数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 122-137

Mordell-Tornheim 型二重ゼータ関数と Riemann ゼータ関数の間の関数関係式およびその χ 類似について

東京都立短期大学　津村 博文 (Hirofumi Tsumura)
Tokyo Metropolitan College
(2005 年 4 月より首都大学東京 理工学系数理科学コース)

1 序

「多重ゼータ値の間のいろいろな関係式は, 実は多重ゼータ関数の間の関数関係式の一部の露頭なのではないか?」近年 多重ゼータ値の間の様々な関係式が得られている状況を踏まえて、松本耕二氏によってこのような問題提起がなされていた (例えば [7] Section 2 参照). しかしながら現在に至るまでその解答となるようなものとしては, いわゆる調和積と言われる

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2)=\zeta(s_1,s_2)+\zeta(s_2,s_1)+\zeta(s_1+s_2)$$

のような（自明な）関数関係式が知られているのみであった. この小文では, その問題に対するある種の解答例に当たるものを与えることを試みる. 実際、次のように定義される Mordell-Tornheim 型二重ゼータ関数と Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ との関数関係式、およびその χ-類似について、非自明と思われるものを紹介する.

<u>**Mordell-Tornheim 型二重ゼータ関数**</u>　$s_1,s_2,s_3\in\mathbb{C}$ に対し

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2,s_3):=\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}(m_1+m_2)^{s_3}}.$$

実際この関数は, 松本耕二氏によって, 三変数の有理型関数として $\mathbb{C}^3$ へ解析接続された ([4]). さらに松本氏は一般の自然数 r について Mordell-Tornheim 型 r 重ゼータ関数を定義し, その解析接続について考察している ([5] 参照). この名前の由来として, 1950 年代に Tornheim ([12]) と Mordell ([10]) によって、$\zeta_{MT,2}(k_1,k_2,k_3)$ (k_1,k_2,k_3 は 0 以上の整数) の値が研究され、これらの値と $\zeta(l)$ の間の非自明な関係式が得られた. とくに $\zeta_{MT,2}(k,0,l)=\zeta_{MT,2}(0,k,l)$ が良く知られたいわゆる二重ゼータ値 $\zeta(k,l)$ となる. また $2^s\zeta_{MT,2}(s,s,s)$ は $SL(3)$ に付随する Witten 型ゼータ関数 $\zeta_{SL(3)}(s)$ と一致する ([18]).

この小文の目標は, Tornheim, Mordell の与えた (値としての) 関係式を特殊値の間の関係としてもつような「関数としての関係式」を導くことである. さらに, その χ-類似として, 導手が 3, 4 の場合の, Mordell-Tornheim 型二重 L 関数と Dirichlet の L-関数との関数関係式を証明する. 特別な場合として, 二重ゼータ値と Riemann ゼータ値の間の関係式を含むものも与える. この方法を使うと, 三重ゼータ, 四重ゼータ関数の間の関数関係式も (形が複雑にはなるが) 与えることができる. ただしそのような多重化のためには、一般化された多重 Dirichlet 級数, 多重ポリログの解析的考察が不可欠である (松本氏との共同研究 [8, 9] 参照).

2 $\zeta(2m)$ についての Euler の公式

この Section では, $\zeta(2m)$ についての Euler の公式の別証明を与える. すなわちよく知られた $\cot z$ の無限乗積展開によるものではなく, 無限級数の初等的な計算とその一様収束性のみに依存する方法である. Bernoulli 数 $\{B_n\}$ を

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\quad(|t|<2\pi)$$

で定義する.

Euler の公式 $\zeta(2m)=\dfrac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}B_{2m}\ \ (m\in\mathbb{N}).$

(証) $\delta>0$ を小さくとり固定する. $\forall u\in[1,1+\delta]$ に対し

$$G_1(t;u)=\frac{2e^t}{e^t+u}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n(u)\frac{t^n}{n!}\quad(|t|<\pi)$$

とおく. 実際 $G_1(t;u)$ の極は $t=\log u+(2n+1)\pi i\ (n\in\mathbb{Z})$. 特に

$$\mathcal{E}_0(1)=1,\ \mathcal{E}_{2j}(1)=0\ \ (j\in\mathbb{N}).\tag{1}$$

$\forall\gamma\in(0,\pi)$ に対し, 正の向きを持つ円周 $C_\gamma:=\{t\in\mathbb{C}\,|\,|t|=\gamma\}$ について

$$(2\pi i)\frac{\mathcal{E}_n(u)}{n!}=\int_{C_\gamma}G_1(t;u)t^{-n-1}dt\quad(n\geq 0).$$

$M_1:=\max|G_1(t;u)|$ on $C_\gamma\times[1,1+\delta]$ とおくと

$$\frac{|\mathcal{E}_n(u)|}{n!}\leq\frac{M_1}{\gamma^n}\quad(n\geq 0)\tag{2}$$

が成り立つ. そこで

$$\phi(s;u) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^{-n}}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

を考える. $u=1$ のときは, $\phi(s;1) = (2^{1-s}-1)\zeta(s)$. $u>1$ とすると,

$$G_1(t;u) = -2\sum_{n\geq 1}(-u)^{-n}e^{nt} = -2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\geq 1}(-u)^{-n}n^m \frac{t^m}{m!}.$$

