数理解析研究所講究録
第 1548 巻 2007 年 186-193

一般均衡理論における超過需要差分方程式の周期点集合に関する有限被覆最終一様漸近安定性

Eventually uniformly asymptotical stability of periodic points for excess demand difference equations in economical equilibrium theory

齋藤誠慈*, 石井博昭**
Seiji Saito*, Hiroaki Ishii**
*同志社大学工学部インテリジェント情報工学科
Faculty of Engineering, Doshisha University
**大阪大学 大学院情報科学研究科 情報数理学専攻
Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University

本論文では，ワルラス経済理論における財の需要・供給量から決まる超過需要関数を，森嶋[1a]に従って述べる．第 2 章では，価格は一定単位期間ごとに変動観測されるモデルにおいて，財が交換流通する市場における超過需要関数から価格調整差分方程式を導く．第 3 章では，差分方程式の解が最終的有界被覆一様漸近安定であることを，常微分方程式の解における大域的一様漸近安定であること[3,4]と同様に定義し，最後に差分方程式の解が最終的有界被覆一様漸近安定であるための判定と今後の研究課題を述べる．

1. 超過需要関数

L. ワルラス(1834-1910, スイス)は，すべての個人が価格を所与とみなすような交換経済に関心があり，一般均衡理論を研究した([1])．非負の実数の集合を $\boldsymbol{R}_+ = \{ 0 \le x < \infty \}$ として，$\boldsymbol{R}_+^n$ はその直積集合を表す．各個人の初期保有する n 種類の財の量を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}_+^n$, 価格ベクトルを $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ で表す．T はベクトルの転置を示す．ワルラスの法則の下で，財は最終的に相対価格を取り扱う．ワルラスの交換理論の主な目的は，価値があり交換可能な全ての物は有用であり量において限られている，その逆も真であるという見解を立証することであった．価格がゼロであるときに個人が必要とする財の量に注目し，その量を財の外延効用(extensive utility)とよび，通常有限であると仮定した．「もしも商品が有用でなくなり，また有用であっても量において無限となれば，それはもはや稀少でなく，交換価値をもたない」と考えるのである．十分，完全に組織化された市場における競争とは，仲買人や売買の仲介者などが集まって競売が行われる場所で，いかなる交換も条件が公にされることを意

味し，売手は互いに高く，買手はできるだけ安く，売り買いすることを前提とする．

ワルラスの法則とは次のことを意味する：市場における財 j の総需要量 D_j は，すべての個人に関する d_j の総和であり，財 j の総需要量 S_j は，すべての個人に関する s_j の総和であるとして，価格 p の関数である：

(1) $D_j = D_j(p),\ S_j = S_j(p)\ (j = 1,2,\cdots, n)$

需要供給量の差 $D_j - S_j$ は，総外延効用量 X_j と初期の外延効用量 X_j^0 の差

(2) $D_j - S_j = X_j - X_j^0$

に等しいと仮定する．特に，需要・供給量の差を**超過需要関数**とよび，$f_j(p) = D_j - S_j$ である $(j=1, 2, \cdots, n)$．超過需要関数 $f(p)=(f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$ と価格 p の内積はゼロであり，これを**ワルラスの法則**という：

(3) $(f, p) = (D - S, p) = 0$

ただし，$D = (D_1, D_2, \cdots, D_n)^T, S = (S_1, S_2, \cdots, S_n)^T$ は各々，財 x の総需要量と総供給量である．相対価格とは，例えば，第 k 番目の財の価格を $q_k = p_k / \Sigma_j p_j$ とすることである．ゆえに，次の有界性と正規性が成り立つ：

(4) $0 \leq q_k \leq 1,\ \Sigma_j q_j = 1$

さらに，超過需要関数 $f = D - S$ は，**0 次同次的**，すなわち，

(5) $f(cq) = f(q)$ for $c > 0$

と仮定する．ベクトル q が相対価格であることを考慮すればよい．

2. 価格調整差分方程式

一定時刻ごと $t = 0, 1, 2, \cdots,$ の競争取引を考える．価格 p に対する第 j 財の超過需要に関して，次の仮定を課す：

(a) 需要＞供給のとき，競売人は $f_j(p(t))$ と $\Sigma_k v_{jk} p_k(t)$ とに比例して，その比例係数は v_{jk} として，価格を上げる．

