数理解析研究所講究録
第1548巻 2007年 138-145

価値が変動する２人売り出しのノイジー・ゲーム

大阪府立大学　大学院理学系研究科　情報数理科学専攻　寺岡義伸（Yoshinobu Teraoka）
大阪府立大学　大学院理学系研究科　情報数理科学専攻　北條仁志（Hitoshi Hohjo）
Department of Mathematics and Informti0on Sciences
Graduate School of Science, Osaka Prefecture University

Abstract

本報告では、ある農作物や土地の売り出し時刻の選択からヒントを得た、単位正方形上で定義された２人非０和ゲームを提案し解析する。ある市場において米や小豆・大豆のようなある生産物の販売権を複占している競争状態にある２つの企業が、互いにこの生産物の売りに出すタイミングを競っている。この生産物は周期的に収穫されるので、その価値は各期間内において、ある時点までは時間の経過ともに滑らかに増加するが、その時点を過ぎると滑らかに減少し、次の収穫期に前には０となってしまう。さらに、２企業のどちらかが売りに出すと、その価値は不連続的に下落し、その後はまた滑らかに変動する。各企業は、対立企業の売り出し時刻を考慮に入れた上で、自分にとっての最適な売り出し時刻を決めることが目的となる。また、各企業は互いに相手企業が売りに出した場合、瞬間にその事実が相手プレーヤに情報として伝えられる、Noisy Game を扱うものとする。このゲームの平衡点は、各期首での生産物の価値と最大値を与える時点での価値との大小関係で、決まってくることがわかる。

１．はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする２人非０和ゲームである。

２人のプレーヤ（Player Ⅰ,Ⅱ）が、小豆や大豆といった生産物の販売権を複占している。２人のプレーヤの市場占有率は対等であり、互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫があり、各期の初めに生産されると、２人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すのが最適かのタイミングを考えなければならない。次の期に入ると新しい収穫があるので、全プレーヤはこの生産物を各期の終わりまでに売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、ある時点までは時間の経過に伴って滑らかの上昇し、その時点を過ぎると滑らかに減少し、次の収穫期の前には０となってしまう。さらに、２人のどちらかが売りに出さない限り、評価額の変動は滑らかであるが、一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すと急激に（不連続的に）評価額は下落し、その後はまた時間の経過に伴った滑らかな変動を続ける。２人のプレーヤは次の収穫期までには、自分の権利を行使しなければならない。２人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額の変化と、相手の売り出し時刻を考えに入れながら、自分の売り出し時刻を決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買や大形船舶の発注のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。

このような問題にあっては、従来型のタイミング・ゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。２人の中の一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すとその瞬間、そのことが直ちに相手プレーヤに知られてしまう場合、そのプレーヤはノイジー・プレーヤ

という。逆に、あるプレーヤが売りに出したとき、情報防護がされており、そのことが相手プレーヤには知られず、相手は自分の持分を売りに出したとき初めてその時刻までにそのプレーヤが彼の持分を既に売っていたことを知る場合、そのプレーヤはサイレント・プレーヤと呼んでいる。２人共にサイレント・プレーヤであるようなゲームをサイレント・ゲームといい、２人共にノイジー・プレーヤであるゲームをノイジー・ゲームと呼ぶことにする。また、プレーヤⅠはサイレント・プレーヤであり、逆にプレーヤⅡはノイジー・プレーヤとなっているゲームをサイレント・ノイジー・ゲームと呼ぶことにする。本報告では、前回に扱ったサイレント・ゲームの続きとして、ノイジー・ゲームを扱うことにする。

２．記号と仮定

問題を見やすくするため、収穫してから評価額が０になるまでの期間を単位区間 [0, 1] で表現する。また、以下のような記号を導入し、後の議論のため、それらに付随した仮定を以下のように設定する。

