数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 71-76

多重ゼータ値の和公式と超幾何微分方程式

近畿大学理工学部　青木 貴史 (Takashi Aoki)
近畿大学総合理工学研究科　昆布 康博 (Yasuhiro Kombu)
近畿大学理工学部　大野 泰生 (Yasuo Ohno)

1 多重ゼータ値の和公式

よく知られたリーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の自然数 $k>1$ における値 $\zeta(k)$ はリーマンゼータ値と呼ばれる：

$$\zeta(k) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots .$$

指数 k を多重指数 $\boldsymbol{k} := (k_1, \cdots, k_n) \in \boldsymbol{N}^n$ に拡張したものを考える．多重指数 $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_n)$ は $k_1 \geq 2$ であるとき許容的である (admissible) という．許容的な多重指数 $\boldsymbol{k}$ に対し収束級数の値として多重ゼータ値が定義される:

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{\substack{m_1 > \cdots > m_n \\ m_1, \cdots, m_n \in \boldsymbol{N}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} .$$

また，上の定義の方法と異なる，等号付き多重ゼータ値も定義することが出来る:

$$\zeta^*(\boldsymbol{k}) := \sum_{\substack{m_1 \geq \cdots \geq m_n \\ m_1, \cdots, m_n \in \boldsymbol{N}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} .$$

この 2 種類の多重ゼータ値間には有理数係数の線型関係式がある．例えば,

$$\zeta(3,2) = \frac{1}{2^3 1^2} + \frac{1}{3^3 1^2} + \frac{1}{3^3 2^2} + \cdots$$

であるが,

$$\begin{aligned} \zeta^*(3,2) &= \frac{1}{1^3 1^2} + \frac{1}{2^3 1^2} + \frac{1}{2^3 2^2} + \frac{1}{3^3 1^2} + \frac{1}{3^3 2^2} + \frac{1}{3^3 3^2} + \cdots \\ &= \zeta(3,2) + \zeta(5) \end{aligned}$$

となることが容易に分かる．

多重指数 $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_n) \in \boldsymbol{N}^n$ について，$k := k_1 + \cdots + k_n$ を $\boldsymbol{k}$ の重さ (weight)，n を深さ (depth)，$k_i \geq 2$ なる k_i の個数 s を高さ (height) と

呼ぶ．重さ k，深さ n，高さ s の許容的多重指数全体の集合を $I_0(k,n,s)$ で表す．また，$I_0(k,n) := \bigcup_s I_0(k,n,s)$ とおく．

すると，多重ゼータ値 $\zeta(\boldsymbol{k})$，$\zeta^*(\boldsymbol{k})$ それぞれに関する和公式 (Sum formula) が以下で与えられる．

定理（和公式） （i） $k>n>0$ なる整数において，多重ゼータ値 $\zeta(\boldsymbol{k})$ とゼータ値 $\zeta(k)$ との間に

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,n)} \zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(k) \tag{1}$$

なる関係式が成立する．

（ii） $k>n>0$ なる整数において，等号付き多重ゼータ値 $\zeta^*(\boldsymbol{k})$ とゼータ値 $\zeta(k)$ との間に

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,n)} \zeta^*(\boldsymbol{k}) = \binom{k-1}{n-1}\zeta(k) \tag{2}$$

なる関係式が成立する．

この公式は本質的には A. Granville[1] と D. Zagier[8] が最初に証明し，多重ゼータ値全体の張る $\boldsymbol{Q}$-代数の構造を研究する上で要となっている定理である．現在までに数通りの別証明が知られている（[4],[6],[7], etc.）．

本稿の目的は微分方程式を用いた別証明を与える事である．

2 母関数と微分方程式

まず，パラメーター t と多重指数 $\boldsymbol{k} := (k_1,\cdots,k_n) \in \boldsymbol{N}^n$ に対して形式的冪級数

$$K_{\boldsymbol{k}}(t) := \sum_{\substack{m_1>\cdots>m_n \\ m_1,\cdots,m_n\in \boldsymbol{N}}} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