(b) 需要＜供給のとき，逆に競売人は価格を下げる．

このようにして，時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots,$ における第 j 財の価格調整差分方程式は，次のように得られる．

(6) $p_j(t+1) - p_j(t) = f_j(p(t))\ \Sigma_k v_{jk} p_k(t)$

価格は非負より，次の条件が成立しなければならない．

(7) $p_j(t) + f_j(p(t))\ \Sigma_k v_{jk} p_k(t) \geq 0\quad (j=1, 2, \cdots, n;\ t = 0, 1, 2, \cdots)$

価格を相対価格 $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$ に換えて，$v_{jk} = v_j$ として議論をすすめる．

$$(8)\qquad q_j(t+1)=\frac{\max[q_j(t)+\nu_j f_j(q(t)),\quad 0]}{\sum_{k=1}^{n}\max[q_k(t)+\nu_k f_k(q(t)),\quad 0]}(=F_j(q(t)))$$

なお，f(p) = f(q) として置き直している．次の性質は容易に確かめられる：

(i) 正規化：$\Sigma_k q_k = 1$;

(ii) 非負・有界性： $0 \le q_k \le 1$;

(iii) ワルラスの法則：$(q, f(q)) = 0$.

差分方程式 (8) の不動点を均衡点とよぼう：$q = F(q) = (F_1, F_2, \cdots, F_n)^T$.

まず，均衡点の存在について述べる．$P \neq \phi$(空集合)のとき，均衡点の集合も空でない．また，ブラウワーの不動点定理：「有限次元空間 R^n 内の有界閉の凸集合 S 上で定義される連続関数 g が，中への写像：$g(S) \subset S$ ならば，g は S の中に少なくとも１つの不動点 y：$g(y) = y$ をもつ」(例えば，[2]参照)．$S = \{ q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)^T : 0 \le q_j \le 1, k=1, 2, \cdots, n \} \subset R^n$ は有界閉の凸集合で，$g(q) = F(q)$ は中への連続関数であるから，少なくとも１つの不動点をもつ．

$$\exists q^* \in S : F(q^*) = q^*.$$

次に均衡点において，超過需要関数は

(9) $f_j(q^*) = 0 \ (q_j > 0)$; $f_j(q^*) \le 0 \ (q_j = 0)$

であることが示される[1a]．相対価格が変動しないとき次のように解釈できる：

(i) $q_j > 0$ である稀少財については，需要＝供給である．

(ii) $q_j = 0$ である自由財については，供給が需要以上である．

3. 森嶋の例と最終漸近安定性

森嶋の例を考える[1b]．t= n として，２つの財の価格を $q=(q_1, q_2)$ とする超過需要関数 $f(q)=(f_1(q), f_2(q))^T$，は，次式である(a, b > 0 はパラメータ)：

$$(10)\qquad f_1(q)=\frac{-q_1}{q_1+q_2}+\frac{q_2}{a(q_1+q_2)},\qquad f_2(q)=-\frac{q_1 f_1}{q_2}$$

式 f は，0 次同次的で，ワルラスの法則をみたす．今後は，$q_1 + q_2 = 1$ と仮定する．価格伸縮度を $v_k = b$ とおくと式(8)は，$q(n+1) = (q_1(n+1), q_2(n+1))^T$ に関する価格調整差分方程式は次のとおりである：

(11)

$$q(n+1)=\frac{1}{\max[q_1(n)+bf_1(q(n)),0]+\max[q_2(n)+bf_2(q(n)),0]}\begin{pmatrix}\max[q_1(n)+bf_1(q(n)),0]\\ \max[q_2(n)+bf_2(q(n)),0]\end{pmatrix}$$

式 $q_2 = 1 - q_1$ より，$q_1 = q_1(n)$ だけに注目すればよいので，

$$q_1 = x$$

とおいて議論する.

