数理解析研究所講究録
第1548巻2007年37-44

アメリカ型連続インストールメント・オプションの価格評価
(Valuing American Continuous-Installment Options)

北海道大学・経済学研究科　木村 俊一 (Toshikazu Kimura)
Graduate School of Economics and Business Administration
Hokkaido University
北海道大学・経済学研究科　菊地 一哲 (Kazuaki Kikuchi)
Graduate School of Economics and Business Administration
Hokkaido University

1 はじめに

インストールメント・オプション (installment option) とは, 購入時に一括でそのプレミアムを支払うのではなく, 少額の初期プレミアムを支払ってから, オプション契約を維持するために必要な一定額を分割で支払い続けるという経路依存型オプションである. 分割払い方法には, 規定されている支払日で離散的に行う方法と, ある単位時間当たり一定の率に従って連続的に行う方法の2つがある. 前者の方法に基づくものを離散インストールメント・オプション (discrete-installment option), 後者を連続インストールメント・オプション (continuous-installment option) と呼ぶ. オプション保有者は, あらかじめ定められた支払日に分割払いを続けるのか, あるいは支払いを止めてオプション契約を解約するのかを選択することができる. ここで, 解約時点のペイオフはゼロである. 満期時点のペイオフは, バニラ・オプションと同じであるが, 満期まで分割払いを行ってはじめて, そのペイオフを享受できる点が異なる. インストールメント・オプションは架空の金融オプションではなく, 実際, 現実の市場で活発に取引されている. 代表例として, オーストラリア証券取引所 (ASX) に上場されているオーストラリア株の上に書かれたインストールメント・ワラントがある. 詳細については, Ben-Amer *et al.* [2] を参照のこと.

インストールメント・オプションの既存研究について以下に述べる. 取引機会が多い離散インストールメント・オプションの研究は実務上重要であり, さらに, リアル・オプションへの応用研究も行われてきた. Davis *et al.* [4] は, 複合オプション (compound option) と正味現在価値 (NPV) の概念を用いて, ヨーロッパ型離散インストール・オプション価格が満たすべき上・下限値を導出し, オプションの動的・静的ヘッジについて研究している. また, 離散的な支払い間隔を狭くしていったときに, その極限として, ある単位時間当たり一定の率で連続的に分割払いを行う連続インストールメント・オプションを考えることができることを示した. 連続インストールメント・オプションの研究は比較的少ない. オプション保有者が任意時点で支払いを止めて契約を解約できる権利をもつため, 連続インストールメント・オプション価格は, 例えヨーロッパ型であっても, ある最適停止問題の解として与えられる. Alobaidi *et al.* [1] は, ラプラス変換アプローチにより, ヨーロッパ型連続インストールメント・オプションに対する停止境界の満期近傍における漸近的性質を示した. しかし, 特殊なラプラス変換を用いたために, オプション価格は逆変換不能で, 停止境界については漸近的性質を導出するにとどまっている. Kimura and Kikuchi [7] は, オプション価格と停止境界のラプラス・カールソン変換 (LCT) を導出し, 数値的逆変換により定量的な分析を行った.

本論文の考察対象であるアメリカ型連続インストールメント・オプション (American continuous-installment option) の価格評価問題は, 満期までの任意時点でオプション保有者が早期行使, あるいは解約できるため, 2つの停止時刻をもつ最適停止問題として定式化できる. このオプションは, 例えば, プロジェクトの維持費として一定の費用を払いながら, 最適な投資決定と撤退の最適なタイミングを模索する状況に直面するプロジェクト評価に有用であり, リアル・オプションへの応用が可能である. 早期行使, および解約行動は互いに不可逆的なものであり, 最適な意思決定タイミングを表す早期行使境界と停止境界 (以下, 早期行使境界と停止境界双方を指すときには最適停止境界と書く) は, 独立に決定することができない. この点がオプション価格評価をより困難なものにしている. Ciurlia and Roko [3] は, アメリカ型連続インストールメント・オプションの価格評価についての最初の研究であり, 初期時点に対するアメリカ型連続インストールメント・オプション価格の積分表現を求め, その表現に対して区分的指数関数法 (multi-piece exponential function method) (以下, MEF 法と呼ぶ) を適用している. そして, 有限差分法, およびモンテ・カルロ法による計算値との数値比較実験を行った. ここで, MEF 法とは, Ju [6] がアメリカ型バニラ・オプションの価格評価のために, 考案した数値解法であり, オプション価格を高精度で計算できることで知られている. しかし, MEF 法は早期行使境界を区分的な指数関数で近似するため, その境界を時間に関して描いたものは, 滑らかな曲線にはならない. Ciurlia and Roko の方法でも, 早期行使境界と停止境界を時刻に関して描いた図は同様の不連続性が現れている. これは, 実務的な観点からは, 最適な意思決定を行うことに有用であるとはいい難い. 本論文の目的は, この欠点を回避できるラプラス変換アプローチによる数値解法を用いて, アメリカ型連続インストールメント・オプションの価格評価を行うことである. さらに, 長い満期をもつオプション価格の近似解として有用な無期限オプション価格の解析解を導出する.