を考える．多重指数 $\boldsymbol{k}$ が許容的であるとき t の冪の各係数は収束し，また右辺は任意の多重指数 $\boldsymbol{k}$ と $|t|<1$ なる t に対して収束する．さらに，多重指数 $\boldsymbol{k}$ が許容的であるとき

$$\lim_{t\to 1} K_{\boldsymbol{k}}(t) = \zeta(\boldsymbol{k})$$

が成り立つ．次に，自然数 k, n, s に対して

$$G_0(k,n,s;t) := \sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,n,s)} K_{\boldsymbol{k}}(t)$$

とおき，この $G_0(k,n,s;t)$ の母関数を

$$\Phi_0(x,y,z;t) := \sum_{k,n,s} G_0(k,n,s;t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$$

により定める．

また，同様にして，

$$K^*_{\boldsymbol{k}}(t) := \sum_{\substack{m_1 \geq \cdots \geq m_n \\ m_1, \cdots, m_n \in N}} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} ,$$

$$G^*_0(k,n,s;t) := \sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,n,s)} K^*_{\boldsymbol{k}}(t) ,$$

$$\Phi^*_0(x,y,z;t) := \sum_{k,n,s} G^*_0(k,n,s;t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$$

と定める．

命題 (ｉ) 母関数 Φ_0 は微分方程式

$$t(1-t)\Phi_0'' + \{(1-t)(1-x) - yt\}\Phi_0' + (xy - z^2)\Phi_0 = 1 \qquad (3)$$

を満たす．逆にこの微分方程式の $t = 0$ における正則解で $\Phi_0(x,y,z;0) = 0$ となるものは Φ_0 に限る．

(ⅱ) 母関数 Φ^*_0 は微分方程式

$$t^2(1-t)\Phi_0^{*\prime\prime} + t\{(1-t)(1-x) - y\}\Phi_0^{*\prime} + (xy - z^2)\Phi^*_0 = t \qquad (4)$$

を満たす．逆にこの微分方程式の $t = 0$ における正則解は Φ^*_0 に限る．

微分方程式 (3) は [6] で与えられた．同様に微分方程式 (4) も導くことができる．

3　和公式の微分方程式を用いた証明—概略—

1°　和公式（i）

$\Phi_0(x,y,z;t)$ にて $z^2=xy$ とおいたものを $\tilde{\Phi}_0(x,y;t)$ で表す：この $\tilde{\Phi}_0(x,y;t)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数を $g(t)_{k-n-1,n-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} g(t)_{k-n-1,n-1} &= \sum_s G_0(k,n,s;t) \\ &= \sum_s \sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,n,s)} K_{\boldsymbol{k}}(t) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,n)} K_{\boldsymbol{k}}(t) \quad \to \sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,n)} \zeta(\boldsymbol{k}) \quad (t\to 1) \end{aligned}$$

となり，これは和公式（i）の左辺である．

ところで微分方程式 (3) にて $z^2=xy$ とおいたもの，つまり $\tilde{\Phi}_0$ の満たす微分方程式の解で，$t=0$ において正則な解 $\tilde{\Phi}_0$ を，微分方程式を解くことによって求める．微分方程式の階数を下げるため $u=\tilde{\Phi}_0'$ とおくと u に対する微分方程式

$$t(1-t)u'+\{(1-t)(1-x)-yt\}u=1$$

が得られる．この微分方程式の一般解は

$$u=ct^{-(1-x)}(1-t)^{-y}+\frac{(1-t)^{-y}}{1-x}F(1-x,1-y;2-x;t)$$

で与えられるが，$t=0$ で正則な解は $c=0$ として得られる．従って

$$\tilde{\Phi}_0(x,y;t)=\frac{1}{1-x}\int_0^t(1-s)^{-y}F(1-x,1-y;2-x;s)ds$$

と表される．

その解 $\tilde{\Phi}_0$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数 $g(t)_{k-n-1,n-1}$ を計算し t を 1 に近付けた値を求めたい．その値は，Abel の定理より解 $\tilde{\Phi}_0(x,y;t)$ にて先に t を 1 に近付けたもの $\tilde{\Phi}_0(x,y;1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数と一致することより求められる．

$$\tilde{\Phi}_0(x,y;1)=\frac{1}{1-x}\int_0^1(1-s)^{-y}F(1-x,1-y;2-x;s)ds\ .$$

ここで $F(1-x,1-y;2-x;s)$ は超幾何級数であるが，これを先に項別積分して

$$\tilde{\Phi}_0(x,y;1)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(h+1-x)(h+1-y)}$$