$v(t)$：２人のどのプレーヤもまだ売りに出していないときの、時刻$t\in[0,1]$における生産物の価値。

微分可能であり

$$v'(t)\begin{Bmatrix}\geq\\<\end{Bmatrix}0 \quad \text{for} \quad \begin{Bmatrix}0\leq t\leq m\\ m<t\leq 1\end{Bmatrix}$$

を仮定する。

r：n 人の誰か１人が売り出したとき、売り出す度に生産物の価値が下落する割引率で、

$$0<r<1$$

と仮定する。すなわち、誰か１人のプレーヤが売りに出すと、$t\in[0,1]$ での評価額は$v(t)$から$rv(t)$へ減少する。

ここで、もし２人のプレーヤが時点$t\in[0,1]$で同時に売り出したときは、両プレーヤとも、その時点での生産物の割り引かれた評価額 $rv(t)$を、受け取る事が出来るものと仮定する。

また、本報告を通じて、単位正方形上で定義された実数値関数$M_i(x,y)$に対して、Player I と Player Ⅱがそれぞれ混合戦略（*cdf* s） $F(x)$と$G(y)$を用いたときの期待値に関して、次の記号

$$M_i(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)dG(y)$$

$$M_i(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)dG(y) \quad ; \quad M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)$$

を用いることにする。

３．サイレント・ゲームの結果

ノイジー・ゲームの定式化と解析の前に、サイレント・ゲームの結果を示す[7]。

サイレント・ゲームでは、両プレーヤともお互いにどの時点においても相手がそれまでに既に売りに出したか未だ売りに出していないかが判らず、自分の持分を売りに出して初めて、相手が既に売りに出していたのか、未だ売りに出していなかったかが学習できる。従って、Player I の純戦略を $x \in [0,1]$、Player II の純戦略を $y \in [0,1]$ と定義するのが自然である。

そうすると、Player i にとっての期待利得 $M_i(x,y)$ は

(1) $$M_1(x,y)=\begin{cases} v(x), & 0 \le x < y \\ rv(x), & y \le x \le 1 \end{cases} \quad ;$$

(2) $$M_2(x,y)=\begin{cases} v(y), & 0 \le y < x \\ rv(y), & x \le y \le 1 \end{cases}$$

で与えられる（$i=1,2$）。

上記の利得関数と文献[5]を考察すると、$v(x)$ が単峰関数であり $x=m$ （ただし、$0<m\le 1$）で最大値を取ることから、両プレーヤは同じ混合戦略（cdf） $F(x)$ を用い、$F(x)$ は次のクラスの cdf と想定することが出来る：

区間 $[0,m]$ 内に点 a を選び

(3) $$F(x)=\begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ \int_a^x f(t)dt, & a \le x < m \\ 1, & m \le x \le 1 \end{cases}$$

と置く。すなわち、区間（a,m）上の pdf $f(x)>0$ のみで構成される cdf とする。

そこで、今 Player 1 は純戦略 x を、Player II は(3)で与えられる混合戦略 $F(y)$ を選んだときの Player I への期待利得 $M_1(x,F)$ を計算すると

(4) $$M_1(x,F)=\begin{cases} v(x), & 0 \le x < a \\ v(x)[1-(1-r)F(x)], & a \le x < m \\ rv(x), & m \le x \le 1 \end{cases} \quad ;$$

$$(5)\qquad M_2(F,y)=\begin{cases} v(y), & 0\le y<a \\ v(y)[1-(1-r)F(y)], & a\le y<m \\ rv(y), & m\le y\le 1 \end{cases}$$

も得られる。以上より、次の2個の定理を得る。

定理1．いま $v(0)\le rv(m)$ と仮定し、a^0 を方程式 $v(a)=rv(m)$ の区間 $[0,m]$ における唯一の根とする。そこで、次のような cdf で与えられる混合戦略を考える：

$$F^0(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<a \\ \{1/(1-r)\}[1-\{v(a^0)/v(x)\}] & a\le x<m. \\ 1, & m\le x\le 1 \end{cases}$$

