数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 145-152

一般化された多重 Dirichlet 級数と一般化された多重ポリログについて
(On generalized multiple Dirichlet series and generalized multiple polylogarithms)

松本耕二 (Kohji Matsumoto) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
津村博文 (Hirofumi Tsumura) 東京都立短期大学経営情報学科

本稿は, この講究録に収録されている津村の記事 [8] と対を成すものとしてお読みいただきたい。

本稿の二人の著者は, いずれも数年前から多重ゼータの研究に携わってきたのだが, その出発点はかなり異なっていた。津村はゼータ関数の特殊値や Bernoulli 数の多重化への関心から, 多重ゼータ値の関係式の研究に向かい, いくつかの結果を得ていたが, 松本の方はゼータ関数の解析的理論のひとつの発展として多重ゼータ関数の解析的な性質の考察に進んできていた。二人の興味が接近しつつあることが判明したのは, 2002 年頃だったと思う。この時期, 津村は Mordell-Tornheim の二重級数の特殊値が満たす関係式やその「交代級数型」の類似を得て, 2002 年 9 月の島根大学での学会などで発表した。また津村は, Borwein, Girgensohn による Euler 型の三重和の研究に示唆されて, Mordell-Tornheim 型の三重和を導入し, その特殊値の間の関係式も得ていた。他方で松本は, 当初は津村とは全く独立に, Mordell-Tornheim の二重級数を多重和へと一般化した多変数ゼータ関数を考え, Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数と名付けて, その解析的な性質を研究していた。松本はその結果を 2002 年 6 月の Bonn での Workshop や, 同年 10 月の数理研での解析数論の研究集会で喋っている。そして松本の研究を知った津村が, 一般の多重 Mordell-Tornheim 型ゼータの特殊値についても研究を開始し, また「特殊値の関係式は実は解析的な関係式の露頭ではなかろうか」という松本の疑問にも興味を持って, [8] で解説されているような関数関係式の研究へと向かったのである。

しかし, 本稿で扱うのは, Mordell-Tornheim 型ではなく, もっと基本的な, Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数を一般化したタイプの多重和である。本稿で述べる結果の Mordell-Tornheim 型での類似も当然成り立つと思われるが, そちらはまだ研究が十分には進展していないので, 本稿では言及しないことにする。

自然数 r に対し, Euler-Zagier の r 重和とは

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{s_r}} \tag{1}$$

で定義される複素 r 変数関数のことである。この和は現在では色々と一般化されているが，本稿での議論と関係するのは次のふたつの一般化である。まず，(1) 式右辺の分子に係数をのせた，

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\frac{a_1(m_1)a_2(m_2)\cdots a_r(m_r)}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{s_r}} \tag{2}$$

という一般化が考えられる。これは $a_j(m_j)$ が Dirichlet 指標の時には Goncharov や Arakawa-Kaneko が考えた多重 L 関数であるが，Matsumoto-Tanigawa [5] はより一般の係数に対して (2) を定義してその解析接続を論じた。一方，Matsumoto [4] は，(1) の分母を

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}(\alpha_1+m_1w_1)^{-s_1}(\alpha_2+m_1w_1+m_2w_2)^{-s_2}\times\cdots$$
$$\cdots\times(\alpha_r+m_1w_1+\cdots+m_rw_r)^{-s_r} \tag{3}$$

と一般化した多重ゼータ関数を導入した。このように一般化したのは，Barnes の多重ゼータ関数 ((3) で $s_1=\cdots=s_{r-1}=0$ の場合) を含めて議論するためであった。但し α_j, w_j は実の parameters である。以下ではこれらの parameters に対して $0<\alpha_j-\alpha_{j-1}\le w_j$ $(1\le j\le r;$ 但し $\alpha_0=0)$ なる条件を要請しておく。