よって $\mathcal{E}_m(u) = -2\phi(-m;u) \quad (m \geq 0)$. そこで $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (-\pi,\pi)$, $u \in [1, 1+\delta]$ に対し,

$$I_k(i\theta;u) := i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^{-n}\sin(n\theta)}{n^{2k+1}}$$

とおく. $u>1$ ならば

$$\begin{aligned} I_k(i\theta;u) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi(2k-2j;u)\frac{(i\theta)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \phi(2k-2j;u)\frac{(i\theta)^{2j+1}}{(2j+1)!} - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{E}_{2m}(u)\frac{(i\theta)^{2m+2k+1}}{(2m+2k+1)!}. \end{aligned} \tag{3}$$

$|\theta| < \gamma < \pi$ となる γ をとれば, (2) より,

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{E}_{2m}(u)\frac{(i\theta)^{2m+2k+1}}{(2m+2k+1)!}\right| &\leq M_1 \frac{(2m)!}{(2m+2k+1)!}\left(\frac{|\theta|^{2m+2k+1}}{\gamma^{2m}}\right) \\ &\leq \frac{M_1|\theta|^{2k+1}}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}. \end{aligned}$$

従って, (3) の右辺は $u \in [1, 1+\delta]$ に関して一様収束する. そこで (3) の両辺を $u \to 1$ とすると (1) より

$$I_k(i\theta;1) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(2k-2j;1)\frac{(i\theta)^{2j+1}}{(2j+1)!} - \frac{(i\theta)^{2k+1}}{2(2k+1)!} \quad (|\theta| < \pi).$$

この両辺は $\theta \in [-\pi, \pi]$ で連続なので, $\theta \to \pi$ とすると, $\sin(n\pi) = 0$ より, 左辺は $I_k(i\pi;1) = 0$. よって

$$0 = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(2k-2j;1)\frac{(i\pi)^{2j+1}}{(2j+1)!} - \frac{(i\pi)^{2k+1}}{2(2k+1)!}. \tag{4}$$

簡単のために, $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$A_{2m} := \phi(2m;1)\frac{(2m)!}{(i\pi)^{2m}} = (2^{1-2m}-1)\zeta(2m)\frac{(2m)!}{(i\pi)^{2m}}, \tag{5}$$

$A_0 = -1/2$ とおく. (4) $\times$ $(2k+1)!\,(i\pi)^{-2k-1}$ から

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1} A_{2k-2j} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

よって

$$-\frac{t}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1}A_{2k-2j}\right)\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty}A_{2m}\frac{t^{2m}}{(2m)!}\right)\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

他方、簡単な変形で

$$\frac{2t}{e^t-e^{-t}} = \frac{2te^t}{e^{2t}-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(2-2^{2m}\right)B_{2m}\frac{t^{2m}}{(2m)!}.$$

従って

$$A_{2m} = 2^{2m-1}\left(1-2^{1-2m}\right)B_{2m} \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{6}$$

(5), (6) から Euler の公式:

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}B_{2m}$$

を得る. (Q.E.D.)

ここで大事だったことは, $G_1(t;u)$, さらに $I_k(i\theta;u)$ の u に関する一様収束性と $\mathcal{E}_{2j}(1)=0$ $(j \in \mathbb{N})$ となる事実であった. 従ってこの方法を多重化するには, うまく G_2, $G_3, \cdots$ を定義し, その Maclaurin 展開が u に関して一様収束し, かつその展開係数が適当に0になるものを構成すればよい.

3 Mordell-Tornheim 型二重ゼータ関数

Tornheim と Mordell によって得られていることを復習しておく.

<u>定理 A</u> (Tornheim 1950 [12]) $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, N:奇数 (≥ 3) について, $\zeta_{MT,2}(k, l, N-k-l)$ は $\{\zeta(j) \mid j \in \mathbb{N},\ 2 \leq j \leq N\}$ の有理数係数多項式としてあらわされる. (明示公式は Huard-Williams-Zhang [3])

<u>例 1.</u> $\zeta_{MT,2}(1,1,3) = 4\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3)$, $\zeta_{MT,2}(2,1,4) = -5\zeta(7) + 3\zeta(2)\zeta(5)$, $\zeta_{MT,2}(3,3,1) = 4\zeta(7) - 2\zeta(2)\zeta(5)$.

<u>定理 B</u> (Mordell 1958 [10]) $k \in \mathbb{N}$ について, $\zeta_{MT,2}(2k, 2k, 2k) \in \mathbb{Q}\pi^{6k}$.
明示公式 (Subbarao-Sitaramachandrarao [11]) として

$$\zeta_{MT,2}(2k, 2k, 2k) = \frac{4}{3} \sum_{j=0}^{k} \binom{4k - 2j - 1}{2k - 1} \zeta(2j)\zeta(6k - 2j).$$

<u>例 2.</u> $\zeta_{MT,2}(2,2,2) = \dfrac{1}{2835}\pi^6$, $\zeta_{MT,2}(4,4,4) = \dfrac{19}{273648375}\pi^{12}$.

以前に筆者は, 定理 A・B を共に含むような一般化を示したが ([13]), それらを補間するような関数関係式として次を証明する.