そうすると n 個の混合戦略の組（F^0，F^0）は (1)と(2)式で与えられる２人非０和サイレント・ゲームの Nash 点を構成する。この時、この戦略に基づく Player i にとっての期待利得は

$$v_1=M_1(F^0,\ F^0)=rv(m)\quad ;\qquad v_2=M_2(F^0,\ F^0)=rv(m)$$

となる。

この定理は、２人のプレーヤが共に平衡戦略を用いるとするならば、区間 $[m,1]$ に於ける $v(x)$ の形が何であっても、両プレーヤとも生産物の評価額が上昇している間に行動を集中させざるを得なくなること、を意味している。

定理2．いま、$v(0)>rv(m)$ と仮定する。この時、次のような混合戦略を考える：

$$H_0^\varepsilon(x)=\begin{Bmatrix} \int_0^x(1/\delta)dx, \\ 1, \end{Bmatrix}\quad \text{for}\quad x\in\begin{Bmatrix} [0,\delta] \\ (\delta,1] \end{Bmatrix},$$

ここに、ε は $0<\varepsilon<m$ を満たす任意の数で、$\delta=v^{-1}(v(0)+\varepsilon)$ とする。

そうすると、２人非０和ゲーム（１）と（２）に関して、任意の $\varepsilon\in(0,m)$ に対して

$$rv(m)\le M_1(F(x),H_0^\varepsilon(y))\le v(0)+\varepsilon\quad \text{for any}\quad F(x)$$

$$rv(m)\le M_2(H_0^\varepsilon(x),G(y))\le v(0)+\varepsilon\quad \text{for any}\quad G(y)$$

が成立する。

この定理は、評価値の最大値がそれほど大きくならないようなら、どのプレーヤも収穫があり次第直ちに、しかし相手とはぶつからないように売りに出すことが、平衡的な選択であることを意味する。

4．ノイジー・ゲームの定式化と解析

本節では、２人のプレーヤが共にノイジー・プレーヤである場合を扱う。すなわち、２人のどのプレーヤも相手の行動を観測することが出来、お互いに各時点でそれまでに相手が、何時、どの価格で売りに出したかが、瞬時に情報として伝えられる。各プレーヤは、[0, 1]の各時点でその時点での評価額を知って、自分の権利を行使するかしないかを決めなければならない。

そこで、Player I の純戦略を$x \in [0,1]$とする。この意味は、I は予め[0, 1]内に点xを決めておいて、もしIIがこのxより前に自分の持分を売りに出した場合は、$v(t)$を最大にする点mまで待ってIは自分の持分を売りに出し、逆に、もしIIがxより前に売りに出さなければ、この予め決めていた点xで売りに出す。

全く同様にして、Player IIの純戦略は$y \in [0,1]$であり、その意味も同様である。

そうすると、Player i にとっての期待利得$M_i(x,y)$は

(6) $$M_1(x,y) = \begin{cases} v(x), & 0 \le x < y \\ rv(m), & y \le x \le 1 \end{cases} \quad ;$$

(7) $$M_2(x,y) = \begin{cases} v(y), & 0 \le y < x \\ rv(m), & x \le y \le 1 \end{cases}$$

で与えられる（$i = 1,2$）。

(6)と (7) を観察し、また、サイレント・ゲームの解析と結果に注意すると、やはり$v(0)$と$rv(m)$との大小関係から平衡戦略が決まってくると予測できる。

まず$v(0) \le rv(m)$の場合を考察しよう。いま、aを方程式 $v(a) = rv(m)$ の区間［0，m］における唯一つの根とする。そこで、次のような分布関数をかんがえる：

εを $0 < \varepsilon < m$を満たす任意の数とし、$v(a+\delta) - v(a) = \varepsilon$ を満たすように$\delta > 0$ を選び

$$H_a^{\varepsilon}(x) = \begin{Bmatrix} 0, \\ \int_a^x (1/\delta)dx, \\ 1, \end{Bmatrix} \quad \text{for} \quad x \in \begin{Bmatrix} [0,a)] \\ [a, a+\delta] \\ (a+\delta, 1] \end{Bmatrix}$$