本稿では，更に一般化して，この (2) と (3) の両方を特殊な場合として含むような，次の多重級数を考える。小さい正の数 δ をひとつ固定し，$1\le u\le 1+\delta$ に対し

$$\begin{aligned}\Psi_r(s_1,\ldots,s_r;u)&\\ =\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}&a_1(m_1)a_2(m_2)\cdots a_r(m_r)u^{-(m_1+\cdots+m_r)}(\alpha_1+m_1w_1)^{-s_1}\times\\ &\times(\alpha_2+m_1w_1+m_2w_2)^{-s_2}\times\cdots\times(\alpha_r+m_1w_1+\cdots+m_rw_r)^{-s_r}\end{aligned} \tag{4}$$

とおく。これが本稿の表題に言う「一般化された多重 Dirichlet 級数」である。

分子の係数 $a_j(m_j)$ は一般に複素数であるが，$\Psi_r(s_1,\ldots,s_r;u)$ が良い性質を持つためには当然，これらの係数 $a_j(m_j)$ が解析的に良い性質を持っていなければならない。その性質を，Dirichlet 級数

$$\psi_j(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_j(m)}{(\alpha_j-\alpha_{j-1}+mw_j)^s}\qquad(1\le j\le r), \tag{5}$$

$$\psi_j(s,u)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_j(m)u^{-m}}{(\alpha_j-\alpha_{j-1}+mw_j)^s}\qquad(1\le j\le r), \tag{6}$$

についての性質，という形で述べる。まず

(A) $\psi_j(s)$ が $\sigma=\Re s>q_j$ で絶対収束するような正数 q_j が存在する $(1\le j\le r)$,

と仮定する。そうすると $1<u\le 1+\delta$ に対しては $\psi_j(s,u)$ は s の関数として複素全平面で収束して正則になる。級数 $\psi_j(s)$，つまり $u=1$ の場合については (A) からでは $\sigma\le q_j$ における情報は何も取り出せないので，$\psi_j(s)$ の解析的性質について

(B) $\psi_j(s)$ は全平面に正則に解析接続され, $u \to 1+0$ のとき任意の帯領域 $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$ において一様に $\psi_j(s,u) \to \psi_j(s)$ となる。更に $\tau = \Im s$ と書くと, $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$, $|\tau| \to \infty$ のとき, ある $\theta_0 = \theta_0(\sigma_1, \sigma_2)$, $0 \le \theta_0 < \pi/2$ が存在して $\psi_j(s,u) = O(e^{\theta_0|\tau|})$ となる,

と仮定する。次に, 複素数 t に対し

$$G_1(t;\psi_j;u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_j(m)u^{-m}\exp((\alpha_j - \alpha_{j-1} + mw_j)t) \tag{7}$$

とおく。すると (A) より明らかにこの級数は $\Re t < 0$ で収束するが, 更に

(C) 正数 ρ_j が存在して, $1 \le u \le 1+\delta$ なる任意の u に対し, $G_1(t;\psi_j;u)$ は開円板 $\mathcal{D}(\rho_j) = \{|t| < \rho_j\}$ にまで正則に解析接続できる,

とする。以上 (A), (B), (C) が本稿における基本的な要請である。

注意 1 この要請を満たす有意義な実例が本当にあるのか, という点が誰でも気になるわけだが, 例えば $f_j : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ が周期 m_j の周期関数で, $\sum_{a=1}^{m_j} f_j(a) = 0$ を満たすものとし,

$$L_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)n^{-s}$$

とおけば, $\psi_j = L_j$ が上記 (A), (B), (C) を満たすことは容易に確かめられる。

注意 2 条件 (B) では全平面への正則な解析接続が要請されていることに注意されたい。つまり極は許容していないのである。実を言うと本当はこの (B) を, 有限個の極がある場合を含む, 弱い条件に置き換えたいのであるが, 今までのところそれには成功していない。

