数理解析研究所講究録
第1549巻 2007年 77-83

多重ゼータ値の巡回和とリーマンゼータ値

近畿大学理工学部 大野 泰生 (Yasuo Ohno)
近畿大学総合理工学研究科 若林 徳子 (Noriko Wakabayashi)
Department of Mathematics, Kinki University

多重ゼータ値とその与える$\mathbf{Q}$-代数は，さまざまな分野に現れ研究されている．すでに多くの関係式が証明されその全体像も解明されてきているが，まだ未解決の謎が多く存在している．今回，多重ゼータ値の和公式の均等な細分化を与える定理を得たので報告する．

多重ゼータ値には，ζ^*と表記するMZSVsと，通常多重ゼータ値と呼ばれζと表記されるMZVsの2種類があり，MZSVsとMZVsは互いに他の線型結合で書ける．定義は次の通りである．
許容的多重インデックス$\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$即ち，$k_i\in\mathbf{N},k_1>1,k_i>0$に対して，$k_1+\cdots+k_n=k$を$\mathbf{k}$の重さ，$n$を$\mathbf{k}$の深さと呼び，

$$\begin{aligned}\zeta^*(\mathbf{k}) &= \zeta^*(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_n\geq 1}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}},\\ \zeta(\mathbf{k}) &= \zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}.\end{aligned}$$

で定義される．

ここで，$k_1>1$の条件を外したインデックスの集合$I(k,n)$を次で定義する．

$$I(k,n)=\{(k_1,k_2,\ldots,k_n)|k_1+k_2+\cdots+k_n=k,\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 1\}.$$

更に$I(k,n)$の中の巡回同値類を次で定める．σを長さn(位数n)の巡回置換とし，

$$\sigma^j=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \tau_j(1) & \tau_j(2) & \cdots & \tau_j(n)\end{pmatrix}$$

と書くとき，多重インデックス$(k_1,k_2,\ldots,k_n),(h_1,h_2,\ldots h_n)\in I(k,n)$が巡回同値であるとは，

$$(h_1,h_2,\ldots h_n)=(k_{\tau_j(1)},k_{\tau_j(2)},\ldots,k_{\tau_j(n)})$$

を満たす整数jが存在することと定義する．記号$\prod(k,n)=I(k,n)/\sim$で$I(k,n)$における巡回同値類の全体を表す．つまり，一方のインデックスをサイクリックにまわして他方になるのが巡回同値である．

今回得た結果は以下のものである．

Theorem 1 (MZSVs の巡回和公式) $\prod(k,n)$ $(k>n>0)$ の任意の元 α に対して，以下が成り立つ．

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^*(k_1-i,k_2,\ldots k_n,i+1)=\frac{k|\alpha|}{n}\zeta(k+1).$$

ここで，左辺の和について $k_1=1$ のとき 0 とし，右辺の $|\alpha|$ は α の元の個数である．

一般に，右辺の係数 $\frac{k|\alpha|}{n}$ は常に整数となり，ほとんどの場合 k に一致する．従って，右辺は $\zeta(k+1)$ の整数倍となる．

例えば，重さ $k=6$，深さ $n=3$ のインデックス $(3,2)$ の類を考えると，その類によって生成される MZSVs の和は，

$$\zeta^*(3,2,1)+\zeta^*(2,2,2)+\zeta^*(2,3,1)=5\zeta(6)$$

となる．また，重さ $k=7$，深さ $n=3$ のインデックス $(5,1)$ の類を考えると，その類によって生成される MZSVs の和は，

$$\zeta^*(5,1,1)+\zeta^*(4,1,2)+\zeta^*(3,1,3)+\zeta^*(2,1,4)=6\zeta(7)$$

となる．

この巡回和は，和公式の精密化である．和公式は多重ゼータ値のなす $\mathbf{Q}$-ベクトル空間の構造を把握する上で最も重要な関係式のひとつであると考えられている．和公式とは以下の関係式のことである．

任意の整数 $k>N>0$ に対して以下が成立する．

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_{n+1})\in I(k,n)}\zeta^*(k_1+1,k_2,\ldots k_{n+1})=\binom{k}{n}\zeta(k+1).$$