森嶋[1b], pp239では, 式(11)においてa=0.6として次の差分方程式に関して, $0 < b < 2$ として一種の安定性を議論した：

$$(12)\qquad x(n+1) = \frac{(1-x(n))((3-8b)x(n)+5b)}{16bx(n)^2-3(6b+1)x(n)+5b+3} \qquad (=F(x(n)))$$

例えば，b=0.2のとき，$x^*=0.625$ が唯一の不動点：$x^* = F(x^*)$ である.

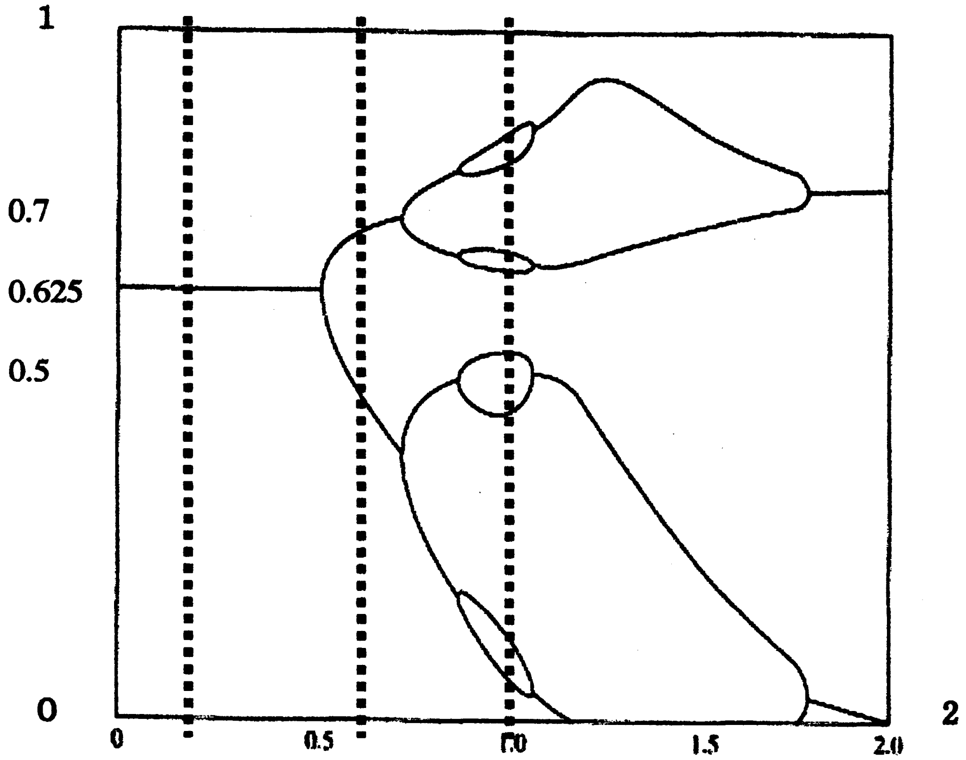


図1　横軸は $0 \le b \le 2$ を表し，式(12)における最終的に漸近する点 $0 \le x \le 1$ を縦軸とする．種々の初期点 x(0) から出発する解 {x(n): n=0, 1, 2, …} を計算し，$25,000 \le n \le 30,000$ を図示したものである．

また，b=0.6では x=0.5 と 0.7 が2周期点である．b=1のとき，8周期点が存在する．一般に差分方程式

$$(13)\qquad x(n+1) = F(n, x(n)),\quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

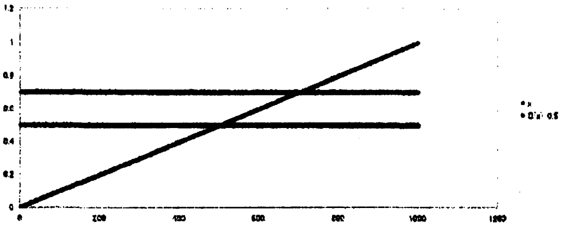
において，x^* が k 周期点 (k=1, 2, …) であるとは，次のような点である.

