数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 1-10

多重ゼータ値の線形関係式
〜具体的に記述できる関係式の系列〜

近畿大学 理工学部 大野泰生
Yasuo Ohno (Kinki University)

短期共同研究の露払いとして本稿では、多重ゼータ値の定義を述べた後、いくつかの具体的な関係式の系列について復習する。多重ゼータ値に付随する非可換多項式環と derivation 関係式や複シャッフル関係式、等号つき多重ゼータ値固有の関係式、p 進版、q 類似などについては触れない。

整数 $n \geq 1$, $k_2, k_3, \ldots, k_n \geq 1$ および $k_1 \geq 2$ からなる index

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

を admissible index と呼ぶことにして、これに対する多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を、

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}}$$

で定義する。ここで、$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ を $\mathbf{k}$ の weight と言い、$\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n$ を $\mathbf{k}$ の depth と言う。また、height $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ を

$$\mathrm{ht}(\mathbf{k}) = s = \#\{i | k_i \geq 2\}$$

で定義する。

Euler の関係式

そもそも多重ゼータ値（Euler は"主に"2 重ゼータ値）研究の始祖とされる Euler は、時代柄、無限級数の収束・発散の議論を厳密に扱えていたわけではなかったようであるにもかかわらず、無謀に見える怪算を経て、いくつもの正しい関係式を見つけている。重要なもののひとつが次のものである。

定理 1 (Euler [3])

$$\zeta(k-1,1)=\frac{k-1}{2}\zeta(k)-\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{k-2}\zeta(r)\zeta(k-r).$$

2重ゼータ値で、しかも後ろの index が 1 のもの $(\zeta(k-1,1))$ しか扱えなかったのか…、などと早合点してはならない。後ろの index が 1 でないもの、つまり $\mathrm{ht}(\mathbf{k})=2$ なるものは、full height と呼ばれ、リーマンゼータ値の積の展開でも容易に現れる。実際上述の定理の右辺の $\sum$ の部分は、(harmonic に) 展開すれば

$$\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{k-2}\zeta(r)\zeta(k-r)=\frac{k-3}{2}\zeta(k)+\sum_{r=2}^{k-2}\zeta(k-r,r)$$

となることが容易に計算され、上式に戻し整頓すると、

$$\sum_{r=1}^{k-2}\zeta(k-r,r)=\zeta(k)$$

という式が現れる。これは後に述べる sum formula の 2 重ゼータ値版の一般式である。一般 depth での sum formula の証明は 1990 年代中ごろになってようやく成された。Euler の研究の深さが読み取れる。

Hoffman の関係式

現代における多重ゼータ値研究の草分けである Hoffman の非常に多い引用回数を誇る論文において、次の定理は述べられている。私の個人的な印象だが、この論文の執筆時点で Hoffman はこの関係式の重要性にさほど気付いていたわけではないように思われる。ところが後になって、Hoffman 自身もこの関係式の再解釈を与えるなど、この関係式を軸に様々な話が広がっていくことになる。

定理 2 (Hoffman [5]) 任意の *admissible index* $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=1\\ \forall\varepsilon_j\geq 0}}\zeta(k_1+\varepsilon_1,k_2+\varepsilon_2,\ldots,k_n+\varepsilon_n)$$

$$=\sum_{\substack{1\leq l\leq n\\ k_l\geq 2}}\sum_{j=0}^{k_l-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{l-1},k_l-j,j+1,k_{l+1},\ldots,k_n).$$

右辺（あるいは左辺）を duality を用いて書き換えると、より対称的な式になることが判っている。現在から振り返ってみるならば、この関係式から展開した話題とは、まず Hoffman 自身によるこの関係式の再解釈、つまり非可換多項式環の derivation に対応付けたこと、また、ohno によるこの関係式と sum formula・duality formula の一般化、さらには Kaneko による derivation の一般化（derivation relation）と ohno の結果への対応付け（up to duality で derivation relation と同値であること）および、Ihara-Kaneko-Zagier([8]) による derivation relation の複シャッフル関係式を用いた再証明であろう。またこの非可換多項式環の言葉での再解釈の文脈において、derivation の代わりに cyclic derivative なる類似物を用いても関係式が得られることも判明 (cyclic sum formula) した。とにかく、見てくれ以上におもしろい（示唆に富む?）関係式だと言えよう。