<u>主結果</u> $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \geq 2$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\zeta_{MT,2}(k, l, s) + (-1)^k \zeta_{MT,2}(k, s, l) + (-1)^l \zeta_{MT,2}(l, s, k) \\
&= 2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \equiv k\ (2)}}^{k} \left(2^{1-k+j} - 1\right) \zeta(k - j) \\
&\quad \times \sum_{\mu=0}^{[j/2]} \frac{(i\pi)^{2\mu}}{(2\mu)!} \binom{l - 1 + j - 2\mu}{j - 2\mu} \zeta(l + j + s - 2\mu) \\
&\quad - 4 \sum_{\substack{j=0 \\ j \equiv k\ (2)}}^{k} \left(2^{1-k+j} - 1\right) \zeta(k - j) \sum_{\mu=0}^{[(j-1)/2]} \frac{(i\pi)^{2\mu}}{(2\mu + 1)!} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \equiv l\ (2)}}^{l} \zeta(l - \nu) \\
&\quad \times \binom{\nu - 1 + j - 2\mu}{j - 2\mu - 1} \zeta(\nu + j + s - 2\mu)
\end{aligned}$$

が, 両辺の特異点を除く全ての $s \in \mathbb{C}$ で成り立つ.

__例 3__ $(k,l)=(1,3),(2,2),(3,2)$ の場合,

$$\zeta_{MT,2}(1,3,s)-\zeta_{MT,2}(1,s,3)-\zeta_{MT,2}(3,s,1)=2\zeta(2)\zeta(s+2)-4\zeta(s+4), \tag{7}$$
$$\zeta_{MT,2}(2,2,s)+2\zeta_{MT,2}(2,s,2)=4\zeta(2)\zeta(s+2)-6\zeta(s+4), \tag{8}$$
$$\zeta_{MT,2}(3,s,2)-\zeta_{MT,2}(3,2,s)-\zeta_{MT,2}(2,s,3)=10\zeta(s+5)-6\zeta(2)\zeta(s+3). \tag{9}$$

とくに (7) で s=3, (8) で s=2 とすると、例 1, 例 2 の関係式を得る:

$$\zeta_{MT,2}(3,3,1)=4\zeta(7)-2\zeta(2)\zeta(5),\quad \zeta_{MT,2}(2,2,2)=\frac{1}{2835}\pi^6.$$

$\zeta_{MT,2}(p,0,q)=\zeta(p,q)$ より, (9) で $s=0$ とすれば,

$$\zeta(3,2)-\zeta(2,3)=10\zeta(5)-5\zeta(2)\zeta(3).$$

これに対し, 定義から自明に得られる $\zeta(3,2)+\zeta(2,3)=\zeta(3)\zeta(2)-\zeta(5)$ とあわせると, よく知られた

$$\zeta(3,2)=\frac{9}{2}\zeta(5)-2\zeta(2)\zeta(3),\quad \zeta(2,3)=-\frac{11}{2}\zeta(5)+3\zeta(2)\zeta(3)$$

を得る. これらは非自明な関係式で、いわゆる大野関係式には含まれず, 例えば二重シャッフル関係式等から得られる.

__注__ (7), (8) をあわせると

$$\begin{aligned}\zeta_{MT,2}(1,s,3)-\zeta_{MT,2}(1,3,s)+\zeta_{MT,2}(3,s,1)&\\ +\zeta_{MT,2}(2,s,2)+\frac{1}{2}\zeta_{MT,2}(2,2,s)&=\zeta(s+4)\end{aligned} \tag{10}$$

を得るので、$\zeta(s)$ の関数等式から、(10) の左辺の（自明な）関数等式を得る.

4 主結果の証明の方針

Section 1 で紹介した方法を, 二重ゼータ関数に適用して主結果を導く. ここでは主結果で $(k,l)=(1,2)$ とした

$$\zeta_{MT,2}(1,2,s)-\zeta_{MT,2}(1,s,2)+\zeta_{MT,2}(2,s,1)=-4\zeta(s+3)+2\zeta(2)\zeta(s+1) \tag{11}$$

の証明を与える. 一般の場合の証明は [15] を参照.

いわゆる Hurwitz-Lerch ゼータ関数が次のように定義される. $\forall s, z \in \mathbb{C}$ ($|z| \le 1$), $\forall a \in (0,1]$ に対し

$$\Psi(s;z,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}.$$

とくに,

$$\phi(s;u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-u)^{-m}}{m^s} = \Psi(s;-u^{-1},1).$$

$\Psi(s;z,a)$ の反転公式 (see [2]) より次を得る.