とする。

そうすると、いま、Player I が純戦略xを用い、Player IIが、上記で与えられた混合戦略$H_a^{\varepsilon}(y)$を用いたとすると

$$(8)\qquad M_1(x,H_a^\varepsilon(y))=\begin{cases} v(x)\le v(a)=rv(m), & 0\le x<a\\ \int_a^x rv(m)(1/\delta)dy+\int_x^{a+\delta} v(x)(1/\delta)dy, & a\le x\le a+\delta\\ rv(m), & a+\delta<x\le m\end{cases}$$

が得られる。そうすると　$a\le x\le a+\delta$ に対しては

$$M_1(x,H_a^\varepsilon(y))\le\ rv(m)\{(x-a)/\delta\}+v(a+\delta)\{(a+\delta-x)/\delta\}$$

$$\le\ v(a)+\varepsilon\ \ =rv(m)+\varepsilon$$

が成立し、また、$x\ge a$ であるから

$$M_1(x,H_a^\varepsilon(y))\ge rv(m)\{(x-a)/\delta\}+v(a)\{(a+\delta-x)/\delta\}=rv(m)$$

も成立する。

全く同様な関係が $M_2(H_a^\varepsilon(y),y)$ についても成立する。以上より、次の定理を得る。

定理３．いま $v(0)\le rv(m)$ と仮定する。この時、a を方程式 $v(a)=rv(m)$ の区間［0, m］における唯一つの根とする。そこで、ε を $0<\varepsilon<m$ を満たす任意の数とし、$v(a+\delta)-v(a)=\varepsilon$ を満たすように $\delta>0$ を選び、次のような混合戦略を考える：

$$H_a^\varepsilon(x)=\begin{Bmatrix}0,\\ \int_a^x(1/\delta)dx,\\ 1,\end{Bmatrix}\quad \text{for}\quad x\in\begin{Bmatrix}[0,a)]\\ [a,a+\delta]\\ (a+\delta,1]\end{Bmatrix}.$$

この時、２人非０和ゲーム(6)と(7)に対して

$$rv(m)\le M_1(F(x),H_a^\varepsilon(y))\le\ v(a)+\varepsilon\ \ =rv(m)+\varepsilon\quad \text{for any}\ \ F(x)\ \ ;$$

$$rv(m)\le M_2(H_a^\varepsilon(y),G(y))\le\ v(a)+\varepsilon\ \ =rv(m)+\varepsilon\quad \text{for any}\ \ G(y)$$

が成立する。

この定理は、２人のプレーヤが共に平衡戦略を用いるとするならば、区間[m, 1]に於ける $v(x)$ の形が何であっても、両プレーヤとも生産物の評価額が上昇している間に行動を集中させざるを得なくなるだけでなく、ノイジーの特性から $v(a)=rv(m)$ を満足する時点 a 以後直ちに、しかし相手の行動時刻とは重ならないように行動せざるを得なくなることを意味している。

次に $v(0)>rv(m)$ の場合を考察しよう。サイレントな場合と同様にして、任意のε （但し $0<\varepsilon<m$）に対して、δを $\delta=v^{-1}(v(0)+\varepsilon)>0$ となるように選び、混合戦略

$$H_0^{\varepsilon}(x)=\begin{cases}\int_0^x(1/\delta)dx, \\ 1, \end{cases} \quad \text{for} \quad x\in\begin{cases}[0,\delta] \\ (\delta,1]\end{cases},$$

を考える。そこで、Player I は純戦略xを用い、PlayerⅡは、上記で与えられた混合戦略$H_0^{\varepsilon}(y)$を用いたときの Payer I への期待利得を考えると

$$(10) \qquad M_1(x,H_0^{\varepsilon}(y))=\begin{cases}\int_0^x rv(m)(1/\delta)dy+\int_x^{\delta}v(x)(1/\delta)dy, & 0\le x\le\delta \\ rv(m), & \delta<x\le 1\end{cases}$$