最初の証明は部分分数の巧みな計算によった。この計算手法に類似する計算が cyclic sum formula の証明にも用いられている。cyclic sum formula の証明は現在のところこの一通りだけしか知られていないが、Hoffman の関係式には後述のように、ohno の結果の特殊化と見れば三通りの別証明が得られていることになる。

反復積分表示

以下の表記は、多重ゼータ値の反復積分表示（あるいは、Drinfel'd 積分表示）と呼ばれる。

定理 3 (cf. [13]) 任意の *admissible index* $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対して以下が成り立つ。

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = I(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - 1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_2 - 1}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_n - 1}),$$

ただしここで $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_k = 0$, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1} \in \{0, 1\}$ とし、$A_0(t) = t$, $A_1(t) = 1 - t$ とするとき、

$$I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \int \cdots \int_{0 < t_1 < \cdots < t_k < 1} \frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)} \cdots \frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)}$$

とする。

証明は右辺に $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ を用いて積分。この表示により次に述べる duality formula が容易に得られることになる。

Duality Formula

まず、dual index なるものを定義する。任意の admissible index $\mathbf{k}$ に対して、

$$\mathbf{k} = (a_1+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1-1}, a_2+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_2-1}, \ldots, a_s+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_s-1})$$

をみたす整数 $s \geq 1$ と $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_s, b_s \geq 1$ は、一意的に定まる。それらに対して admissible index $\mathbf{k}'$ を

$$\mathbf{k}' = (b_s+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_s-1}, b_{s-1}+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_{s-1}-1}, \ldots, b_1+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1-1})$$

で定めるとき、$\mathbf{k}'$ を $\mathbf{k}$ の dual index と呼ぶ。

定理 4 (duality formula cf. [13]) 任意の *index set* $\mathbf{k}$ とその *dual index set* $\mathbf{k}'$ に対して以下が成り立つ。

$$\zeta(\mathbf{k}') = \zeta(\mathbf{k}).$$

証明は反復積分表示における変数変換による。

Sum Formula

次に述べるのは、多重ゼータ値間の関係式の全貌を把握する上で、最も重要な関係式のひとつと目されている、sum formula である。

定理 5 (sum formula [4, 14]) 整数 $0 < n < k$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n):\mathrm{admissible}, \\ k_1+k_2+\cdots+k_n=k}} \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \zeta(k).$$

Granville による証明は、部分分数の巧妙な計算と母関数の議論を用いており、Zagier による証明は、反復積分表示とやはり母関数の議論を用いている。Ochiai は Zagier の証明を、(weight−depth と depth の間の) 対称性をより強く意識した形に再構成した。後にも述べるように、Ohno の結果 (証明は 3 通り)、O-Zagier の結果、Cyclic sum formula のいずれもが、sum formula の拡張と見なすことができ、しかも証明方法が相異なるため、上述以外に少なくとも 5 通りの再証明が得られていると考えてよい。

Le-Murakami の関係式

偶数 weight の多重ゼータ値の、depth に関する交代和については、結び目不変量の研究から下記のような関係式が知られている。

定理 6 (Le-Murakami [9]) $1 \le s \le k$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=2k,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{r=0}^{k-s}\binom{2k+1}{2r}(2-2^{2r})B_{2r}\pi^{2k}.$$

この関係式は、1990 年代中盤には知られていた比較的初期の関係式であるが、2001 年の O-Zagier の関係式により再証明が得られるまで、整数論サイドからの再証明はなかなか得られなかった。

Arakawa-Kaneko の関係式

現在は複シャッフル関係式（あるいは単なるシャッフル関係式）の一部分と解釈できる関係式が、[1] では下記のような姿で登場した。

定理 7 (Arakawa-Kaneko [1]) 任意の整数 $m,\ r \ge 1$ と $k \ge 2$ に対して次が成立する。

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=m \\ \forall a_j \ge 0}} \binom{a_1+r}{r}\zeta(a_1+r+1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$$

$$+(-1)^k \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=r \\ \forall a_j \ge 0}} \binom{a_1+m}{m}\zeta(a_1+m+1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1}, k-j)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1}, 2+j)$$

当初の証明は、Arakawa-Kaneko のゼータ関数の拡張版、言うなれば、多重ゼータ値の最初の index を複素変数と考えることにより得られる一変数関数のある種の結合、の正整数点での値の研究による。反復積分表示の形での多重ゼータ値の積を展開するシャッフル積として素直に解釈できる関係式で、ここから複シャッフル関係式へと話が展開していった。

