数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 169-176

p 進多重ゼータ値の双対性について

九州大学・数理学府　田中 立志 (Tatsushi Tanaka)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 definition

本文中の p はすべて素数とする.

p 進多重ゼータ値の定義は, Coleman の p 進積分論を用いた古庄 [F] の仕事である. 本報告集ではその本質的な部分は省き, 定義に至るまでの話を概説することにする.

$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$Li_{k_1,\ldots,k_n}(z) := \sum_{m_1>\cdots>m_n>0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

なる $\mathbb{C}_p$ 上の関数を (重さ $k := k_1+\cdots+k_n$, 深さ n の) p 進多重ポリログ, pMPL という. これは $|z|_p < 1$ で収束している.

この関数を $z=1$ でも意味あるものにするべく, まずは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)-\{1,\infty\}$ まで解析接続する. そのために必要な理論が Coleman の p 進積分論である. その解析接続された pMPL をもって改めて pMPL ということにする. すなわち, p 進多重ポリログとは, 次のように帰納的に定まる $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)-\{1,\infty\}$ 上の Coleman 関数である.

$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}_p$ に対して,

$$Li^a_{k_1,\ldots,k_n}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z \frac{1}{t} Li^a_{k_1-1,k_2,\ldots,k_n}(t)\, dt & (k_1>1), \\ \displaystyle\int_0^z \frac{1}{1-t} Li^a_{k_2,\ldots,k_n}(t)\, dt & (k_1=1). \end{cases}$$

$$Li^a_1(z) = -\log^a(1-z) \left(= \int_0^z \frac{dt}{1-t}\right).$$

$\log^a$ は p 進対数関数であり, a ごとに定まる ($\log^a(p)=a$). p 進多重ポリログはこの $\log^a$ ごとに定まる関数である. この形で帰納的に定義するのは, もとの $|z|_p<1$ での級数表示から求まる, z に関する微分関係式に由来する. 積分の記号はすべて Coleman の p 進積分である.

そこで, この pMPL を極限値 $\lim'_{z\to1}$ をとったものが (収束すればそれが) p 進多重ゼータ値, pMZV である. 重さ, 深さの概念は pMPL のそれと同じである.

$$\zeta_p(k_1,\ldots,k_n) := \lim_{z\to1}{}' Li^a_{k_1,\ldots,k_n}(z)$$

ここに, $\mathbb{C}_p$ 上の関数 $f(z)$ に対して, $\lim'_{z\to 1} f(z)$ とは, 次の 2 条件を満たす任意の数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 極限値 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ が同じ値に収束するときにその値を表す.

(i) $z_n \to \alpha \quad$ in $\mathbb{C}_p$,

(ii) $e(\mathbb{Q}_p(z_1, z_2, \dots)/\mathbb{Q}_p) < \infty$ (i.e. 分岐指数有限の拡大).

$\lim'_{z\to 1} Li^a_{k_1,\dots,k_n}(z)$ が収束するか否か, 及び収束したときの値は a によらないこと, $k_1 > 1$ ならいつも収束し, $k_1 = 1$ でも収束することもあること, さらに, pMZV は値を $\mathbb{Q}_p$ に持つことも知られている.

2 known results and main results

§1 で定義した pMZV の性質として, 特殊値, 関係式, pMZV たちが張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の次元予想を見ていくことにする. 主結果については証明もつける.

$\boxed{\text{特殊値}}$

(1) [C] によると, 深さ 1 の pMZV は久保田-Leopoldt の p 進 L 関数の特殊値に一致する.

$$\zeta_p(k) = \frac{p^k}{p^k - 1} L_p(k, \omega^{1-k}) \quad (k > 1).$$

ω は Teichmüler 指標である. 特に, $\zeta_p(2k) = 0$ や, $\zeta_p(2k+1) \neq 0$ ($p|(k-1)$ または p は正則素数) が Soulé [S] などにより知られている.

(2) $\zeta_p(2k) = 0$ と, 後述の harmonic product formula を用いると,

$$\zeta_p(2k, \dots, 2k) = 0$$

であることが分かる.

Proof. インデックスの深さに関する帰納法. 深さ 2 のとき, harmonic product formula より

$$\zeta_p(2k)^2 = 2\zeta_p(2k, 2k) + \zeta_p(4k).$$

従って, $\zeta_p(2k, 2k) = 0$ が得られる.