と求まり，この $\tilde{\Phi}_0(x,y;1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数を計算すると $\zeta(k)$ になる．これは和公式 (i) の右辺である．これにより和公式 (i) が示された．

2° 和公式 (ii)

$\Phi_0^*(x,y,z;t)$ にて $z^2=xy$ とおいたものを $\tilde{\Phi}_0^*(x,y;t)$ で表す．この $\tilde{\Phi}_0^*$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数 $g^*(t)_{k-n-1,n-1}$ を計算し t を 1 に近付けた値は和公式 (ii) の左辺 $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,n)} \zeta^*(\boldsymbol{k})$ である．

微分方程式 (4) にて $z^2=xy$ とおいたもの，つまり $\tilde{\Phi}_0^*$ の満たす微分方程式の解で，$t=0$ において正則な解 $\tilde{\Phi}_0^*$ を，微分方程式を解くことによって求める．微分方程式の階数を下げるため $u^*=\tilde{\Phi}_0^{*\prime}$ とおくと u^* に対する微分方程式

$$t(1-t)u^{*\prime}+\{(1-t)(1-x)-y\}u^*=1$$

が得られる．この微分方程式のと一般解は

$$u^*=ct^{-(1-x-y)}(1-t)^{-y}+\frac{(1-t)^{-y}}{1-x-y}F(1-x-y,1-y;2-x-y;t)$$

で与えられるが，$t=0$ で正則な解は $c=0$ として得られる．従って

$$\tilde{\Phi}_0^*(x,y;t)=\frac{1}{1-x-y}\int_0^t(1-s)^{-y}F(1-x-y,1-y;2-x-y;s)ds$$

と表される．

その解 $\tilde{\Phi}_0^*$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数 $g^*(t)_{k-n-1,n-1}$ を計算し t を 1 に近付けた値を求めたい．その値は，Abel の定理より解 $\tilde{\Phi}_0^*(x,y;t)$ にて先に t を 1 に近付けたもの $\tilde{\Phi}_0^*(x,y;1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数と一致することより求められる．

$$\tilde{\Phi}_0^*(x,y;1)=\frac{1}{1-x-y}\int_0^1(1-s)^{-y}F(1-x-y,1-y;2-x-y;s)ds\ .$$

ここで $F(1-x-y,1-y;2-x-y;s)$ は超幾何級数であるが，これを先に項別積分して

$$\tilde{\Phi}_0^*(x,y;1)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(h+1-x-y)(h+1-y)}$$

と求まり，この $\tilde{\Phi}_0^*(x,y;1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数を計算すると $\dbinom{k-1}{n-1}\zeta(k)$ になる．これは和公式 (ii) の右辺である．これにより和公式 (ii) が示された．

参考文献

[1] Andrew Graville, *A Decomposition of Riemann's Zeta-Function*, in Analytic Number Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series, **247**, Y. Motohashi(ed.), Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[2] Takashi Aoki and Yasuo Ohno, *Sum Relations for Multiple Zeta Values and Connection Formulas for the Gauss Hypergeometric Functions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **41**, 329-337 (2005).

[3] Michel E. Hoffman, *Multiple Harmonic Series*, Pacific Journal of Mathematics, **152**, 275-290 (1992).

[4] Michel E. Hoffman and Yasuo Ohno, *Relation of Multiple Zeta Values and Their Algebraic Expression*, J. Algebra, **262**, 332-347 (2003).

[5] Yasuo Ohno, *A Generalization of the Duality and Sum Formulas on the Multiple Zeta Values*, J. Number Theory, **74**, 39-43 (1999).

[6] Yasuo Ohno and Don Zagier, *Multiple Zeta Values of Fixed Weight, Depth, and Height*, Indag. Mathem., N.S., 12(4), 483-487 (2001).

[7] Jun-ichi Okuda and Kimio Ueno, *Relation for Multiple Zeta Values and Mellin Transforms of Multiple Polylogarithms.*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40**, 537-564 (2004).

[8] Don Zagier, *Values of zeta Function and Their Applications*, in Proceedings of ECM 1992, Progress in Mathematics, **120**, Birkhäuser, 1994, pp. 497-512.