<u>**補題 1**</u> $\mathrm{Re}(s) < 0$, $u \in [1, 1+\delta]$ ならば

$$\phi(s;u) = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi^{1-s}} \Big\{ e^{\pi i(s-1)/2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(2j - 1 + \frac{\log u}{\pi i}\right)^{s-1} + e^{-\pi i(s-1)/2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(2j - 1 - \frac{\log u}{\pi i}\right)^{s-1} \Big\}. \tag{12}$$

$\forall c \in [0,1)$ に対し

$$\lim_{m\to\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j - 1 \pm \frac{\log u}{\pi i})^{m-c+1}} \right| \le 1$$

より, (12) で $s = c - n$ ($n \in \mathbb{N}$) とすると, u によらない定数 $M = M(c) > 0$ が存在して,

$$\left| \frac{\phi(c-n;u)}{\Gamma(1+n-c)} \right| \le M\pi^{c-n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$|\Gamma(1+n-c)| \le n! |\Gamma(1-c)|$ より,

$$\left| \frac{\phi(c-n;u)}{n!} \right| \le M|\Gamma(1-c)|\pi^{c-n-1} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{13}$$

が成り立つ. ここで Polylogarithm のある種の一般化として次のような関数を考える. これは松本氏との共同研究 [8, 9] で扱われる "一般化された多重ポリログ" の prototype である.

<u>**定義**</u> $r \in \mathbf{R}$ ($r \ge 1$), $u \in [1, 1+\delta]$ に対し

$$F_1(t;r;u) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-u)^{-m} e^{mt}}{m^r}.$$

実際, $u=1,\ t=\log x+i\pi,\ r=k\in\mathbb{N}$ の時, $F_1(\log x+i\pi;k;1)$ は Polylogarithm $\mathrm{Li}_k(x)$ と一致する. $u\in(1,1+\delta]$, $\theta\in(-\pi,\pi)$ とすると, $e^{mi\theta}$ の Maclaurin 展開を考えると, 絶対収束性から二重級数の和の順序交換ができて

$$\begin{aligned} F_1(i\theta;r;u) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-m}}{m^r}\sum_{N=0}^{\infty}m^N\frac{(i\theta)^N}{N!} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\phi(r-N;u)\frac{(i\theta)^N}{N!}. \end{aligned} \tag{14}$$

ここで (14) の右辺は $u\in[1,1+\delta]$ に関して一様絶対収束する. 実際 (13) で $r=l+c$ $(l\in\mathbb{N},\ c\in[0,1))$ とおくと, $N>l$ のとき

$$\left|\frac{\phi(r-N;u)}{N!}\right| = \frac{|\phi(c-(N-l))|}{(N-l)!}\times\frac{(N-l)!}{N!}\leq\frac{M|\Gamma(1-c)|}{\pi^{N-l-c+1}}.$$

従って $t\in\mathbb{C}$ $(|t|<\pi)$, $u\in[1,1+\delta]$ に対し

$$F_1(t;r;u)=\sum_{N=0}^{\infty}\phi(r-N;u)\frac{t^N}{N!} \tag{15}$$

と定義することで, $F_1(t;r;u)$ の解析接続が得られる. 本来の Polylogarithm の解析接続は反復積分によりなされるが, その方法では $r=k\in\mathbb{N}$ 場合しか扱えない. 上記の方法は, 一般の実数 (さらには複素数) r について適用できる.

(15) で $r=1$ として

$$I_0(t;u)=\frac{1}{2i}\left(F_1(t;1;u)-F_1(-t;1;u)\right)$$

とおくと, $t=i\theta$ $(\theta\in(-\pi,\pi))$ とすれば, (3) で考察した

$$\begin{aligned} I_0(i\theta;u) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-u)^m\sin(m\theta)}{m} = \sum_{j=0}^{\infty}\phi(-2j;u)\frac{(-1)^j\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &\to \phi(0;1)\theta = -\frac{1}{2}\theta\quad(u\to1) \end{aligned} \tag{16}$$

を得る. ここで $\phi(-2j;1)=0$ $(j\in\mathbb{N})$ が重要であった. そこで $r\in\mathbf{R}(\geq1)$ に対し,

$$G_2(t;r;u)=\left(I_0(t;u)+\frac{1}{2i}t\right)F_1(t;r;u) \tag{17}$$

とおくと, $G_2(t;r;u)$ は $\{t\in\mathbb{C}\,|\,|t|<\pi\}$ で正則で, (16) から $\theta\in(-\pi,\pi)$ に対し

$$G_2(i\theta;r;u)\to0\quad(u\to1). \tag{18}$$

この $G_2(t;r;u)$ について, §1 で $G_1(t;u)$ について考察した方法を適用する.

$\theta \in (-\pi,\pi)$ に対し, (17) で $t=i\theta$ として

$$
\begin{aligned}
G_2(i\theta;r;u) &= \left\{\frac{1}{2i}\left(F_1(i\theta;1;u)-F_1(-i\theta;1;u)\right)+\frac{1}{2}\theta\right\}F_1(i\theta;r;u)\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-u)^{-m-n}(e^{i(m+n)\theta}-e^{i(n-m)\theta})}{m\,n^r}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-n}e^{in\theta}}{n^r}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$s_1,s_2,s_3\in\mathbb{C}$, $u\in[1,1+\delta]$ に対し

$$
\begin{aligned}
S(s_1,s_2,s_3;u) &:= \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-m-n}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}},\\
R(s_1,s_2,s_3;u) &:= \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-2m-n}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}
\end{aligned}
$$

とおく.

