+1}s(k+1) + r_{k+1}\min\{0, s(k+1) - c(k+1)\} \\
&= B_{1,k}G_k + r_{k+1}\min\{0, s(k+1) - c(k+1)\} \qquad (8)
\end{aligned}$$

今、$u(k) = s(k) - c(k)$ とおくと、(6), (8) より

$$u(k) = u(k+1) + B_{1,k}G_k + r_{k+1}\min\{0, u(k+1)\}$$

と書ける。これは以下のことを示している。

$$u(k)\begin{cases} \leq u(k+1), & 1 \leq k \leq \min\{\xi, t(n) - 1\} \\ > u(k+1), & \min\{\xi, t(n) - 1\} < k \leq t(n) - 1 \end{cases}$$

すなわち、これは $u(k+1) < 0$ であれば、$u(j) < 0, j \leq k$ となることを意味していて、最適停止ルールが閾値ルールとなることを示している。

OLA(one stage look-ahead) 停止ルールを考えよう。これは、レコードが出現しているとき、今直ちに停止することが、このレコードを流して、次のレコードで停止するよりもベターである状態集合 (これを B で表す) にプロセスが入ったら、直ちに停止するルールである。今、状態 j にあるとする。直ちに停止して勝つ確率は明らかに $s(j)$ であり、以降最初のレコードで停止して勝つ確率 (これを $\tilde{c}(j)$ で表す) は、(2) より

$$\tilde{c}(j) = \sum_{i=j+1}^{n} r_i s(i)$$

で与えられる。したがって、

$$\begin{aligned} B &= \{j : s(j) \le \tilde{c}(j)\} \\ &= \{j : \sum_{k=j}^{n} B_{j,k} G_k \ge 0\} \end{aligned}$$

と表される。今、

$$k(n) = \max\{j : \sum_{k=j}^{n} B_{j,k} G_k < 0\}$$

と定義すると、明らかに $s(j) > c(j), j \ge k(n)+1$ であり (j の帰納法で示される)、また、$s(k(n)) < c(k(n))$ である。したがって、

$$s(j) < c(j), \qquad 1 \le j < k(n) \tag{9}$$

が成り立てば、最適停止ルールが閾値 $k(n)+1$ の閾値ルールとなる。次の定理はこのための必要十分条件を与える。

定理 2

最適停止ルールが閾値ルールとなる必要十分条件は

$$B_{j,k(n)} s(j) < \tilde{c}(k(n)), \qquad 1 \le j \le k(n) \tag{10}$$

で与えられる。このとき、閾値は $k(n)+1$ である。

証明

(9) の成立を j に関する帰納法で示す。すなわち、

$$c(i) > s(i), \qquad j+1 \le i < k(n)$$

を仮定して、$c(j) > s(j)$ を示す。帰納法の仮定と (2) の繰り返しにより

$$\begin{aligned} c(j) &= c(j+1)(1+r_{j+1}) \\ &= c(j+2)(1+r_{j+1})(1+r_{j+2}) \\ &\vdots \\ &= c(k(n)) \prod_{i=j+1}^{k(n)} (1+r_i) \\ &= \tilde{c}(k(n)) \prod_{i=j+1}^{k(n)} (1+r_i) \\ &= \frac{\tilde{c}(k(n))}{B_{j,k(n)}} \end{aligned}$$

が導かれる。最後から 2 つ目の等式は、時刻 $k(n)+1$ 以降の最適決定が停止ということから得られる。故に、$c(j) > s(j)$ が成立するのは

$$\frac{\tilde{c}(k(n))}{B_{j,k(n)}} > s(j)$$

すなわち、(10) の成立と同値である。

3 一様分布の場合

N が一様分布の場合を考察する。このとき、$p_k = 1/n, 1 \leq k \leq n$ であり、G_kは以下の式となる。

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{n}[1 - \alpha_{k+1} \sum_{i=k+1}^{n} B_{k+1,i}] \\ &= \frac{1}{n}(1 - D_{k+1}) \end{aligned}$$

ただし、

$$D_k = \alpha_k \sum_{i=k}^{n} B_{k,i}$$

と定義する。D_kが k の減少関数であるならば、G_kは k の増加関数となり、G_kは定理 1 の条件を満たす。

$$D_k - D_{k+1} = \alpha_k + \Big(\alpha_k\big(1 - \alpha_{k+1}\big) - \alpha_{k+1}\Big) \sum_{i=k+1}^{n} B_{k+1,i}$$

と書けるから、D_kが減少関数となる一つの条件は、$\alpha_k\big(1 - \alpha_{k+1}\big) - \alpha_{k+1} \geq 0$ である。即ち

$$\frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k} \geq \alpha_{k+1}.$$

この条件を満たす場合、最適停止ルールは閾値ルールとなる。

参考文献

[1] Bruss,F.T.(2000), Sum the Odds to one and stop, *Ann.Prob.* **28**,1384-1391

[2] Irle,A.(1980), On the best choice problem with random population size, *Z.Operat.Res.* **24**,177-190

[3] Petruccelli,J.D.(1983), On the best-choice problem when the number of observation, *J.Appl.Prob.* **20**,165-171

[4] Presman,E.L,and Sonin,I.M.(1972), The best choice problem for a random number of objects, *Th.Prob.Appl.* **4**,657-668

[5] Rasmussen,W.T.and Robbins,H.(1975), The candidate problem with unknown population size, *J.Appl.Prob.***12**,692-701