Ohno の結果

sum formula・duality formula・Hoffman の関係式の拡張として次の関係式が知られている。

定理 8 (O [10]) 任意の *admissible index* $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と整数 $l \geq 0$ に対して $Z(\mathbf{k}; l)$ を

$$Z(\mathbf{k}; l) = \sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=l \\ \forall\varepsilon_j\geq 0}} \zeta(k_1+\varepsilon_1, k_2+\varepsilon_2, \ldots, k_n+\varepsilon_n),$$

とし、$\mathbf{k}'$ を $\mathbf{k}$ の *dual index* とする。この時、次が成り立つ。

$$Z(\mathbf{k}'; l) = Z(\mathbf{k}; l).$$

上の定理を $l = 0$ に制限すれば、主張が duality formula と同じになることが容易にわかる。

また、$\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = 1$ に制限すれば、これは sum formula と同じ主張になる。実際、$0 < n < k$ に対して、$\mathbf{k} = (n+1)$ の dual index は

$$\mathbf{k}' = (2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1})$$

であるから、

$$Z(\mathbf{k}'; k-n-1) = \sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=k-n-1 \\ \forall\varepsilon_j\geq 0}} \zeta(2+\varepsilon_1, 1+\varepsilon_2, 1+\varepsilon_3, \ldots, 1+\varepsilon_n),$$

となり、この右辺は結局 weight k で depth n の多重ゼータ値全部の和になる。一方、定理の右辺は $Z(\mathbf{k}; k-n-1) = \zeta(k)$ である。

次に、$l = 1$ の場合には、Hoffman の関係式を含んでいる。つまり Hoffman の関係式の右辺の多重ゼータ値たちをすべて duality で書き換えると、定理で $l = 1$ とした場合と同じ主張になる。

最初の証明は、sum formula の Zagier 流の証明（母関数と反復積分表示を用いた証明）を一般化し、ある種の対称性を確認することで得られた。Okuda-Ueno([12]) は、より代数的に扱い、polylogarithms の接続公式を逆 Melin 変換することで再証明を行い、関係

式の背景を解き明かした。また、Ihara-Kaneko-Zagier([8]) は、複シャッフル関係式から derivation relation を導くことで、derivation relation + duality が上述の関係式と同値である事実から再証明を与えた。

O-Zagier の結果

重さ、深さ、高さの３つのインデックスを固定した多重ゼータ値の和

$$G_0(k,n,s) \;=\; \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k})$$

について考える。ここで $I(k,n,s)$ は、重さ k、深さ n、高さ s のインデックス $\mathbf{k}$ の集合である。重さと深さを固定した和は、sum formula として知られているのでこれを精密化することを念頭におく。母関数

$$\Phi_0(x,y,z) \;=\; \sum_{k,n,s} G_0(k,n,s)\, x^{k-n-s}\, y^{n-s}\, z^{s-1} \quad \in \mathbf{R}[[x,y,z]]$$

を考える。$I_0(k,n,s)$ は k, n, s が $s \geq 1$, $n \geq s$, $k \geq n+s$ を満たしているときに限って空集合でないことに注意。

定理 9 (O-Zagier [11]) 上述の設定の下で母関数 $\Phi_0(x,y,z)$ は次のように書くことができる。

$$\Phi_0(x,y,z) \;=\; \frac{1}{xy-z}\left(1 - \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} S_n(x,y,z)\right)\right),$$

ただしここで多項式 $S_n(x,y,z) \in \mathbf{Z}[x,y,z]$ は、

$$S_n(x,y,z) \;=\; x^n + y^n - \alpha^n - \beta^n, \qquad \alpha,\beta \;=\; \frac{x+y\pm\sqrt{(x+y)^2-4z}}{2},$$

あるいは、

$$\log\left(1 - \frac{xy-z}{(1-x)(1-y)}\right) \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n(x,y,z)}{n}$$

ただし $S_n(x,y,z^2)$ は次数 n の斉次多項式、として定まるものとする。したがって、任意の k,n,s に対して $G_0(k,n,s)$ は、リーマンゼータ値の有理数係数多項式として表記できる。

この関係式を、height が 1 の場合に制限したものは、Zagier([14]) や Borwein 達 ([2]) により既に知られていたが、当時は height という $\mathbf{k}$ に付随する重要な index の認識が十分