$$x^* = F^k(n, x^*),\quad F^i(n_i, x^*) \neq F^j(n_j, x^*) \text{ for } 1 \le i \neq j \le k \quad (\forall n, \exists n_i, \exists n_j).$$

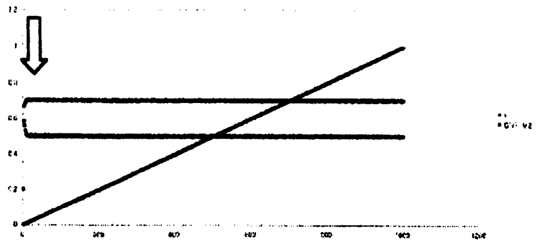
図1では，不安定の {x(n)} を棄て，安定な部分 25,000～30,000 を図示した．反

復 n ≥ 25,000 ならば，パラメータ b の値が大きくなるにつれて，不動点 0.625，2 周期点の 0.5 と 0.7，4 周期点，8 周期点が現れる．

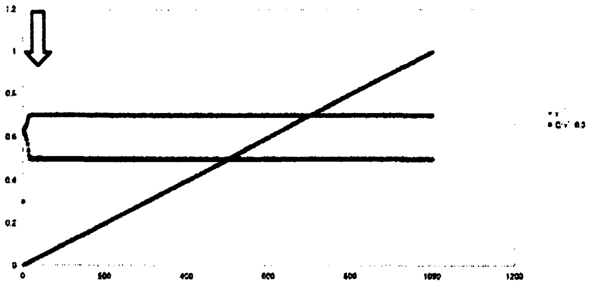
回数 n が小のとき，不安定であることを図 2 に示す．



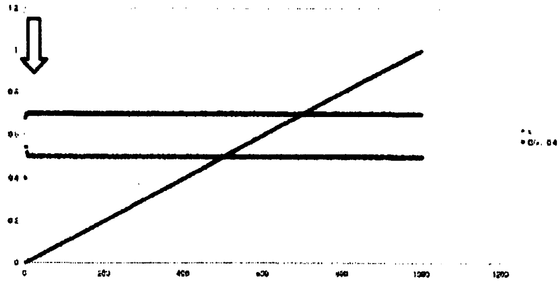
初期値 x(0)=0.1



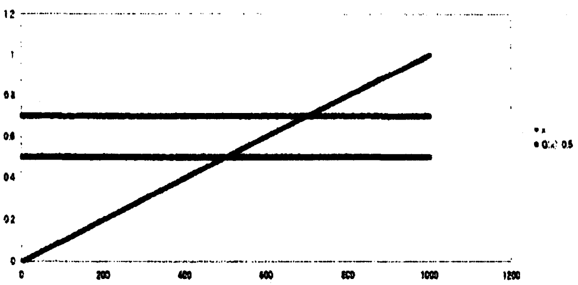
x(0) = 0.2()