深さが $n-1$ まで成り立つとして深さ n のときを考える. やはり harmonic product formula より

$$\zeta_p(2k)\zeta_p(\underbrace{2k, \dots, 2k}_{n-1}) = n\zeta_p(\underbrace{2k, \dots, 2k}_{n}) + \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_p(\underbrace{2k, \dots, \overset{\overset{i}{\vee}}{4k}, \dots, 2k}_{n-1}),$$

$$\zeta_p(4k)\zeta_p(\underbrace{2k,\dots,2k}_{n-2})=\sum_{i=1}^{n-1}\zeta_p(\underbrace{2k,\dots,\overset{\overset{i}{\vee}}{4k},\dots,2k}_{n-1})+\sum_{j=1}^{n-2}\zeta_p(\underbrace{2k,\dots,\overset{\overset{j}{\vee}}{6k},\dots,2k}_{n-2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta_p(2kn-2k)\zeta_p(2k)=\zeta_p(2kn-2k,2k)+\zeta_p(2k,2kn-2k)+\zeta_p(2kn).$$

辺々交代的に加え, $\zeta_p(2k)=0$ $(k\in\mathbb{N})$ を用いると $\zeta_p(\underbrace{2k,\dots,2k}_{n})=0$ が得られる. □

(3) (2) の事実と, 後述の shuffle product formula を用いると,

$$\zeta_p(3,1,\dots,3,1)=0,\ \sum_{\mathbf{k}\in I}\zeta_p(\mathbf{k})=0$$

であることが分かる. 但し, I はインデックス $(\underbrace{3,1,\dots,3,1}_{2n})$ の間に 2 を 1 つだけ入れた, 深さが $2n+1$ のインデックス全体. 証明には shuffle 積代数 $\mathfrak{H}^0_{\text{ш}}$ $(:=\mathbb{Q}+x\mathfrak{H}y$, 後述$)$ における恒等式 [BBBL] を用いる.

Proof. $\mathfrak{H}^0$ で次のような式が成り立つ:

$$\sum_{i=-n}^{n}\{(xy)^{n-i}\,ш\,(xy)^{n+i}\}=4^n(x^2y^2)^n.$$

辺々 Z_p を施すと

$$\sum_{i=-n}^{n}(-1)^i\zeta_p(\underbrace{2,\dots,2}_{n-i})\zeta_p(\underbrace{2,\dots,2}_{n+i})=4^n\zeta_p(\underbrace{3,1,\dots,3,1}_{2n}).$$

従って, $\zeta_p(\underbrace{3,1,\dots,3,1}_{2n})=0$ が得られる. また, $\mathfrak{H}^0$ で次のような式が成り立つ:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(2i+1)\{(xy)^{n-i}\,ш\,(xy)^{n+1+i}\}$$

$$=4^n\Bigl(\sum_{i=0}^{n}(x^2y^2)^ixy(x^2y^2)^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}(x^2y^2)^{i-1}x^2yxy^2(x^2y^2)^{n-i}\Bigr).$$

辺々 Z_p を施すと

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(2i+1)\zeta_p(\underbrace{2,\dots,2}_{n-i})\zeta_p(\underbrace{2,\dots,2}_{n+1+i})=4^n\sum_{\mathbf{k}\in I}\zeta_p(\mathbf{k}).$$

従って, $\sum_{\mathbf{k}\in I}\zeta_p(\mathbf{k})=0$ が得られる. □

関係式

まず, 2 変数の非可換多項式環 $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ 上の shuffle 積 (ш) 構造, $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$ 上の harmonic 積 $(*)$ 構造と Z_p なる evaluation map を定義する.

演算ш : $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ は次で定義される.

(i) $\mathbb{Q}$-双線形性

(ii) 任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対し, $w \,ш\, 1 = 1 \,ш\, w = w$,

(iii) $u_i = x$ または y $(i = 1, 2)$ と任意の words $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ に対し

$$(u_1w_1) \,ш\, (u_2w_2) = u_1(w_1 \,ш\, u_2w_2) + u_2(u_1w_1 \,ш\, w_2).$$

$\mathfrak{H}$ は積шにより可換代数となる. これを $\mathfrak{H}_{ш}$ と書く.

演算 $*$: $\mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \longrightarrow \mathfrak{H}^1$ は次で定義される.

(i) $\mathbb{Q}$-双線形性

(ii) 任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対し, $w * 1 = 1 * w = w$,

(iii) 任意の $p, q \in \mathbb{N}$ と任意の words $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対し

$$z_pw_1 * z_qw_2 = z_p(w_1 * z_qw_2) + z_q(z_pw_1 * w_2) + z_{p+q}(w_1 * w_2).$$

$\mathfrak{H}^1$ は積 $*$ により可換代数となる. これを $\mathfrak{H}^1_*$ と書く.