本論文の残りの構成は, 以下の通りである. 2節では, 本論文を通して用いる仮定や記号の定義について述べた後, 満期時点近傍における最適停止境界の漸近的な挙動を示す. そして, オプション価格評価問題を偏微分方程式 (PDE) の自由境界問題として定式化する. 3節では, PDE アプローチにより, オプション価格と最適停止境界の LCT を導出する. さらに, オプション価格の LCT にラプラス変換 (LT) に関するアーベル型定理を用いて, 無期限オプション価格の解析解を導く. 4節では, オプション価格と最適停止境界の LCT を数値的逆変換を行って計算し, その性質の定量的な分析を行う. 5節で, 結論を述べ, 今後の研究課題についてまとめる.

2 偏微分方程式アプローチによる定式化

本章を通して, 市場は完備で無裁定であると仮定する. $(W_t)_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上の標準ウィーナー過程とするとき, 原資産価格過程 $(S_t)_{t\geq 0}$ はリスク中立化された確率微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = (r-\delta)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

に従うと仮定する. ここで, $r > 0$ は安全利子率, $\delta \geq 0$ は原資産の配当率, そして, $\sigma > 0$ は原資産のボラティリティであり, それぞれ定数とする.

プットのケースも同様のため, 本論文では, コールのケースを考察する. $T > 0$ を満期とし, 定数 $q > 0$ は, オプション保有者が微小時間 $\mathrm{d}t$ の間に $q\mathrm{d}t$ 支払うような連続支払い率とする. このとき, 時刻 t におけるアメリカ型連続インストールメント・コール価格を $C(t, S_t; q)$ と定義する. さらに, 満期時点 T のペイオフ関数は

$$(S_T - K)^+$$

で与えられる．ここで，$(x)^+ = x \vee 0$ とする．

無裁定価格理論から，コール価格 $C(t, S_t; q)$ は $t \in [0, T]$ に対して，最適停止問題

$$
\begin{aligned}
C(t, S_t; q) \;=\; & \operatorname*{ess\,sup}_{\bar{\tau}, \underline{\tau} \in [t,T]} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{\bar{\tau} \wedge \underline{\tau} > T\}} e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ + \mathbf{1}_{\{\bar{\tau} < \underline{\tau} < T\}} e^{-r(\bar{\tau}-t)} (S_{\bar{\tau}} - K)^+ \\
& - \frac{q}{r} \left(1 - e^{-r((\bar{\tau} \wedge \underline{\tau} \wedge T) - t)}\right) \Big| \mathcal{F}_t \Big] \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

の解として与えられる．ここで，$\bar{\tau}, \underline{\tau}$ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に関する停止時刻であり，条件付き期待値はリスク中立確率測度 $\mathbb{P}$ の下で計算されている．また，$\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は，事象 ω に関する指標関数である．期待値の中の第 1 項は，満期時点 T に得られるペイオフの現在価値であり，第 2 項は，早期行使を行うことで得られるペイオフの現在価値を表す．そして，第 3 項は，t 時点から早期行使，解約，あるいは満期時点までにかかる分割払い総額の現在価値である．

コール価格 $C(t, S_t; q)$ には，その保有者が解約，あるいは早期行使することが最適になるような原資産価格の臨界値，すなわち，停止境界と早期行使境界が存在する．この停止境界と早期行使境界をそれぞれ，$(A_t)_{t \in [0,T]}$，$(B_t)_{t \in [0,T]}$ と定義する．

満期直前に早期行使，あるいは解約を行って，満期までに得られるキャッシュ・フローの符号を調べることで，満期近傍における早期行使境界と停止境界の漸近的性質を示すことができる．