$u\in(1,1+\delta]$ とすると,

$$
\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-m-n}e^{i(m+n)\theta}}{m\,n^r}=\sum_{N=0}^{\infty}S(1,r,-N;u)\frac{(i\theta)^N}{N!}.
$$

さらに (19) で

$$
\begin{cases}
n>m\Rightarrow l:=n-m\Rightarrow n=m+l\\
n<m\Rightarrow l:=m-n\Rightarrow m=n+l\\
n=m\Rightarrow n-m=0
\end{cases}
$$

の場合に分けて考える. 例えば $n>m$ の時, $l=n-m$ として

$$
\sum_{1\le m<n}^{\infty}\frac{(-u)^{-m-n}e^{i(n-m)\theta}}{m\,n^r}=\sum_{m,l=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-2m-l}e^{il\theta}}{m\,(m+l)^r}=\sum_{N=0}^{\infty}R(1,-N,r;u)\frac{(i\theta)^N}{N!}.
$$

同様に $m>n$, $m=n$ の場合を計算して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-m-n}e^{i(n-m)\theta}}{m\,n^r}\\
&=\sum_{N=0}^{\infty}\left(R(1,-N,r;u)+(-1)^N R(r,-N,1;u)\right)\frac{(i\theta)^N}{N!}+\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-u)^{2m}}{m^{r+1}}.
\end{aligned}
$$

さらに

$$\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u)^n e^{in\theta}}{n^r}=\sum_{N=0}^{\infty}N\phi(r+1-N;u)\frac{(i\theta)^N}{N!}.$$

これらから,

$$\begin{aligned}G_2(i\theta;r;u)=\frac{1}{2i}\sum_{N=0}^{\infty}\Big\{&S(1,r,-N;u)-R(1,-N,r;u)\\&-(-1)^N R(r,-N,1;u)+N\phi(r+1-N;u)\Big\}\frac{(i\theta)^N}{N!}\\&-\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u^{2m}}{m^{r+1}}.\end{aligned}\tag{20}$$

そこで $u\in(1,1+\delta]$, $n\in\mathbb{Z}$ について

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{E}}_n^2(r;u)=&S(1,r,-n;u)-R(1,-n,r;u)\\&-(-1)^n R(r,-n,1;u)+n\phi(r+1-n;u)\end{aligned}\tag{21}$$

とおく. とくに $n\le -1$ の時は, $\widetilde{\mathcal{E}}_n^2(r;1)$ も (21) で定義する. (20) から

$$G_2(i\theta;r;u)=\frac{1}{2i}\sum_{N=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{E}}_N^2(r;u)\frac{(i\theta)^N}{N!}-\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u^{2m}}{m^{r+1}}.$$

G_2 の定義から, この両辺も u に関して一様収束する. $u\to 1$ とすると, (18) より

$$\begin{cases}\widetilde{\mathcal{E}}_n^2(r;u)\to 0 & (n\ge 1)\\ \widetilde{\mathcal{E}}_0^2(r;u)\to\zeta(r+1) & (n=0).\end{cases}\tag{22}$$

上の記号で, $u\in(1,1+\delta]$ ならば

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-u)^{-m-n}\sin((m+n)\theta)}{mn^r(m+n)^3}-\frac{(-u)^{-2m-n}\sin(n\theta)}{mn^3(m+n)^r}-\frac{(-u)^{-2m-n}\sin(n\theta)}{m^r n^3(m+n)}\right\}\\&-\left\{3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-m}\sin(m\theta)}{m^{r+4}}-\theta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-m}\cos(m\theta)}{m^{r+3}}\right\}\\&=\sum_{N=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{E}}_{2N-2}^2(r;u)\frac{(-1)^N\theta^{2N+1}}{(2N+1)!}.\end{aligned}\tag{23}$$

実際, 左辺を計算して (21) を使えばよい. (23) の両辺は $\theta\in(-\pi,\pi)$ の時, $u\in(1,1+\delta]$ に関して一様収束することがわかるので, $u\to 1$ とすることができて, (22) を使うと次を得る.

補題 2 上の記号で, $\theta \in (-\pi, \pi)$ の時,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{m+n}\sin((m+n)\theta)}{mn^r(m+n)^3}-\frac{(-1)^n\sin(n\theta)}{mn^3(m+n)^r}-\frac{(-1)^n\sin(n\theta)}{m^rn^3(m+n)}\right\}$$
$$-\left\{3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\sin(m\theta)}{m^{r+4}}-\theta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos(m\theta)}{m^{r+3}}\right\}$$
$$=\widetilde{\mathcal{E}}_{-2}^{2}(r;1)\theta-\zeta(r+1)\frac{\theta^3}{3!}. \tag{24}$$

(24) の両辺は $\theta \in [-\pi, \pi]$ で連続なので, $\theta \to \pi$ として,

$$\pi\zeta(r+3)=\widetilde{\mathcal{E}}_{-2}^{2}(r;1)\pi-\zeta(r+1)\frac{\pi^3}{6}.$$

よって

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{-2}^{2}(r;u)=\zeta(r+3)+\zeta(2)\zeta(r+1). \tag{25}$$