$\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ $(\subset \mathfrak{H}^1 \subset \mathfrak{H})$ とおくと, $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}_{ш}$ の, $\mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}^1_*$ の部分代数となる. これらをそれぞれ $\mathfrak{H}^1_{ш}, \mathfrak{H}^0_{ш}, \mathfrak{H}^1_*$ と書く.

$\mathfrak{H}^0$ の各 word を pMZV に evaluate する $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z_p : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ を

$$Z_p(x^{a_1}y^{b_1} \cdots x^{a_s}y^{b_s}) = \zeta_p(a_1 + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1-1}, \ldots, a_s + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_s-1})$$

$(a_i, b_i \geq 1)$ で定義する. 2 つの shuffle relation とは写像 Z_p がш積と $*$ 積について $\mathbb{Q}$-代数準同型になるというものである.

Theorem 2.1. ([BF], [F])

(1) **shuffle product formula** 任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z_p(w \,ш\, w') = Z_p(w)Z_p(w').$$

(2) **harmonic product formula** 任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z_p(w * w') = Z_p(w)Z_p(w').$$

特に,

(3) **double shuffle relation** 任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z_p(w \sqcup\!\sqcup\, w' - w * w') = 0.$$

Main Theorem 2.2. duality 任意の $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z_p(w) = Z_p(\tau(w)).$$

ここに, $\tau : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathfrak{H}^0$ は $x \longmapsto y, y \longmapsto x$ で定義される反自己同型である.

(1) の shuffle product formula を用いれば, p 進 Drinfel'd associator の 2-cycle relation と pMZV の duality とが equivalent であることが分かる. 両者を結びつけたものは, formal associator の 2-cycle relation (§3 で述べる) であった. このことを本報告集での主結果とする.

Proof. p 進 Drinfel'd associator の 2-cycle relation

$$\Phi^p_{KZ}(X, -Y) = {\Phi^p_{KZ}}^{-1}(-Y, X)$$

は, formal associator を evaluate したものとして,

$$Z_p(\widehat{\Phi}(X, Y)) = Z_p(\widehat{\Phi}^{-1}(-Y, -X))$$

と書ける. formal associator の 2-cycle relation

$$\widehat{\Phi}^{-1}(-Y, -X) = \tau(\widehat{\Phi}(X, Y))$$

を用いて係数比較すると pMZV の duality が出る. 逆を辿れば両者が equivalent であることが分かる. □

また, 古庄氏による以下の証明もある. 従来の p 進 KZ 方程式

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{u-1}\right) G(u)$$

を左 p 進 KZ 方程式と呼ぶことにする. これには基本解 $G_0(u), G_1(u)$ で,

$$\lim_{\epsilon \to 0} G_0(\epsilon) \cdot \epsilon^{-X} = 1, \ \lim_{\epsilon \to 0} G_1(1-\epsilon) \cdot \epsilon^{-Y} = 1$$

をみたすものが一意的に存在する. 同様に, 右 p 進 KZ 方程式

$$\frac{\partial H}{\partial u} = H(u) \left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{u-1}\right)$$

には, 基本解 $H_0(u), H_1(u)$ で,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-X}\cdot H_0(\epsilon)=1,\ \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-Y}\cdot H_1(1-\epsilon)=1$$

をみたすものが一意的に存在する. この解たちに,

$$H_0(u)=G_1(-Y,-X;1-u)^{-1}$$

$$H_1(u)=G_0(-Y,-X;1-u)^{-1}$$

なる関係[1] があるため,

$$\Phi^p_{KZ}(X,Y)=\lim_{\epsilon\to 0}{}' H_0(-Y,-X;1-\epsilon)\epsilon^{-X}$$

と書ける. この式の両辺の $X^{k_1-1}Y\cdots X^{k_n-1}Y$ $(k_1>1)$ の係数を比較すれば pMZV の duality が得られる.

その他, p 進でない MZV で成り立つ種々の関係式が pMZV でも成り立つかどうかは open problem である.

$\boxed{\text{次元予想}}$
重さ k の pMZV たちが張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{Z}^p_k$ を

$$\mathcal{Z}^p_k:=\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\mathbb{Q}\cdot\zeta_p(k_1,\ldots,k_n)$$

と書くことにする. このとき, 次元予想とは, 数列 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $d_0=1, d_1=0, d_2=1, d_k=d_{k-2}+d_{k-3}$ $(k\geq 3)$ をみたすとするとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}^p_k\overset{?}{=}d_{k-3}$$

というものである. 山下氏により $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}^p_k\leq d_{k-3}$ が示された. (本報告集の山下氏の頁参照.)

