数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 177-193

多重ゼータ値の量子場理論的表現法について

星薬科大学・物理学研究室　中川　弘一 (Koichi Nakagawa)
Physics, Hoshi University

概要

量子場理論に基づく，多重ゼータ値の表現法が Müller と Schubert により提案され，いくつかの関係式が導かれた．今回の発表では，この表現法の基礎になるゼータ模型と，その模型から Feynman の経路積分により導かれる，Feynman 図形を用いた計算法について紹介した．

1　序論

量子場理論における散乱振幅の摂動計算は，様々な特殊関数の性質に関する知識に基づき発展してきた．それらの特殊関数のうち，ゼータ関数には数学の研究においてだけでなく物理学の研究においてもとても興味深い性質がある．例えば，Riemann ゼータ関数の値を用いた Casimir エネルギーの正則化法がその１つとして挙げられる [1]．また，Feynman 振幅の紫外発散の分類や多重ループの計算において，多重ゼータ値 (MZV) や多重対数関数を用いた計算の重要性が Broadhurst 達によって指摘されている [2].

一方，整数点における MZV の中にはまだ具体的に求められていないものがあり，これらの値の間の関係式を求める試みが，数学の関連分野において注目されている [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]．それらの研究の中では，MZV の関係式と結び目 (knot) との関連も調べられており，物理的にも興味深いテーマである [2].

以上の観点から，Müller と Schubert は 1 次元スカラー場の量子論の具体的な模型（ゼータ模型）を考案し，Feynman 規則を導き，MZV に関するある関係式を導き出した [10]．この模型の Feynman 図形のうち 'sea shell' diagram とよばれる図形の振幅が MZV に比例し，この図形の変形により MZV の間の関係式が導かれることがゼータ模型の特徴である．これらの関係式のいくつかは他の数学の分野で証明されている関係式と対応するが，いまだその対応がつかないものもある．この発表では MZV に関する Müller-Schubert のゼータ模型を紹介し，数学的なアプローチとの関連性をより明確なものにするための議論を行った．

MVZ は，正の整数 $k_1 \geq 2; k_2, k_3, \cdots, k_n \geq 1$ に対し

$$\zeta(k_1, k_2, \cdots, k_n) := \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0} \frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}} \tag{1}$$

で定義される．(1) の右辺の級数は $k_1>1$ のときに収束し，$k_1=1$ のときに発散する．$k:=k_1+k_2+\cdots+k_n$ は MZV の重さ，n は MZV の深さ (または長さ) とよばれ，深さが 1 の MZV は Riemann ゼータ関数の整数点での値になる．

MZV のうち具体的に求められている値には次のようなものがある [3].

$$\zeta(\underbrace{2k,2k,\cdots,2k}_{n\text{ 個}})=\frac{C_n^{(k)}(2\pi i)^{2nk}}{(2nk)!}. \tag{2}$$

ここで $C_n^{(k)}$ は漸化式

$$C_0^{(k)}=1;\ C_n^{(k)}=\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2nk}{2mk}B_{2mk}C_{n-m}^{(k)} \tag{3}$$

により定められた有理数である．

$$\zeta(\underbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1}_{2n\text{ 個}})=\frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!} \tag{4}$$

および

$$\begin{aligned}1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(m+1,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1\text{ 個}})X^mY^n&=\frac{\Gamma(1-Y)\Gamma(1-X)}{\Gamma(1-X-Y)}\\&=\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\frac{X^n+Y^n-(X+Y)^n}{n}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

(5) 式の左辺の展開係数になっている MZV には

$$\zeta(m+1,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1\text{ 個}})=\zeta(n+1,\underbrace{1,\cdots,1}_{m-1\text{ 個}}) \tag{6}$$

という関係があり，この関係は MZV の双対性 (7) の一種である．また，MZV の間の関係式として次のものが挙げられる [3].

双対性. 収束インデックス $\mathbf{k}$ とその双対インデックス $\mathbf{k}'$ に対し

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}'). \tag{7}$$

Hoffman の関係式. 収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ に対し

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\zeta(k_1,\cdots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\cdots,k_n)\\&=\sum_{\substack{1\le l\le n\\k_l\ge 2}}\sum_{j=0}^{k_l-2}\zeta(k_1,\cdots,k_{l-1},k_l-j,j+1,k_{l+1},\cdots,k_n).\end{aligned} \tag{8}$$

和公式. weight k と depth n を固定すると

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k \\ k_1\geq 2;\ \forall k_i\geq 1}} \zeta(k_1,\cdots,k_n)=\zeta(k). \tag{9}$$

Ohno の関係式. 互いに双対な収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ と $\mathbf{k}'=(k'_1,k'_2,\cdots,k'_{n'})$ と任意の正整数 l に対し