定理 1 アメリカ型連続インストールメント・コールに対する停止境界 A_t と早期行使境界 B_t の満期時点の値は，

(i) $\delta = 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
A_T &= K, && (2.3) \\
B_T &= \begin{cases} K, & q > rK, \\ \infty, & 0 < q \leq rK \end{cases} && (2.4)
\end{aligned}
$$

(ii) $\delta > 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
A_T &= K, && (2.5) \\
B_T &= \max\left\{ \frac{rK - q}{\delta}, K \right\} && (2.6)
\end{aligned}
$$

で与えられる．

コール価格 $C \equiv C(t, S; q)$ は，非同次ブラック・ショールズ・マートン PDE (導出の詳細については，Ciulria and Roko [3] を参照)

$$
\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = q, \quad A_t < S < B_t \qquad (2.7)
$$

を満たす．ただし，終端条件

$$
C(T, S; q) = (S - K)^+
$$

と境界条件は

$$\left|\begin{array}{l}\lim_{S\downarrow A_t} C(t,S;q)=0,\\ \lim_{S\uparrow B_t} C(t,S;q)=B_t-K,\\ \lim_{S\downarrow A_t}\dfrac{\partial C}{\partial S}=0,\\ \lim_{S\uparrow B_t}\dfrac{\partial C}{\partial S}=1\end{array}\right.$$

で与えられる.

3 ラプラス変換による価格評価

満期までの残存時間 $\tau=T-t\geq 0$ に対して, 時間を逆向きにしたコール価格, 停止境界, そして早期行使境界をそれぞれ

$$\begin{cases}\widetilde{C}(\tau,S;q)=C(T-\tau,S;q),\\ \widetilde{A}_\tau=A_{T-\tau},\\ \widetilde{B}_\tau=B_{T-\tau}\end{cases}$$

とする. このとき, 実数 $\lambda>0$ に対して, それぞれの LCT を

$$\begin{cases}C^*(\lambda,S;q)=\mathcal{LC}[\widetilde{C}(\tau,S;q)]\equiv\displaystyle\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\widetilde{C}(\tau,S;q)\mathrm{d}\tau,\\ A^*(\lambda)=\mathcal{LC}[\widetilde{A}_\tau],\\ B^*(\lambda)=\mathcal{LC}[\widetilde{B}_\tau]\end{cases}$$

と定義する.

PDE (2.7) に対し, LCT を取ることで得られる常微分方程式 (ODE) を解いて, 以下の定理を得る.

定理 2 実数 $\lambda>0$ に対して, アメリカ型連続インストールメント・コール価格の LCT は,

$$C^*(\lambda,S;q)=\begin{cases}0, & 0\leq S\leq A^*,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}a_i\left(\frac{S}{K}\right)^{\theta_i}-\frac{q}{\lambda+r}, & A^*<S\leq K,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}(a_i+b_i)\left(\frac{S}{K}\right)^{\theta_i}+\frac{\lambda S}{\lambda+\delta}-\frac{\lambda K+q}{\lambda+r}, & K<S<B^*,\\ S-K, & S\geq B^*\end{cases}\tag{3.1}$$

で与えられる. ここで, 未知パラメータ $\theta_1\equiv\theta_1(\lambda)>0$, $\theta_2\equiv\theta_2(\lambda)<0$ は 2 次方程式

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\theta^2+(r-\delta-\tfrac{1}{2}\sigma^2)\theta-(\lambda+r)=0\tag{3.2}$$

の実根であり, 係数 a_i と b_i $(i=1,2)$ はそれぞれ,

$$\begin{cases}a_i=(-1)^i\dfrac{K^{\theta_i}}{\theta_i}g(A^*,B^*)(A^*)^{\theta_{3-i}},\\ b_i=(-1)^i\dfrac{K}{\theta_1-\theta_2}\dfrac{\lambda}{\lambda+\delta}\left(1-\dfrac{r-\delta}{\lambda+r}\theta_{3-i}\right)\end{cases}\tag{3.3}$$

で与えられる．ここで，

$$g(A^*, B^*) = \frac{\dfrac{\delta B^*}{\lambda+\delta} - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} b_i\theta_i \left(\frac{B^*}{K}\right)^{\theta_i}}{(A^*)^{\theta_1}(B^*)^{\theta_2} - (A^*)^{\theta_2}(B^*)^{\theta_1}} \tag{3.4}$$