3 associator

まず, Le-Murakami [LM] の手法を用いて, 古庄 [F] により定義された p 進 Drinfel'd associator を構成的に定義する.

---

[1]右 p 進 KZ 方程式はその作り方からそもそも G^{-1} の微分方程式になっています. 本集会中早稲田大学の大井氏による御指摘もありました.

$\mathbb{C}_p$-代数準同型 $g_1 : \mathbb{C}_p\langle\langle X, Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}_p[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を, $X \longmapsto X-\xi$, $Y \longmapsto Y-\eta$ で, $\mathbb{C}_p$-線形写像 $g_2 : \mathbb{C}_p[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}_p\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を, $\eta^p M \xi^q \longmapsto Y^p M X^q$ $(M \in \{X, Y\}^*)$ で定義する. また, pMZV たちを係数にもつ 2 変数の非可換巾級数 $\varphi^p(X, Y)$ を,

$$\varphi^p(X,Y) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 2 \\ k_2, \ldots, k_n \geq 1}} (-1)^n \zeta_p(k_1, \ldots, k_n) X^{k_1-1}Y \cdots X^{k_n-1}Y$$

とおく. この $\varphi^p(X, Y)$ に g_1 と g_2 の合成を施したものが p 進 Drinfel'd associator $\Phi^p_{KZ}(X, Y)$ である.

$$\Phi^p_{KZ}(X,Y) = g_2 \circ g_1(\varphi^p(X,Y))$$

さて, formal associator $\widehat{\Phi}(X, Y)$ とは,

$$\widehat{\Phi}(X,Y) := \exp_{ш}(-yY) \cdot \sum_{\substack{w \in \{x,y\}^* \\ W = \mathrm{Cap}(w)}} wW \cdot \exp_{ш}(-xX)$$

で定義される $\mathfrak{H}_{ш}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ の元である. ここに, $\{x, y\}^*$ は x と y の word 全体, $\mathrm{Cap}(w)$ は w の大文字化, $\exp_{ш}(-yY)$ は,

$$\exp_{ш}(-yY) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{ш n} \frac{Y^n}{n!}$$

である. ($y^{ш n}$ は y の n 個の ш 積による積.) $\widehat{\Phi}(X, Y)$ は実は $\mathfrak{H}^0_{ш}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ の元である.

Drinfel'd associator は formal associator $\widehat{\Phi}(X, Y)$ を evaluate することで得られることが [IKZ] (の予稿版) により知られている. それは p 進でも同様である.

$$\Phi^p_{KZ}(X,Y) = Z_p(\widehat{\Phi}(X,-Y)).$$

[T] では $\widehat{\Phi}^{-1}(X, Y)$ を計算し,

$$\widehat{\Phi}^{-1}(X,Y) := \exp_{ш}(xX) \cdot \sum_{\substack{w \in \{x,y\}^* \\ W = \mathrm{Cap}(w)}} S(w)W \cdot \exp_{ш}(yY)$$

であることを導いている. ここに, $S : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ は $x \longmapsto -x, y \longmapsto -y$ で定まる反自己同型. このことから,

$$\widehat{\Phi}(X,Y) \cdot \tau(\widehat{\Phi}(-Y,-X)) = 1$$

であることが分かる. (τ は係数のみにかかるものとする.) これが formal なレベルでの 2-cycle relation である.

参考文献

[BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisoněk ; Combinatorial aspects of multiple zeta values, The Electronic J. of Combinatorics, Volume 5(1) (1998), R38.

[BF] A. Besser and H. Furusho ; The double shuffle relation of p-adic multiple zeta values, preprint, arXiv : math.NT/0310177.

[C] R. F. Coleman ; Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions, Invent. Math. 69 (1982), no. 2, pp. 171-208.

[F] H. Furusho ; p-adic multiple zeta values I—p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation, Invent. Math. 155 (2004), no. 2, pp. 253-286.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D.Zagier ; Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Max-Planck-Institut für Mathematik preprint series 2004-100.

[LM] T. Q. T. Le and J. Murakami ; Kontsevich's integral for Kauffman polynomial, Nagoya Math. J. 142 (1996), pp. 39-65.

[S] C. Soulé ; On higher p-adic regulators, Algebraic K-theory, Evanston 1980, Lecture Notes in Math., 854, Springer, Berlin-New York (1981), pp. 372-401.

[T] T. Tanaka ; A few applications of shuffle products for p-adic multiple zeta values, Master's thesis, Kyushu University (2004).