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n=l \\ \forall\varepsilon_i\geq 0}} \zeta(k_1+\varepsilon_1,\cdots,k_n+\varepsilon_n)=\sum_{\substack{\varepsilon'_1+\cdots+\varepsilon'_{n'}=l \\ \forall\varepsilon'_i\geq 0}} \zeta(k'_1+\varepsilon'_1,\cdots,k'_{n'}+\varepsilon'_{n'}). \tag{10}$$

双対性，Hoffman の関係式，和公式はすべて Ohno の関係式から導くことができる．他にもいろいろな関係式が見つかっており，結び目の不変量から導かれるものもある．

今回発表する，Müller と Schubert のゼータ模型のように，量子場理論で用いられる計算法に基づき，上記の MZV の具体的な値 (2)~(5) や関係式 (7)~(10) を導くことができるか否かということは，ゼータ模型の正当性とも関連し，とても興味深い問題であるが，現在のところ未解決のままである．

2 ゼータ模型

1 次元複素スカラー場 $x(u)$ の系として，次の作用積分 S で与えられる模型を考える．

$$\begin{aligned} S &:= S_K+S_I; \\ S_K &= \frac{1}{2}\int_0^1 du\ \overline{x}(u)\left(1-2\pi i\lambda\partial^{-1}\right)x(u); \\ S_I &= -\int_0^1 du\ \mathrm{e}^{gx(u)+\overline{g}\overline{x}(u)}. \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，S_K，S_I は運動項，相互作用項とそれぞれよばれ，$\overline{x}(u)$ は $x(u)$ の複素共役を表し，g, $\overline{g}$ はそれぞれ結合定数を表し，$\partial:=\dfrac{d}{du}$ である．また，∂^{-1} は定数項を除く微分の逆演算を右の関数に作用する作用素とみなし，λ は ∂^{-1} の逆の次元（長さの逆の次元）を持つ正のパラメータとして導入される．

Feynman の経路積分法による場の量子化は，(11) 式の作用積分 S から作られる，Euclide 化された経路積分（分配関数）

$$Z(g,\overline{g},\lambda)=\int_{\mathscr{H}}\mathscr{D}x\mathscr{D}\overline{x}\ \mathrm{e}^{-S}. \tag{12}$$

に基づき，場の期待値を計算することにより実行される．(12) 式右辺の汎関数積分の記号 $\int_{\mathscr{H}}\mathscr{D}x\mathscr{D}\overline{x}$ は，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ に属する可能な $x(u)$, $\overline{x}(u)$ 全体にわたって積分することを

表し，この模型に関する具体的な定義は次の通りである．(11) 式の 1 次元複素スカラー場 $x(u)$, $\overline{x}(u)$ を，それぞれ，直交関数系 $\{\mathrm{e}^{\pm 2\pi i n u} | n \in \mathbb{N},\ u \in [0,1]\}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
x(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n u}; \\
\overline{x}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\dagger} \mathrm{e}^{-2\pi i n u}; \\
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 &< 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

と展開するとき，(12) 式右辺の汎関数積分は次の多重積分により表すことができる．

$$
\int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}x \mathscr{D}\overline{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \int da_n da_n^{\dagger} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\,(\mathrm{Re}\ a_n)\, d\,(\mathrm{Im}\ a_n) \right\}. \tag{14}
$$

また，$x(u)$, $\overline{x}(u)$ の展開式 (13) を (11) の運動項に代入すると

$$
S_K = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right) \tag{15}
$$

が得られる．

次に，自由場についての分配関数 $Z(0,0,\lambda)$ を計算する．$g = \overline{g} = 0$ の場合の (12) 式に (14),(15) 式を代入し，汎関数積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
Z(0,0,\lambda) &= \int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}x \mathscr{D}\overline{x}\ \mathrm{e}^{-S_K + 1} = \mathrm{e} \prod_{n=1}^{\infty} \int da_n da_n^{\dagger} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1-\frac{\lambda}{n})|a_n|^2} \\
&= \mathrm{e} \lim_{N \to \infty} (4\pi)^N \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となり，$Z(0,0,\lambda)$ は明らかに発散していることが分かる[1]．このような発散因子は，この模型に特有のものではなく，通常の量子場理論の経路積分法においても表れ，この後で説明される n 点 Green 関数の中の規格化因子の中に吸収することで，その n 点 Green 関数の中にも含まれる発散因子と相殺可能であるがことが知られている．

2.1 ゼータ模型の Feynman 規則

Feynman の経路積分法に基づく量子場理論において，n 点 Green 関数 $\mathscr{G}$ は

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{G}(u_1, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_n) \\
&\quad = \frac{1}{\mathscr{N}} \int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}x \mathscr{D}\overline{x} \cdot x(u_1)\ \cdots\ x(u_m) \cdot \overline{x}(u_{m+1})\ \cdots\ \overline{x}(u_n)\ \mathrm{e}^{-S}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