さらに (23) は θ に関して微分可能なので、補題 2 と同様に,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{m+n}\cos((m+n)\theta)}{mn^r(m+n)^2}-\frac{(-1)^n\cos(n\theta)}{mn^2(m+n)^r}-\frac{(-1)^n\cos(n\theta)}{m^rn^2(m+n)}\right\}$$
$$-\left\{3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos(m\theta)}{m^{r+3}}-\theta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\sin(m\theta)}{m^{r+2}}\right\}$$
$$=\widetilde{\mathcal{E}}_{-2}^{2}(r;1)-\zeta(r+1)\frac{\theta^2}{2!}. \tag{26}$$

よって $\theta \to \pi$ として, (25) を使うと

$$\zeta_{MT,2}(1,r,2)-\zeta_{MT,2}(1,2,r)-\zeta_{MT,2}(r,2,1)-3\zeta(r+3)$$
$$=\widetilde{\mathcal{E}}_{-2}^{2}(r;1)-\zeta(r+1)\frac{\pi^2}{2}=\zeta(r+3)-2\zeta(2)\zeta(r+1).$$

ここで $\zeta_{MT,2}(s_1,s_2,s_3)$, $\zeta(s)$ はそれぞれ有理型に解析接続されて, その possible poles も確定しているので ([4, 5]), この両辺を (-1) 倍して, r を 特異点以外の $s \in \mathbb{C}$ へ拡げれば, $(k,l)=(1,2)$ の場合の関係式 (11) が得られる.

5 Mordell-Tornheim 型二重 L 関数

前述の方法を二重 L 関数へ拡張する. [1] において, 荒川恒男氏と金子昌信氏によって, 二種類の多重 L 値が定義されているが, その記号にあわせて次のような Mordell-Tornheim 型二重 L 関数を定義する.

定義 χ, ψ: Dirichlet 指標;

$$L^{ш}_{MT,2}(s_1, s_2, s_3; \chi, \psi) := \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{\chi(m_1)\psi(m_2)}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} (m_1+m_2)^{s_3}},$$
$$L^{*}_{MT,2}(s_1, s_2, s_3; \chi, \psi) := \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{\chi(m_1)\psi(m_1+m_2)}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} (m_1+m_2)^{s_3}}.$$

注として $s_2 = 0$ の時が荒川一金子型二重 L 関数. $L^{ш}_{MT,2}$ については Maoxiang Wu 氏により (Matsumoto's method を使って) $\mathbb{C}^3$ へ有理型関数として解析接続されている ([7, 17]). $L^{*}_{MT,2}$ についても同様な方法で解析接続可能である. χ_3, χ_4 をそれぞれ導手が 3, 4 の原始 Dirichlet 指標とする時, §3 と同様にして, 次が得られる.

例. (特異点を除く) $s \in \mathbb{C}$ について

$$\begin{aligned}
&L^{ш}_{MT,2}(1, s, 2; \chi_3, \chi_3) + L^{*}_{MT,2}(1, 2, s; \chi_3, \chi_3) + L^{*}_{MT,2}(s, 2, 1; \chi_3, \chi_3) \\
&= -L(s+3; \chi_3^2) + 3L(1; \chi_3)L(s+2; \chi_3) - \frac{3}{4}L(2; \chi_3^2)L(s+1; \chi_3^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L^{ш}_{MT,2}(1, s, 2; \chi_4, \chi_4) + L^{*}_{MT,2}(1, 2, s; \chi_4, \chi_4) + L^{*}_{MT,2}(s, 2, 1; \chi_4, \chi_4) \\
&= -L(s+3; \chi_4^2) + 2L(1; \chi_4)L(s+2; \chi_4) - \frac{1}{3}L(2; \chi_4^2)L(s+1; \chi_4^2).
\end{aligned}$$

ただし $\chi_j^2(\cdot) := \{\chi_j(\cdot)\}^2$ $(j = 3, 4)$. さらにこれらの特殊値として得られる関係式を組み合わせると, 例えば

$$L^{ш}_{MT,2}(1, 2, 2; \chi_3, \chi_3) = L(5; \chi_3^2) - \frac{3}{2}L(1; \chi_3)L(4, \chi_3),$$
$$L^{ш}_{MT,2}(1, 2, 2; \chi_4, \chi_4) = L(5; \chi_4^2) - L(1; \chi_4)L(4, \chi_4)$$

などが得られる. これらのことから, いわゆる depth が 2 の場合の 'Parity Result' と呼ばれる「奇数 weight の 二重ゼータ値は, Riemann ゼータ値達の有理数係数多項式の形であらわされる」 という事実の χ_3, χ_4-類似を示すことができる. この他に

も, 非原始的な指標 $\chi_4^2(\cdot) = \{\chi_4(\cdot)\}^2$ について

$$\begin{aligned}
&L^{ш}_{MT,2}(2,s,3;\chi_4^2,\chi_4^2) + L^{*}_{MT,2}(2,3,s;\chi_4^2,\chi_4^2) - L^{*}_{MT,2}(s,3,2;\chi_4^2,\chi_4^2)\\
&\quad = \frac{10}{3}L(s+3,\chi_4^2)L(2,\chi_4^2) - 4L(s+5,\chi_4^2)
\end{aligned}$$

が得られる ([16]). とくに $s=2$ として

$$\begin{aligned}
L^{ш}_{MT,2}(2,2,3;\chi_4^2,\chi_4^2) &= \frac{10}{3}L(5,\chi_4^2)L(2,\chi_4^2) - 4L(7,\chi_4^2)\\
&\left(=\frac{155}{64}\zeta(5)\zeta(2) - \frac{127}{32}\zeta(7)\right)
\end{aligned}$$