多重 Dirichlet 級数 $\Psi_r(s_1,\ldots,s_r;u)$ に対する我々の結果は次の通りである。

定理 1 仮定 (A), (B), (C) の下で, 多重 Dirichlet 級数 $\Psi_r(s_1,\ldots,s_r;u)$ は $\mathbf{C}^r$ 全体に正則に解析接続され, かつ

$$\lim_{u\to 1+0} \Psi_r(s_1,\ldots,s_r;u) = \Psi_r(s_1,\ldots,s_r;1) \tag{8}$$

が成り立つ。

Euler-Zagier 和 (1) を解析接続する方法は今日では色々と知られているが, その中のひとつは Mellin-Barnes の積分公式を用いるもので, (2) や (3) を解析接続した上掲の論文 [4], [5] などでもその方法が適用されている。上の定理 1 の証明も Mellin-Barnes の積分公式による。その詳細はここでは省略するが, 鍵となるのは積分表示

$$\Psi_r(s_1,\ldots,s_r;u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s_r+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_r)} \times$$
$$\times\Psi_{r-1}(s_1,\ldots,s_{r-2},s_{r-1}+s_r+z;u)\psi_r(-z,u)dz \tag{9}$$

である。この表示によって Ψ_r の性質を Ψ_{r-1} の性質に帰着させ, 帰納法によって定理を証明するのである。

さて津村 [8] において, polylogarithm の一般化として

$$F_1(t;d_1;u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-n}e^{nt}}{n^{d_1}} \tag{10}$$

$(t\in\mathbf{C},\ d_1\geq 1,\ 1\leq u\leq 1+\delta)$ を考えた。するとこの級数は t について $\mathcal{D}(\pi)$ にまで解析接続でき, その開円板内で

$$F_1(t;d_1;u)=\sum_{N=0}^{\infty}\phi(d_1-N,u)\frac{t^N}{N!} \tag{11}$$

と Taylor 展開できた。但し

$$\phi(s,u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u)^{-n}}{n^s} \tag{12}$$

(Lerch 型のゼータ関数) である。津村 [8] も注意しているように, 反復積分を用いた polylogarithm の解析接続の方法が d_1 が整数の場合にしか使えないのに比べて, 上の方法は d_1 を連続変数として適用できる点が重要である。津村の方法は (10) を更に一般化した

$$F_1(t;d_1;\psi_1;u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1(n)u^{-n}e^{(\alpha_1+nw_1)t}}{(\alpha_1+nw_1)^{d_1}} \tag{13}$$

$(t\in\mathbf{C},\ d_1\in\mathbf{C},\ \Re d_1>q_1)$ にも使えて, (13) は t について $\mathcal{D}(\rho_1)$ にまで接続できて, その開円板内で

$$F_1(t;d_1;\psi_1;u)=\sum_{N=0}^{\infty}\psi_1(d_1-N,u)\frac{t^N}{N!} \tag{14}$$

を得る。証明の基本方針は 津村 [8] で解説されている (11) の証明と同様である。

本稿の主要目的は, この (11), (14) を多重化した展開公式を報告することにある。本稿の表題に言う「一般化された多重 polylogarithm」とは, $t_j\in\mathbf{C},\ d_j\in\mathbf{C},\ \Re d_j>q_j\ (1\leq j\leq r)$, $1\leq u\leq 1+\delta$ に対し

$$\begin{aligned}F_r(t_1,\ldots,t_r;d_1,\ldots,d_r;\psi_1,\ldots,\psi_r;u)\\ =\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty}a_1(n_1)\cdots a_r(n_r)u^{-(n_1+\cdots+n_r)}\times\\ \times\prod_{j=1}^{r}\frac{e^{(\alpha_j+n_1w_1+\cdots+n_jw_j)t_j}}{(\alpha_j+n_1w_1+\cdots+n_jw_j)^{d_j}}\end{aligned} \tag{15}$$