具体的に例で見てみると，例えば重さ $k=7$ で深さ $n=3$ のとき，和公式では (5,1),(4,2),(3,3) の類で生成される MZSVs をすべて足し合わせると，

$$\begin{aligned}&\zeta^*(5,1,1)+\zeta^*(4,1,2)+\zeta^*(3,1,3)+\zeta^*(2,1,4)\\&\quad+\zeta^*(4,2,1)+\zeta^*(3,2,2)+\zeta^*(2,2,3)+\zeta^*(2,4,1)\\&\qquad+\zeta^*(3,3,1)+\zeta^*(2,3,2)\quad=\quad 15\zeta(7)\end{aligned}$$

となる．一方，今回得た結果では，(5,1) の類で生成される MZSVs の和は，

$$\zeta^*(5,1,1)+\zeta^*(4,1,2)+\zeta^*(3,1,3)+\zeta^*(2,1,4)=6\zeta(7)$$

(4,2) の類で生成される MZSVs の和は，

$$\zeta^*(4,2,1)+\zeta^*(3,2,2)+\zeta^*(2,2,3)+\zeta^*(2,4,1)=6\zeta(7)$$

(3,3) の類で生成される MZSVs の和は，

$$\zeta^*(3,3,1)+\zeta^*(2,3,2)=3\zeta(7)$$

となり，細分化されることが分かった．

今回得た MZSVs の巡回和公式ではなく MZVs についての巡回和公式は，Hoffman と Ohno の共同研究によって既に得られており，次の通りである．

$k>n$ とする．任意の元 $\alpha\in\prod(k,n)$ に対して，以下が成り立つ．

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\zeta(k_1+1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n)=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta(k_1-i,k_2,\ldots,k_n,i+1).$$

ここで，右辺の内側の和は $k_1=1$ のときは 0 として扱う．

MZVs の巡回和公式は両辺とも多重ゼータ値の和となるやや複雑な関係式族である．一方，今回得た MZSVs の巡回和公式は MZSVs の和をリーマンゼータ値の整数倍として表記するので，和公式の均等な細分化と言うことができ，構造がより見やすくなっている．よって，巡回和の標準的な理解を示唆していると考えられる．

今回の MZSVs の巡回和公式を証明するのに，MZVs の巡回和公式の証明がヒントとなる．

MZVs の巡回和公式は，収束級数

$$T(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{a_1>a_2>\cdots>a_{n+1}\geq 0}\frac{1}{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}(a_1-a_{n+1})}.$$

を定義し，次の命題を証明することによって得られる．

Lemma 1 $k_1+k_2+\cdots+k_n>n$ を満たす整数 $n,k_1,k_2,\ldots,k_n$ に対して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}T(k_1,k_2,\ldots,k_n)\ &-\ T(k_2,k_3,\ldots,k_n,k_1)\\ &=\ \zeta(k_1+1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n)-\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta(k_1-i,k_2,\ldots,k_n,i+1).\end{aligned}$$

右辺の和は，$k_1=1$のとき0として扱う．

これと類似の手法でMZSVsの巡回和公式が得られる．

まず，収束級数

$$C(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1}\frac{1}{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}(a_1-a_{n+1})}.$$

を定義する．そして次の命題を証明することによって得られる．

Lemma 2 任意の自然数 $n,k_1,k_2,\ldots,k_n$ $(k_1+k_2+\cdots+k_n>n)$ に対して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} C(k_1,k_2,\ldots,k_n) &- C(k_2,k_3,\ldots,k_n,k_1) \\ &= k_1\zeta(k+1)-\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^*(k_1-i,k_2,k_3,\ldots,k_n,i+1). \end{aligned}$$