でなかったため、上述のような形までは発展しなかった。height という呼称は、我々の研究途上で Zagier が軽い気持ちで使い始めた呼び名である。

証明は、weight, depth, height を固定した multi-polylog の和の母関数を構成し、この母関数の満たす微分方程式を作ると超幾何微分方程式となり解が得られ、multi-polylog の分子を 1 に近づけることで多重ゼータ値の母関数となることから上述の式が得られる。様々な特殊化により sum formula などの既知の関係式が再証明されるが、とりわけ Le-Murakami の関係式は、この手法により初めて結び目理論 (アソシエータ) 以外の角度からの証明を得た。

Cyclic Sum Formula

Hoffman の関係式が非可換多項式環の derivation として解釈されたことから、Hoffman は、derivation の類似物であるとされる cyclic derivative についても同様のことを研究し、予想関係式を得た。予想の証明は Hoffman の関係式の最初の証明と類似の、部分分数の計算を用いて成される。$0 < n < k$ に対して、

$$S(k,n) = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) | k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k,\ k_i \geq 1\}$$

とし、$S(k,n)$ の 2 元 $\mathbf{k}, k'$ が n 文字の巡回置換の冪でうつりあうとき、これらを巡回同値と呼び、$\mathbf{k} \sim \mathbf{k}'$ と書き、さらに $S(k,n)$ の巡回同値類の全体を

$$\Pi(k,n) = S(k,n)/\sim$$

とする。cyclic sum formula とは以下の関係式である。

定理 10 (cyclic sum formula, Hoffman-O [7]) $\Pi(k,n)$ の任意の元 α に対して

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1+1, k_2, k_3, \ldots, k_n) = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta(k_1-i, k_2, k_3, \ldots, k_n, i+1).$$

この定理の式は、duality formula を一辺に用いることによって、以下のように、より対称性を持った公式として書けることが判っている。この点でも Hoffman の関係式と似ている。

いま、$\alpha \in \Pi(k,n)$ と $\beta \in \Pi(k,k-n)$ が dual class であるとは、α 内の admissible index の dual index が β に含まれていることとして定義する。

系 1 ((symmetric) cyclic sum formula) $\Pi(k,n)$ の任意の元 α とその *dual class* $\beta \in \Pi(k,k-n)$ に対して

$$\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1+1,k_2,k_3,\dots,k_n) = \sum_{(k_1',k_2',\dots,k_n')\in\beta} \zeta(k_1'+1,k_2',k_3',\dots,k_n').$$

定理 10 において、右辺の depth が左辺 depth よりも 1 増えていることに注意して、$\Pi(k,n)$ のすべての class に対する定理 10 の式の和を考えると、次のようになります。

系 2 (sum formula) $0<n<k-1$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \text{wt}(\mathbf{k})=k,\ \text{dep}(\mathbf{k})=n}} \zeta(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \text{wt}(\mathbf{k})=k,\ \text{dep}(\mathbf{k})=n+1}} \zeta(\mathbf{k})$$

この系は、weight を固定したときに、各々の depth を持つ多重ゼータ値の総和は、depth によらず同じ値になることを意味しており、つまり sum formula が得られる。したがって、cyclic sum formula は sum formula の細分化と見なすことができ、直接的な証明が得られていることにより、sum formula に別証明が得られたことにもなっている。

本稿では多重ゼータ値の間に成立する線形関係式のうち、とりわけ具体的に式が記述できるものに絞って、系譜を見てきた。文献は概ね原典のみに絞る形で挙げるに留めたので、関連文献については Hoffman の web page の充実した文献リスト等を参照していただきたい。文脈や関係式族の規模により、ここに収録されていない重要な関係式もある。一方で、重要な関係式族である複シャッフル関係式や導分関係式などについてもここではほとんど述べていない。本講究録の他の著者による記事にそれらは述べられるはずである。また等号つき多重ゼータ値の研究も並行して行われているがこれについても後続の記事をお読みいただきたい。

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 1-21.

[2] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k, The Wilf Festschrift Volume. *Electron. J. Combin.*, 4 (1997), Research Paper 5, 19 pp.

[3] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Ptropol*, **20** (1775), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vil. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.

[4] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[5] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.

[6] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, **194** (1997), 477-495.

[7] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332-347.

[8] K. Ihara and M. Kaneko, and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.*, **142** (2006), 307-338

[9] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications*, **62** (1995), 193-206.

[10] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[11] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.

[12] J. Okuda and K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **40** (2004), 537?564.

[13] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.

[14] D. Zagier, Multiple zeta values, *unpublished manuscript*, 1995.