で定義される多重級数である。これは明らかに (13) の多重化である。

注意 3 もし $\psi_1, \ldots, \psi_r$ をすべて Riemann のゼータ関数ととることができれば, (15) の特殊な場合である

$$F_r(\log x_1, \ldots, \log x_r; d_1, \ldots, d_r; \zeta, \ldots, \zeta; 1)$$

は Goncharov [2] が導入した多重 polylogarithm と一致する。しかしながら現状では条件 (B) が極を許容しないため, $\psi_1, \ldots, \psi_r$ を Riemann ゼータ関数にすることはできず, Goncharov の多重 polylogarithm を我々の理論の中で扱うことができない。従って注意 2 に述べたように条件 (B) を弱めることが望ましい。

多重級数 (15) は $\Re t_j \leq 0$ $(1 \leq j \leq r)$ で収束するが, これに対して我々は次の結果を証明することができる。

定理 2 条件 (A), (B), (C) の下で, $\Re d_j > q_j$ $(1 \leq j \leq r)$, $1 \leq u \leq 1+\delta$ に対し, F_r を $t_1, \ldots, t_r$ の関数として

$$\mathcal{D}_r(\eta) = \{(t_1, \ldots, t_r) \in \mathbf{C}^r \mid |t_j| < \eta \quad (1 \leq j \leq r)\}$$

に正則に解析接続できる。但し

$$\eta = \min_{1 \leq j \leq r} \left\{ \frac{\rho_j}{2^{r-1}} \right\}$$

である。そして F_r は $\mathcal{D}_r(\eta)$ において

$$F_r(t_1, \ldots, t_r; d_1, \ldots, d_r; \psi_1, \ldots, \psi_r; u)$$
$$= \sum_{N_1, \ldots, N_r = 0}^{\infty} \Psi_r(d_1 - N_1, \ldots, d_r - N_r; u) \frac{t_1^{N_1} \cdots t_r^{N_r}}{N_1! \cdots N_r!} \tag{16}$$

と Taylor 展開される。

この定理は, 「一般化された多重 Dirichlet 級数」が, 「一般化された多重 polylogarithm」の Taylor 展開係数として現われる, という両者の基本的な関係を明らかにしている。上式右辺の Ψ_r の中の変数は, N_j の値が大きくなるに連れて, その実部が $-\infty$ の方向へとどんどん動いていく。このことは, Ψ_r の複素全空間への解析接続 (定理 1) が, 上記の関係の発見には不可欠であったことを物語っている。

注意 4 定理 2 の原型は Tsumura [7] にある。

定理 2 の証明の方針だけ簡単にスケッチしておく。級数 F_r の定義式 (15) は $\Re t_j \leq 0$ $(1 \leq j \leq r)$ で収束するので, 津村 [8] における (11) の証明のときと同様に, まず $t_j = i\theta_j$ (θ_j は実数) とする。更に当面 $u > 1$ として, (15) の右辺の $e^{(\alpha_r + n_1 w_1 + \cdots + n_r w_r)t_r}$ の部分を Taylor 展開して和の順序を交換すれば, (15) の右辺は

$$\sum_{N_r=0}^{\infty} Z_r(i\theta_1, \ldots, i\theta_{r-1}; d_1, \ldots, d_{r-1}, d_r - N_r; u) \frac{(i\theta_r)^{N_r}}{N_r!} \tag{17}$$

となる。但し

$$Z_r(t_1,\ldots,t_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},s;u)=F_r(t_1,\ldots,t_{r-1},0;d_1,\ldots,d_{r-1},s;\psi_1,\ldots,\psi_r;u),$$

特に

$$\begin{aligned}&Z_r(i\theta_1,\ldots,i\theta_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},s;u)\\&=\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty}a_1(n_1)\cdots a_r(n_r)u^{-(n_1+\cdots+n_r)}\times\\&\times\prod_{j=1}^{r-1}\frac{e^{(\alpha_j+n_1w_1+\cdots+n_jw_j)i\theta_j}}{(\alpha_j+n_1w_1+\cdots+n_jw_j)^{d_j}}(\alpha_r+n_1w_1+\cdots+n_rw_r)^{-s}\end{aligned}\tag{18}$$