任意の非負整数$i\leq k_1-2$ $(k_1\neq 1)$に対して，

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1\\ a_1\neq a_{n+1}}}\frac{1}{a_1^{k_1-i}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}a_{n+1}^{i}(a_1-a_{n+1})} \\ =&\sum_{\substack{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1\\ a_1\neq a_{n+1}}}\frac{1}{a_1^{k_1-i-1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}a_{n+1}^{i+1}}\left(\frac{1}{a_1-a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\right) \\ =&\sum_{\substack{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1\\ a_1\neq a_{n+1}}}\frac{1}{a_1^{k_1-i-1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}a_{n+1}^{i+1}(a_1-a_{n+1})} \\ &-\left\{\sum_{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1}\frac{1}{a_1^{k_1-i}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}a_{n+1}^{i+1}}-\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a^{k_1-i+k_2+\cdots+k_n+i+1}}\right\} \\ =&\sum_{\substack{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1\\ a_1\neq a_{n+1}}}\frac{1}{a_1^{k_1-i-1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}a_{n+1}^{i+1}(a_1-a_{n+1})} \\ &-\zeta^*(k_1-i,k_2,\ldots,k_n,i+1)+\zeta(k+1). \end{aligned}$$

を得る．$i=0,1,\ldots,k_1-2$に対して上の等式の両辺の和をとると，

$$\begin{aligned} C(k_1,k_2,\ldots,k_n) =& \sum_{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq 1}\frac{1}{a_1a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}a_{n+1}^{k_1-1}(a_1-a_{n+1})} \\ &-\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^*(k_1-i,k_2,\ldots,k_n,i+1)+(k_1-1)\zeta(k+1). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}C(k_1, k_2, \ldots, k_n) &= C(k_2, k_3, \ldots, k_n, k_1) + \zeta(k+1) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta^*(k_1 - i, k_2, \ldots, k_n, i+1) + (k_1 - 1)\zeta(k+1).\end{aligned}$$

となり,命題の式が得られる.そして,$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \alpha$ の全ての巡回置換に対して上の命題を用いて,それらを足し合わせることによって,

$$0 = k\zeta(k+1) - \frac{n}{|\alpha|} \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha} \sum_{i=0}^{k_n-2} \zeta^*(k_1 - i, k_2, \ldots, k_n, i+1)$$

となり,移項させると定理の等式が得られる.

今回得た定理は,例えば以下のような関係式を含んでいる.

例 1

任意の自然数 n に対して,$(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n})$ を含むインデックスの類 α を考える.α の元の個数は 1 なので,

$$\begin{aligned}\zeta^*(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}, 1) &= 2n \times \frac{1}{n} \times \zeta(2n+1) \\ &= 2\zeta(2n+1).\end{aligned}$$

という関係式が得られる.

例 2

任意の自然数 l に対して,$(\underbrace{3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1}_{2l})$ を含むインデックスの類 α を考える.α の元の個数は 2 なので,

$$\begin{aligned}\zeta^*(\underbrace{3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1}_{2l}, 1) + \zeta^*(2, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1, 2) &= 4l \times \frac{2}{2l} \times \zeta(4l+1) \\ &= 4\zeta(4l+1).\end{aligned}$$

という関係式が得られる.

例 3

任意の自然数 l, n に対して,$(\underbrace{2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}, \ldots 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}}_{lm})$ を含むインデック

スの類αを考える．αの元の個数はmなので，

$$\zeta^*(\underbrace{2,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},2,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},\ldots 2,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1}}_{lm},1) = l(m+1)\times\frac{m}{lm}\times\zeta(l(m+1)+1) = (m+1)\zeta(l(m+1)+1).$$

という関係式が得られる．この関係式の特別な場合として，$m=1$とすると先程の例1の式が得られる．

このようにさまざまなMZSVsの和がリーマンゼータ値の整数倍として表示される．

参考文献

[1] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **41** (2005), 329-337.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 191-216.

[3] J. M. Borwein, D. M Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisoněk, Special values of multiple polylogarithms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353** (2000), 907-941.

[4] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol*,**20** (1775), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.

[5] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[6] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.

[7] M. E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, **194** (1997), 477-495.

[8] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332-347.

[9] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Multiple zeta values, Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values, preprint.

[10] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[11] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values, *in Zeta Functions, Topology, and Quantum Physics*, Dev. Math., 14, Springer, 2005, pp. 131-144.

[12] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and heigth, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.

[13] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, preprint.

[14] J. Okuda and K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **40** (2004), 537-564.

[15] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in Proceedings of ECM 1992, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.

[16] D. Zagier, Multiple zeta values, Unpublished preprint, Bonn, 1995.

Department of Mathematics
Kinki University
Higashi-Osaka, 577-8502 Japan
ohno@math.kindai.ac.jp
noriko@math.kindai.ac.jp