が成立する。そして $0\le x\le\delta$ に対しては

$$M_1(x,H_0^{\varepsilon}(y))\le rv(m)(x/\delta)+v(\delta)\{(\delta-x)/\delta\}$$

$$=rv(m)(x/\delta)+\{v(0)+\varepsilon\}\{(\delta-x)/\delta\}$$

$$\le v(0)+\varepsilon$$

も成立する。以上より、次の定理を得る。

定理4．いま、$v(0)>rv(m)$ と仮定する。この時、次のような混合戦略を考える：

$$H_0^{\varepsilon}(x)=\begin{cases}\int_0^x(1/\delta)dx, \\ 1, \end{cases} \quad \text{for} \quad x\in\begin{cases}[0,\delta] \\ (\delta,1]\end{cases},$$

ここに、ε は $0<\varepsilon<m$ を満たす任意の数で、$\delta=v^{-1}(v(0)+\varepsilon)$ とする。

そうすると、２人非０和ゲーム(6)と(7)に対して

$$rv(m)\le M_1(F(x),H_0^{\varepsilon}(y))\le v(0)+\varepsilon \quad \text{for any} \quad F(x)$$

$$rv(m)\le M_2(H_0^{\varepsilon}(x),G(y))\le v(0)+\varepsilon \quad \text{for any} \quad G(y)$$

が成立する。

この定理は、評価値の最大値$v(m)$がそれほど大きくならないようなら、情報構造がノイジーかサイレントかの違いに関係なく、どのプレーヤも収穫があり次第直ちに、しかしながら競争相手の売り出し時刻とは重ならないように、売る出さざるを得なくなることを意味する。また、両者ともに、混合戦略$H_0^{\varepsilon}(\cdot)$を用いるとすると $M_i(H_0^{\varepsilon}(x),H_0^{\varepsilon}(y))\le\{v(0)+rv(m)\}/2+\varepsilon'$ となる。

5. 最後に

本報告で、両プレーヤともサイレント・プレーヤ、すなわち、サイレント・ゲームと、両プレーヤともノイジー・プレーヤ、すなわちノイジー・ゲームを扱ったが、土地や生産物などの売買にあっては、ノイジー・ゲームの方が現実的かも知れない。また、両プレーヤにとっての情報能力が非対称となるサイレント・ノイジー・ゲームの考察は、現実的ではないが興味深い。

次に、本報告では、２人のプレーヤが同時に売り出したときは、両者ともに割り引かれた価値になると仮定したが、割り引かれる直前の価値で売れると仮定すると、Nash 平衡点は無数に存在し、その中で、最大値を与える時点の対(m,m)が安定したNash 平衡点となる。

また、割引率 r と定数と仮定したが、経過時刻 $t\in[0, 1]$ の関数とした場合への一般化は複雑ではあるが、より現実的であり、興味深い。また、ここでは、1人が売り出す度に評価額が割引率 r で減少させる仮定を設けたが、売り出した人数分の１となる考え方もある。現実の市場がどのように動いているのか、十分な調査が必要である。

参考文献

1. M. Dresher, Games of Strategy：Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. S. Karlin, Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y. Teraoka and Y. Yamada, Games of production development in manufacturing, Lecture Note in Economic and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing, Springer, Berlin, 58-67,1997.
4. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person games on territory, Game Theory and Applications, Vol. V, Nova Science Publishers, Inc., New York, 134-141, 2000.
5. Y. Teraoka and H. Hohjo, Two person games of timing on sale, Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research, Nanzan University, Nagoya, 281-289, 2005.
6. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person silent game on sale, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.63, 237-240, 2006.
7. 寺岡義伸，北條仁志，価値が変動する売り出しのサイレント・ゲーム、京都大学数理解析研究所講究録（掲載予定）