等も得られる. 二重 L 値 $L_{ш}(p,q;\chi_3,\chi_3) = L^{ш}_{MT,2}(p,0,q;\chi_3,\chi_3)$ (注: これは [1] の定義と和の順序が逆である) について, 上記と同様な方法で,

$$\begin{aligned}
L_{ш}(2,3;\chi_3,\chi_3) &= -\frac{9}{2}L(1;\chi_3)L(4;\chi_3) - L(2;\chi_3)L(3;\chi_3)\\
&\qquad + 2L(5;\chi_3^2) + \frac{3}{4}L(2;\chi_3^2)L(3;\chi_3^2),\\
L_{ш}(3,2;\chi_3,\chi_3) &= \frac{9}{2}L(1;\chi_3)L(4;\chi_3) + L(2;\chi_3)L(3;\chi_3) - 3L(5;\chi_3^2)
\end{aligned}$$

等も得られるが, これらは二重 L 値についての二重シャッフル関係式 ([1]) から得られるものではないかと思われる.

6　あとがき

筆者と多重ゼータ値の出会いは, 1997 年に都立大で行われた金子昌信氏の集中講義であった. ただその折には、多重ゼータ値が内包している興味深い性質 (ゼータ的な性質！) がよくわからず, 自分にとって単なる analogue としての理解の域をでなかった. 実際その時の講義も, どちらかというとその当時金子氏がより興味を持っておられたと思われる "多重ベルヌイ数" に力点が置かれたものであり, 筆者も多重ベルヌイ数の性質に興味をそそられたように記憶している. その後も多重ゼータ値というものが自分にとって確たる研究対象となりうるという意識が芽生えないまま, 2000 年 12 月に数理研で行われた代数的整数論研究集会を迎えた. そこで今回の世話人でもある大野泰生氏と古庄英和氏の多重ゼータ値に関する講演を聞く機会が与えられた. いずれの講演もご自身の深い研究成果をきちんとまとめられた興味深いものであったが, それらの講演を聞きながら筆者自身はある種の "違和感" を感じた. 両氏の講演では多重ゼータ値が反復積分によってとらえられ, それを元に様々な性

質が述べられていた．実際今回の研究集会の講演の多くが，さらには現在の多重ゼータ値の最新の研究の多くが，反復積分表示によって多重ゼータ値をとらえ，そこから深い理論が構築されていると言っても良いと思われる．筆者にとって反復積分表示というと直ぐに Polylogarithm に結びつくが，これはゼータ値的に言うといわゆる"正の整数での値を直接扱う手法" と考えてしまう．筆者が感じた違和感は「ゼータと言っていながら，なぜ負の整数での値が出てこないのだろうか？」というものであった．言うまでもなく $\zeta(s)$ は正の整数値と負の整数値の間に明確な関係がある．それどころか関数等式まで存在している．関数等式の多重化は難しいかもしれないが，負の整数値と正の整数値の間に何か関係はないのか？これが大野・古庄両氏の講演を聞いていて感じたことであった．実際，上記金子氏の集中講義の講義録が都立大数学教室から出版され，その冒頭にいわゆる $\zeta(2m)$ についての Euler の公式の一般化 (多重化) を，多重ベルヌイ数を使ってできないか？という示唆がなされており，さらにその後半にはある種の多重ゼータ関数の負の整数値に多重ベルヌイ数があらわれるという事実も書かれている．これらは，上記の違和感について金子氏が既に感じられていたことの発露とも読み取れる．その時期と前後して，秋山氏，江上氏，谷川氏，松本氏，Zhao 氏などにより，多変数の多重ゼータ関数の解析接続が示された．その後も研究が進められ，最近では松本氏により，二重ゼータ関数の関数等式にあたるものも発見され ([6])，多変数関数論的な理解が深まっている．ただ 2000 年当時はまだ，多重ゼータの負の整数値と正の整数値を結びつける明確な結果というものは無かったと思われる．

京都から帰った筆者は，その違和感を払拭すべく，早速自分なりのアプローチを試みた．その時点で，この小文の Section 1 で述べた「$\zeta(2m)$ についての Euler の公式の別証明」のアイディアは持っていたので，それを拡張すれば，反復積分を使わないでも何がしかの結果が得られるのではないか？と考えた．そのためには金子氏のものとは異なる多重ベルヌイ数に当たるものを定義し，それを負の整数値でとるような多重ゼータ関数 (に当たるもの) を考察すれば良いのではないか？と考え，何が出てくるかとワクワクしながら計算した．結果として最初に出てきたのが，Section 2 で述べた

$$\zeta(3,2)=\frac{9}{2}\zeta(5)-2\zeta(2)\zeta(3),\quad \zeta(2,3)=-\frac{11}{2}\zeta(5)+3\zeta(2)\zeta(3)$$

であった．パソコンでチェックしてみると数値的には正しそうだということで，ろくろく文献も調べずに金子氏と大野氏にこの結果をメールで送ってみたところ，直ぐに両氏から返信があり，この結果は既に知られているとのこと．実際 Euler 自身が $p+q$ が奇数の場合 $\zeta(p,q)$ を $\zeta(j)$ で書き表していることがわかった．ただ大野氏からは上記の結果が，当時証明されたばかりのいわゆる「大野関係式」には含まれて