である。この右辺の指数関数の部分を Taylor 展開すれば

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{r-1}e^{(\alpha_j+n_1w_1+\cdots+n_jw_j)i\theta_j}\\&=\sum_{N_1,\ldots,N_{r-1}=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{((\alpha_j+n_1w_1+\cdots+n_jw_j)i\theta_j)^{N_j}}{N_j!}\end{aligned}$$

なので, Ψ_r の定義 (4) を思い出せば

$$\begin{aligned}&Z_r(i\theta_1,\ldots,i\theta_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},s;u)\\&=\sum_{N_1,\ldots,N_{r-1}=0}^{\infty}\Psi_r(d_1-N_1,\ldots,d_{r-1}-N_{r-1},s;u)\frac{(i\theta_1)^{N_1}\cdots(i\theta_{r-1})^{N_{r-1}}}{N_1!\cdots N_{r-1}!}\end{aligned}\tag{19}$$

となる。これを (17) に代入すれば, 定理の結論が $t_j=i\theta_j$ $(1\le j\le r)$, $u>1$ に対して得られたことになる。上の計算過程の中で行なわれたいくつかの和の順序交換を保証するために, $u>1$ が当面は必要だったのである。

そこで後は, $(t_1,\ldots,t_{r-1})=(0,\ldots,0)$ の近傍における $Z_r(t_1,\ldots,t_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},s;u)$ の適当な上からの評価を示すことができれば, $\mathcal{D}_r(\eta)$ において

$$\begin{aligned}&F_r(t_1,\ldots,t_r;d_1,\ldots,d_r;\psi_1,\ldots,\psi_r;u)\\&=\sum_{N_r=0}^{\infty}Z_r(t_1,\ldots,t_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},d_r-N_r;u)\frac{t_r^{N_r}}{N_r!}\end{aligned}\tag{20}$$

を定義することができ, これが (15) の $\mathcal{D}_r(\eta)$ への解析接続を与え, 同時にその範囲での求める展開式 (16) を与えることになる。

そこで $Z_r(t_1,\ldots,t_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},s;u)$ を評価するために, 次のような contour 積分表示を用いる。積分路 $\mathcal{C}$ を $+\infty$ から実軸上を小さい正の数 δ まで進んだ後, 原点を中心とする半径 δ の円周上を反時計回りに一周し, 最後に δ から再び実軸上を $+\infty$ まで戻る contour とすれば,

$$\begin{aligned}Z_r(t_1,\ldots,t_{r-1};d_1,\ldots,d_{r-1},s;u)&=\frac{1}{(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)}\times\\&\times\int_{\mathcal{C}}G_r(-t;d_1,\ldots,d_{r-1};u)t^{s-1}dt\end{aligned}\tag{21}$$

となる。但し

$$G_r(-t;d_1,\ldots,d_{r-1};u) \\ =F_{r-1}(t_1,\ldots,t_{r-2},t_{r-1}-t;d_1,\ldots,d_{r-1};\psi_1,\ldots,\psi_{r-1};u)G_1(-t;\psi_r;u) \tag{22}$$

である。この右辺の第一因子は, $r=2$ なら (13) に他ならないから, その (原点の近傍での) 正則性は既に得られている。そこで帰納法により, (22) 右辺の第一因子は $t_1,\ldots,t_{r-2},t_{r-1}-t$ が十分小さければ正則であると仮定してよい。また右辺の第二因子は 仮定 (C) によりやはり原点の近傍で正則である。従って (22) の右辺は原点の近傍で正則であり, よって (21) の表示が (十分小さい δ に対し) 可能となるのである。

表示 (21) を用いて Z_r を評価する議論の詳細は省略するが, 大切な点は u についての一様性である。証明のこの段階ではまだ $u>1$ なる仮定が残っているのであるが, 最終的には $u\to 1$ の極限をとって $u=1$ の場合の式も出さねばならないので, 評価を u について一様に示す必要があり, 従って議論はその分少々デリケートになる。しかし基本的には, G_r の原点での正則性によりその Taylor 展開を考え, 展開係数を関数論的に評価していく, という方針で望ましい評価を得ることができる。