と定義する．さらに，停止境界と早期行使境界の LCT は，非線形連立方程式

$$\begin{cases} (A^*)^{\theta_1+\theta_2} g(A^*, B^*) = \dfrac{\theta_1\theta_2}{\theta_1-\theta_2}\dfrac{q}{\lambda+r}, \\ \left\{\dfrac{1}{\theta_2}(A^*)^{\theta_1}(B^*)^{\theta_2} - \dfrac{1}{\theta_1}(A^*)^{\theta_2}(B^*)^{\theta_1}\right\} g(A^*, B^*) + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} b_i \left(\frac{B^*}{K}\right)^{\theta_i} = \dfrac{\delta B^*}{\lambda+\delta} - \dfrac{rK-q}{\lambda+r} \end{cases} \tag{3.5}$$

の解である．

コール価格の LCT (3.1) に LT のアーベル型定理を適用することで，無期限満期 $T=\infty$ のケースに対するコール価格を導出できる．

定理 3 評価時点の原資産価格 S に対して，$C_\infty(S;q)$ を無期限コール価格と定義する．このとき，

$$C_\infty(S;q) = \begin{cases} S-K, & S \geq B_\infty, \\ \dfrac{-\dfrac{1}{\theta_1^\circ}(A_\infty)^{\theta_2^\circ} S^{\theta_1^\circ} + \dfrac{1}{\theta_2^\circ}(A_\infty)^{\theta_1^\circ} S^{\theta_2^\circ}}{(A_\infty)^{\theta_1^\circ}(B_\infty)^{\theta_2^\circ-1} - (A_\infty)^{\theta_2^\circ}(B_\infty)^{\theta_1^\circ-1}} - \dfrac{q}{r}, & A_\infty < S < B_\infty, \\ 0, & 0 < S \leq A_\infty \end{cases} \tag{3.6}$$

で与えられる．ここで，$\theta_i^\circ \equiv \lim_{\lambda\to 0}\theta_i(\lambda)$ $(i=1,2)$ とし，停止境界と早期行使境界はそれぞれ

$$A_\infty = \frac{B_\infty}{\zeta}, \quad B_\infty = \frac{\theta_1^\circ\theta_2^\circ}{\theta_1^\circ-\theta_2^\circ}\frac{q}{r}\left(\zeta^{\theta_2^\circ} - \zeta^{\theta_1^\circ}\right),$$

で与えられる．さらに，停止境界と早期行使境界の比 $\zeta > 1$ は方程式

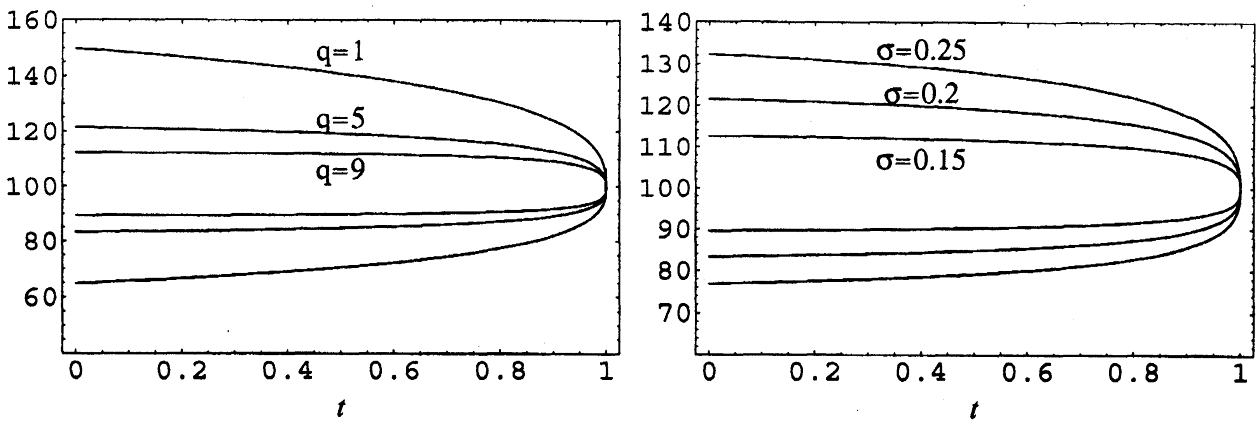
$$\theta_2^\circ(\theta_1^\circ - 1)\zeta^{\theta_1^\circ} - \theta_1^\circ(\theta_2^\circ - 1)\zeta^{\theta_2^\circ} = (\theta_1^\circ - \theta_2^\circ)\left(1 - \frac{rK}{q}\right) \tag{3.7}$$