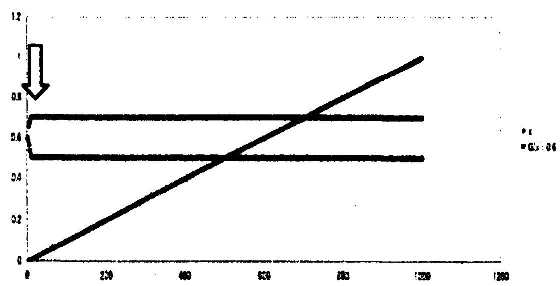
x(0) = 0.3



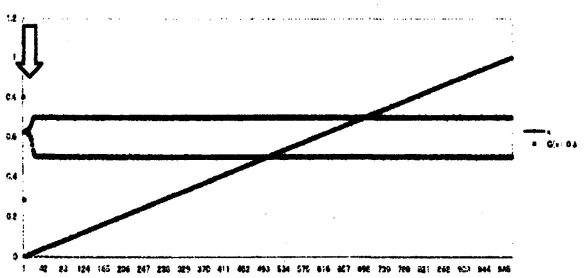
x(0) = 0.4



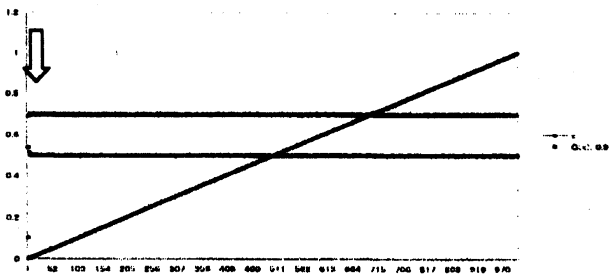
x(0) = 0.5(2 周期点の 1 つ)



x(0) = 0.6



x(0) = 0.8



x(0) = 0.9

図 2　式(12)において b=0.6 として，初期値 x(0)=0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，0.6，0.8，0.9 から出る解軌道を図示した．横軸は n=0〜1000，縦軸は x(n)を示す．

図1と図2から，式(12)はパラメータにより，反復n小のとき不安定で，n大のとき，パラメータによって決まる周期点の集合に収束することが予想される．

常微分方程式 $x' = F(t,x)$ における大域的最終一様漸近安定性 (globally eventually asymptotical stability)は，時刻tが小ならば不安定で，t大ならばある集合に収束する概念である．その概念を，経済学的立場から考慮して，**有限被覆最終一様漸近安定性**(*eventually asymptotical stability to finite coverings*, [EV-UAS-FC])として次のように新しく定義する．

関数 $F: I^m \to I^m$ は連続とする．式(13)の k 周期点の集合を P(k)とする．点 $x_0 \in I^m$，集合$P(k) \subset I^m$の近傍を各々，$r>0$として，

$B(x_0, r) = \{ x \in I^m : || x - x_0 || < r \}$　($||x||$はxのノルム)

$S(P(k), r) = \cup_{j=1}^{k} B(x_j, r)$, where $P(k)=\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$

とおく．集合P(k)が，**最終一様安定**(*eventually uniformly stable*, [EV-US])であるとは，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in Z_+$: $\exists \delta > 0$: if $\forall x_0 \in S(P(k), \delta)$, $\forall n_0 \ge N_0$, then the solution $x(n; n_0, x_0) \in S(P(k), \varepsilon)$ for $n \ge n_0$であることをいう P(k)が，**最終一様吸引的**(*eventually uniformly attractive*, [EV-UA])であるとは，$\forall \{C_q \subset I^m : \cup_{q=1}^{Q} C_q \supset I^m\}$(任意の有限被覆)，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in Z_+$, $\exists T_0 \in Z_+$: if $1 \le \forall q \le Q$, $\forall x_0 \in C_q$, $\forall n_0 \ge N_0$, $\forall n \ge n_0 + T_0$, then $x(n; n_0, x_0) \in S(P(k), \varepsilon)$ であることをいう．P(k)が有限被覆最終一様漸近安定であるとは，[EV-US]かつ[EV-UA-FC]であることをいう．

4. 有限被覆最終一様漸近安定性の判定法

次の正定符号の関数とリアプノフ関数を応用して，差分方程式(13)の有限被覆最終一様漸近安定性定理を述べる．

CIP= $\{a: I \to I$ は正定値連続増加関数$\}$

Theorem 1. P(k) is eventually uniformly asymptotically stable under that there exists a function $V: Z_+ \times I^m \to R_+$ satisfying Condition (a)-(b).

(a) $\forall r>0$, $\exists N_0 \ge 0$, $\exists a_r$, $\exists b_r \in CIP$:

$$a_r(d(x, P(k))) \le V(n, x) \le b_r(d(x, P(k))$$

for $\forall n_0 \ge N_0$, $\forall x_0 \in I^m - S(P(k), r)$.