おらず, 二重シャッフル関係式から導かれる非自明なものであることを教えられた. 従ってこの方法 (すなわち反復積分表示を使わない方法) を発展させれば, 何か新しい未知のものを得られるかもしれないという励ましをいただいた. それ以来, この方法の多重化を試み, depth n の場合の Parity result (本講究録収載の井原氏の項参照) の別証明 ([14]) や, 本稿の関数関係式へとつながってきたのである. 今回, 研究集会の懇親会の席で, 個人的に大野氏に上記の経緯を話し, 氏の助言と激励に感謝を述べる機会が与えられたことは個人的に大きな喜びであった. また今回の研究集会で, 多重ゼータ値の枠を少し広げようとすると (すなわち多重 L 値や一般の多重ディリクレ級数等), 反復積分表示や超幾何的アプローチがうまく働かない場合もあるということを聞いて, もしかすると筆者の方法がさらに未知の部分へ切り込める可能性があるのではないかという思いを強くした. 今後はもう少し関連の知識を増やして, 新たな方向性を模索していきたいと思っている (松本氏との共同研究 [8, 9] 参照).

この小文の結びとして, この研究に際し, 多くの貴重なアドバイスをいただいた松本耕二氏に感謝申し上げたい. この小文の冒頭に述べたとおり, この研究は松本氏の問題提起に端を発しており, さらにその一つの (部分的な) 解答例とみなせる本文中の主結果が, 松本氏自身の定義された $\zeta_{MT}(s_1, s_2, s_3)$ によって実現されているところが非常に興味深い. 氏のゼータ関数についての卓見を物語る事実と言っても過言ではないと思われる[1]. また都立大で多重ゼータの種を蒔いていただき, 加えて今回の主結果を整理する過程において, ご助力をいただいた金子昌信氏にも感謝を述べたい. 最後に, この研究集会を企画し, 様々な気配りをされて会をスムーズに運営し意義深いものにされた大野泰生氏および運営に携わった方々に心から感謝申し上げたいと思う. 関係の方々のご尽力により, 幅広い分野の方々から興味深い話を聞くことができて、自分にとっては実り多い研究集会であったと思う. 再びこのような研究集会に参加できる機会が持てることを切に願っている.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, On multiple L-values, *J. Math. Soc. Japan* **56** (2004), 967-992.

[2] A. Erdelyi(Dir.), W. Magnus, F. Oberthettinger and F. Tricomi, *Higher transcendental functions*. Vol. 1 (McGraw-Hill: New York, Toronto, London 1953).

[3] J. G. Huard, K. S. Williams and Z. Nan-Yue, On Tornheim's double series. *Acta Arith.* **75** (1996), 105-117.

[1]事前にこの原稿を読んだ松本氏から「過言である」とのご指摘をいただいた (笑).

[4] K. Matsumoto, On the analytic continuation of of various multiple-zeta functions, in "Number Theory for the Millennium II, Proc. of the Millennial Conference on Number Theory", M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, 2002, pp. 417-440.

[5] K. Matsumoto, On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions, in "Proceedings of the Session in analytic number theory and Diophantine equations", D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Mathematische Schriften Nr. 360, Univ. Bonn, 2003, n.25, 17pp.

[6] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **136** (2004), 1-7.

[7] K. Matsumoto, Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables, to appear in "Proceedings of the 3rd China-Japan Seminar (Xi'an 2004): The Tradition and Modernization in Number Theory", Y. Tanigawa and Wenpeng Zhang (eds.).

[8] K. Matsumoto and H. Tsumura, Generalized multiple Dirichlet series and generalized multiple polylogarithms, Tokyo Metropolitan Univ. Math. Preprint Ser. 2004 : No. 13, submitted for publication.

[9] 松本耕二・津村博文, 一般化された多重 Dirichlet 級数と一般化された多重ポリログについて, 本講究録収載.

[10] L. J. Mordell, On the evaluation of some multiple series, *J. London Math. Soc.* **33** (1958), 368-371.

[11] M. V. Subbarao and R. Sitaramachandrarao, On some infinite series of L. J. Mordell and their analogues, *Pacific J. Math.* **119** (1985), 245-255.

[12] L. Tornheim, Harmonic double series, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 303-314.

[13] H. Tsumura, On some combinatorial relations for Tornheim's double series, *Acta Arith.* **105** (2002), 239-252.

[14] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, *Acta Arith.* **111** (2004), 27-42.

[15] H. Tsumura, On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function, preprint, being revised.

[16] H. Tsumura, Certain functional relations for the double harmonic series related to the double Euler numbers, to appear in J. Austral. Math. Soc., Ser. A.

[17] Maoxiang Wu, On analytic continuation of Mordell-Tornheim and Apostol-Vu L-functions (in Japanese), Master Thesis, Nagoya University, 2003.

[18] D. Zagier, Values of zeta functions and their generalizations, *Proc. First Congress of Math. Paris, vol.II*, Birkhäuser Verlag (1994), 497-512.