から一意に決定される解として与えられる．

4 数値実験

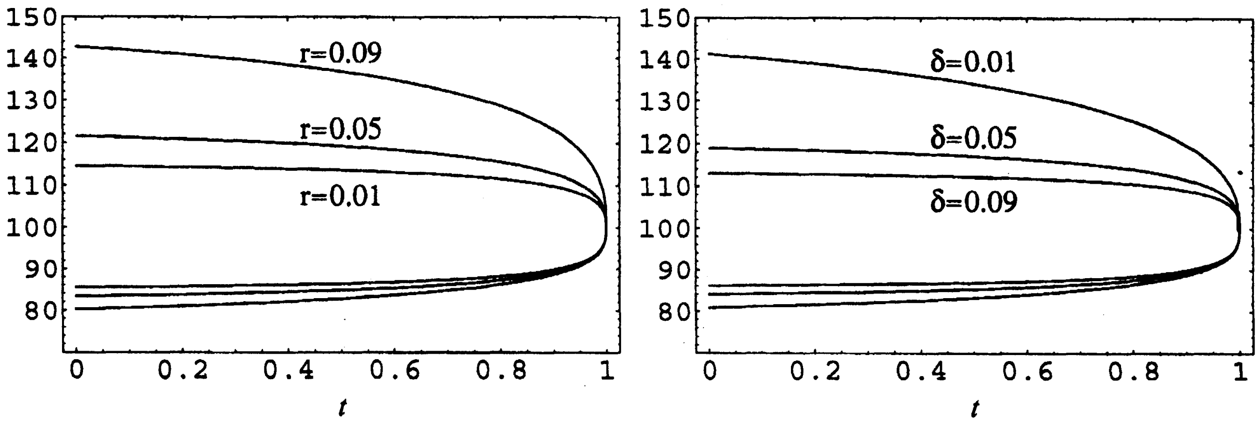
本節では，前節で導出したコール価格と最適停止境界の LCT を数値的逆変換によって計算する．逆変換アルゴリズムには，実数領域のみで計算可能な Gaver-Stehfest 法を用いる．詳細については，Gaver [5], Stehfest [8] を参照されたい．プログラムは，Mathematica (Version 4.1) で実装し，Pentium III (650MHz) のパーソナル・コンピュータ上で実行した．

図 1 (a) は，最適停止境界を連続支払い率 $q \in \{1.0, 5.0, 9.0\}$ を変えながら時間 t に関して描いたグラフである．各パラメータの値に対し，行使価格 K を基準とした上側の実線が早期行使境界，下側が停止境界である．q が大きくなるにつれてオプション保有が最適となる領域が狭くなっていくことが読み取れる．さらに，最適停止境界のカーブは次第に平坦になっていき，満期周辺以外ではまるで定数のように見える．(b) は，最適停止境界を，ボラティリティ $\sigma \in \{0.15, 0.20, 0.25\}$ を変化



(a) q= 1.0, 5.0, 9.0, $\sigma = 0.2$ (b) σ= 0.15, 0.2, 0.25, $q = 5.0$

図 1: アメリカ型連続インストールメント・コールの最適停止境界
($T = 1.0$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.04$)



(a) $r = 0.01, 0.05, 0.09$, $\delta = 0.04$ (b) $\delta = 0.01, 0.05, 0.09$, $r = 0.05$

図 2: アメリカ型連続インストールメント・コールの最適停止境界
($T = 1.0$, $K = 100$, $q = 5.0$, $\sigma = 0.2$)

表 1: アメリカ型連続インストールメント・コール価格
($t = 0$, $K = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $\delta = 0.04$)

q	S	$T = 1.0$	5.0	50	100	∞
1.0	95	4.750	10.426	14.616	14.627	14.627
	100	7.197	13.076	17.303	17.314	17.314
	105	10.132	15.957	20.153	20.164	20.164
5.0	95	2.112	2.829	2.858	2.859	2.859
	100	4.404	5.199	5.230	5.230	5.230
	105	7.394	8.162	8.193	8.193	8.193
9.0	95	0.785	0.835	0.842	0.842	0.842
	100	2.821	2.884	2.890	2.890	2.890
	105	5.956	6.012	6.018	6.018	6.018

させながら時刻 t についてプロットしたものである．ボラティリティが大きくなれば，それだけ意思決定を延期することの価値が高くなるため，オプション保有が有利となる領域は広くなっていくことが確認できる．