(b) Let $\Delta V(n,x) = V(n+1, F^k(x)) - V(n,x)$. $\forall r>0$, $\exists N_0 \ge 0$, $\exists c_r \in CIP$:

$$\Delta V(n, x) \le - c_r(d(P(k), x))$$

for $\forall n_0 \geq N_0$, $\forall x_0 \in I^m - S(P(k), r)$. □
なお，$d(x, P(k)) = \min\{||x - p||: p \text{ in } P(K)\}$である．証明は，[2]の定理4.5と同様に，リアプノフ関数を $V(x) = d(x, P(k))$とすればよい．

さらに，吉沢の結果([4]，p83-84)を参考にして別な判定法も考案できよう．関数F，G，H は $R_+ \times R^m \times R^n$ で連続として，次の連立微分方程式

$$(14) \quad \begin{cases} x' = F(t,x,y) + H(t,x,y) \\ \quad\quad y' = G(t,x,y) \end{cases}$$

の任意の有界な解 $\{x(t), y(t)\}$ $(t \geq t_0)$ につき，$\int_{t_0}^{\infty} \| H(t,x(t),y(t)) \| dt < \infty$が成り立つと仮定する．Fは，$(x,y)$が有界ならば，$t \geq 0$ で有界で，次の条件(1)-(2)をみたすリアプノフ関数 V の存在を仮定する．

(1) $a(\| x \|^2 + \| y \|^2) \leq V(t,x,y) \leq b(\| x \|^2 + \| y \|^2)$

ここに，a，b ∈CIP で，$a(r) \to 0$ as $r \to 0$.

(2) $V'(t,x,y) \leq -W(x) + h(t)q(t,x,y)$

ここに，W は正定値連続，$\int_0^{\infty} | h(t) | dt < \infty$，q は連続で，$(x,y)$が有界ならば，$t \geq 0$ においてqは有界で，次のように定義する．

$$V'(t,x,y) = \limsup_{h \to +0} \frac{V(t+h, x+h[F(t,x,y)+H(t,x,y)], y+hG(t,x,y)) - V(t,x,y)}{h}$$

このとき，$(x,y) = (0,0)$は最終一様安定である．さらに，y につき最終一様有界であり， $x = 0$ は最終一様吸収的であることも示される．

上記の条件(1)，(2)に加えて次の条件(3)を仮定する．

(3) ある $R > 0$ が存在し，$||x||^2 + ||y||^2 \geq R^2$ ，$t \geq 0$ において

$$| q(t,x,y) | \leq \varphi(V(t,x,y))$$

が成り立つ．ここに，$\varphi > 0$ は連続で，$\int^{\infty} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$と仮定する．このとき，すべての解$(x,y)$について，$y(t)$は有界で．$x(t) \to 0$ as $t \to \infty$である．

例えば，差分方程式 $x(n+1) = F(n, x(n), y(n)) + H(n, x(n), y(n))$，$y(n+1) = G(n, x(n), y(n))$にはk周期点集合$P(k) = \{(x_p, y_p): p = 1, 2, .., k\}$が存在すると仮定する． $z = (x,y)$として条件(1)-(2)は次のように考案できる．

(1') $a_r(d(z, P(k))) \leq V(n,z) \leq b_r(d(z, P(k)))$.

(2') $\Delta V(n,z) \leq -W(x) + h(n)q(n,z)$.

ここに，$W(x)$は $P(k)$に対し正定値でしかも連続，$h(n)$には絶対値についてある

種の総和の有界性があり,qはについては,t,zに依存しない条件が必要である.

参考文献

[1a] M. Morishima: Warlas' Economics, Cambridge Univ. Press, 1977.

[1b] M. Morishima: Dynamic Economic Theory, Cambridge Univ. Press, 1997.

[2] S. Elydi: Discrete Chaos, Chapman & Hall/CRC, 2000.

[3] V. Lakshmikantham and S. Leela : Differential and Integral Inequalities I, Academic Press, 1969.

[4] T. Yoshizawa : Stability Theory by Liapunov's Second Method, Math. Soc. Japan, 1966.