こうして証明された定理 2 は色々と応用が期待できる結果であるが, ここでは簡単な応用例にふたつだけ言及しておきたい。まず, $a_j=f_j$ $(1\le j\le r)$ を注意 1 で述べたような周期関数とし, これらを係数にもつ多重 Dirichlet 級数

$$L_r(s_1,\ldots,s_r;f_1,\ldots,f_r) \\ =\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}\frac{f_1(m_1)f_2(m_2)\cdots f_r(m_r)}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{s_r}} \tag{23}$$

を考える。これは (2) の特別な場合であり, 従って [5] において解析接続などは証明済である。定理 2 をこの場合に適用すると,

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty}\frac{f_1(n_1)f_2(n_2)\cdots f_r(n_r)\cos((n_1+\cdots+n_r)\theta)}{n_1^{d_1}(n_1+n_2)^{d_2}\cdots(n_1+\cdots+n_r)^{d_r}} \\ =\sum_{N=0}^{\infty}L_r(d_1,\ldots,d_{r-1},d_r-2N;f_1,\ldots,f_r)\frac{(i\theta)^{2N}}{(2N)!} \tag{24}$$

を得る。この式で $r=1$, f_j たちが Dirichlet 指標としたときには, L_r は通常の Dirichlet の L 関数になるが, このときの (24) 式は Berndt [1] や Katsurada [3] によって以前に得られていたものである。即ち (24) は Berndt や Katsurada の結果の多重化版であり, また逆に言えば Berndt や Katsurada の結果の本質を polylogarithm の Taylor 展開という形で (24) が明らかにしている, と捉えることもできるであろう。

また, 定理 2 に多変数関数の Taylor 展開係数の評価の一般論を適用すれば,

$$\limsup_{N_1+\cdots+N_r\to\infty}\left\{\frac{|\Psi_r(d_1-N_1,\ldots,d_r-N_r;u)|}{N_1!\cdots N_r!}\right\}^{1/(N_1+\cdots+N_r)}\le\eta^{-1} \tag{25}$$

なる不等式が得られる。これは多重 Dirichlet 級数の新しい評価式の一種と見なせるであろう。

本稿で述べた研究のそもそもの動機付けであった関数関係式と定理 2 との関係については, 別の機会に譲ることにして本稿では扱わないことにする。また本稿においては省略した定理 1, 2 の証明の詳細等については, プレプリント [6] をご覧いただきたい。本稿で述べた方法は, (11) の証明に関連して注意したように, 連続変数の polylogarithm, 多重 polylogarithm に対して適用可能であるところが長所である。従ってこの方法によって, 多重 polylogarithm の理論の, 反復積分の手法では取り扱えない解析的な側面を開拓できるのではないかと秘かに (とはいえここに書いてしまうと秘かではなくなるが) 期待しているところである。

参考文献

[1] B. C. Berndt, Character analogues of the Poisson and Euler-Maclaurin summation formulas with applications, J. Number Theory **7** (1975), 413-445.

[2] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes, Math. Res. Letters **5** (1998), 497-516.

[3] M. Katsurada, Rapidly convergent series representations for $\zeta(2n+1)$ and their χ-analogue, Acta Arith. **90** (1999), 79-89.

[4] K. Matsumoto, The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I, J. Number Theory **101** (2003), 223-243.

[5] K. Matsumoto and Y. Tanigawa, The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **15** (2003), 267-174.

[6] K. Matsumoto and H. Tsumura, Generalized multiple Dirichlet series and generalized multiple polylogarithms, Tokyo Metropolitan Univ. Math. Preprint Ser. 2004: No. 13; submitted for publication.

[7] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, Acta Arith. **111** (2004), 27-42.

[8] 津村博文, Mordell-Tornheim 型二重ゼータ関数と Riemann ゼータ関数の間の関数関係式およびその χ 類似について, 本講究録.