図 2 (a) は，最適停止境界を安全利子率 $r \in \{0.01, 0.05, 0.09\}$ を変えながら時間 t に関して描いたものである．停止境界よりも早期行使境界に対して，r の変化が大きな影響を与えていることが確認できる．(b) は，最適停止境界を連続配当率 $\delta \in \{0.01, 0.05, 0.09\}$ を変えながら時間 t に関してプロットしたものである．δ の変化が，早期行使境界に大きな影響を与える一方で，停止境界にはあまり効いていないことが明らかになった．したがって，(a) の結果と合わせれば，早期行使境界と停止境界は互いに依存しながら決定されるにも関わらず，パラメータ r, δ の変化は早期行使境界の方により大きな影響を及ぼすといえる．

図 1 と図 2 に対して，早期行使境界と停止境界が満期時点で一致するケースのみを示した理由は，早期行使境界と停止境界が満期時点で一致しないケースでは，計算結果が不安定になることが確認されたためである．これは，一致しないケースのパラメータを与えたとき，非線形連立方程式を高精度で解くことが困難なことに起因する．

表 1 は，有限満期 (T = 1.0, 5.0, 50, 100) に対するコール価格と無期限満期 ($T = \infty$) に対するコール価格を示したものである．有限満期のコール価格の算出に用いた GS 法では，q =1.0 かつ T =100 のときと q =9.0 かつ T =5.0 のときに 8 点，それ以外のケースでは 4 点のリチャードソン外挿法を併用している．満期が長くなるにつれて，コール価格は無期限コール価格に収束していることが確認できるので，解析解の妥当性が裏付けられた．ただし，最適停止境界付近におけるオプション価格はスムース・ペイスティング条件を満たさず，数値的に不安定になる現象が見受けられた．

5 おわりに

本論文では，まず，満期直前に権利行使，あるいは解約をして，満期までに得られるキャッシュ・フローの正負を考えることで，満期近傍における最適停止境界の漸近的性質を示した．次に，PDE アプローチより，コール価格の LCT を導出した．ここで，最適停止境界の LCT は，ある非線形連立方程式の解として陰に定義された．さらに，コール価格の LCT に，LT のアーベル型定理を適用することで，長い満期をもつコール価格の近似解として有用な無期限コール価格の解析解を導いた．数値実験では，GS 法を用いて，最適停止境界に対する各パラメータの影響を分析した．そして，有限満期と無期限満期に対するコール価格を算出し，無期限コール価格の妥当性を確かめた．

今後の研究課題は，満期時点に早期行使境界と停止境界が一致しないケースで生じる数値的不安定性を取り除くことである．最適停止境界は，ある非線形連立方程式を解きながら逆変換されるため，任意のパラメータに対し，この方程式の根を高精度で計算可能な方法を開発することが必要である．また，最適停止境界周辺においてコール価格がスムース・ペイスティング条件を満たさない問題を解決するために，GS 法以外の逆変換アルゴリズムを考案することも重要な課題である．最後に，実務的な要請から重要なアメリカ型離散インストールメント・オプションの価格評価 [2] に，本章で提案した数値解法を適用する研究も挙げられる．

参考文献

[1] Alobaidi, G., R. Mallier and S. Deakin, "Laplace transforms and installment options," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **14** (2004), 1167–1189.

[2] Ben-Ameur, H., M. Breton and P. François, "A dynamic programming approach to price installment options," *European Journal of Operational Research*, **169** (2006) 667–676.

[3] Ciurlia, P. and I. Roko, "Valuation of American continuous-installment options," *Computational Economics*, **25** (2005), 143–165.

[4] Davis, M., W. Schachermayer and R. Tompkins, "Pricing, no-arbitrage bounds and robust hedging of installment options" *Quantitative Finance*, **1** (2001) 597–610.

[5] Gaver, D.P., "Observing stochastic processes and approximate transform inversion," *Operations Research*, **14** (1966) 444–459.

[6] Ju, N., "Pricing an American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function," *Review of Financial Studies*, **11** (1998) 627–646.

[7] Kimura, K. and K. Kikuchi, "Valuing continuous-installment options: a Laplace transform approach," Discussion Paper Series A, No. 2006-173, Hokkaido University, 2006.

[8] Stehfest, H., "Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms," *Communications of the ACM*, **13** (1970) 47–49.