[1] 無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-1}$ の部分は，$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m} \zeta(m)$ となり，$\zeta(1)$ の発散も含まれている．

で定義される．ここで，$\mathscr{N}=Z(0,0,\lambda)$ である．作用積分 S の中に相互作用項 S_I があるため，(17) 式右辺の汎関数積分を直接計算して求めることは困難であるが，通常の量子場理論では，結合定数 g, $\overline{g}$ のべき級数で展開（摂動展開）し，各項ごとに近似的に計算する方法（摂動計算法）が用いられる．また，この摂動展開の各項は Feynman 図形とよばれるグラフで表される．図 1 は (17) 式で定義される n 点 Green 関数 $\mathscr{G}$ を象徴的に表した Feynman 図形で，図中の矢印の向きは，慣習に従い，$x(u_k)$ から $\overline{x}(u_\ell)$ へ向かう向きにとっている．

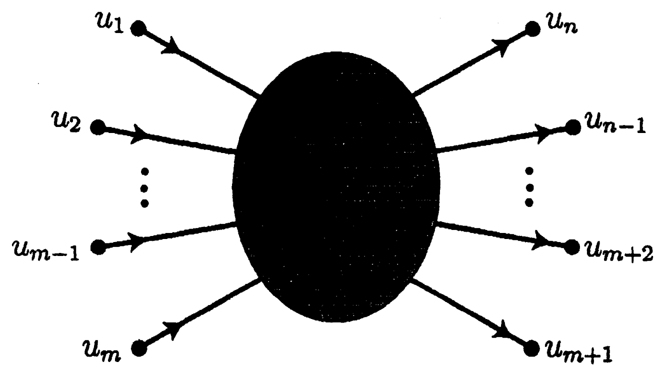

図 1: n 点 Green 関数 $\mathscr{G}$ に対応する Feynman 図形

とっている．図 1 中のグレイ領域内は，(17) 式右辺にある作用積分 S により決まり，可能な頂点と矢線の組合せで作られる図形になる．その組合せ方は (17) 式右辺を摂動展開したときの各項に対応しているので，逆に，可能な頂点と矢線の組合せ方から摂動展開の各項を計算する規則が分かり，その計算規則は Feynman 規則とよばれている．以上の観点から，Müller と Schubert はゼータ模型についての Feynman 規則が (17) 式から導出できることを示した [10]．以下では，その具体的な導出法について解説する[2]．

まず，2 点 Green 関数

$$\mathscr{G}(u_1\,,u_2)=\frac{1}{\mathscr{N}}\int_{\mathscr{H}}\mathscr{D}x\mathscr{D}\overline{x}\cdot x(u_1)\;\overline{x}(u_2)\;\mathrm{e}^{-S} \tag{18}$$

を摂動展開し，g, $\overline{g}$ の 0 次の項 $\mathscr{G}_0$ を取り出すと，

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_0(u_1,u_2)&=\frac{1}{\mathscr{N}}\int_{\mathscr{H}}\mathscr{D}x\mathscr{D}\overline{x}\cdot x(u_1)\;\overline{x}(u_2)\mathrm{e}^{-S_K+1}\\&=\frac{\mathrm{e}}{\mathscr{N}}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi im(u_1-u_2)}\prod_{n=1}^{\infty}\int da_nda_n^{\dagger}|a_m|^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1-\frac{\lambda}{n})|a_n|^2}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi\mathrm{e}^{2\pi im(u_1-u_2)}}{1-\dfrac{\lambda}{m}}\end{aligned} \tag{19}$$

[2]実際，Müller と Schubert の論文 [10] では，Feynman 規則の具体的な導出は省略されており，結果が書かれているのみである．今回の発表では，一般的な Feynman 規則の説明もかねて，その省略されている導出の部分を詳しく説明することにした．

となる．$\mathscr{G}_0$ は自由場の Feynman propagator（Feynman 伝播関数）とよばれ，図 2 の Feynman 図形で表される．さらに，(19) 式の最右辺の表式を λ のべき級数で展開すると，

図 2: 自由場の Feynman 伝播関数 $\mathscr{G}_0$ に対応する Feynman 図形

$$\mathscr{G}_0(u_1, u_2) = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (2\pi i)^k g_{12}^{(k)}; \tag{20}$$

$$g_{12}^{(k)} = g^{(k)}(u_1 - u_2) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i m(u_1 - u_2)}}{(2\pi i m)^k}. \tag{21}$$

ここで，$g_{12}^{(k)}$; $k = 0, 1, 2, \cdots$ は，ゼータ模型において，k 次の propagator（伝播関数）とよばれる[3]（図 3）．

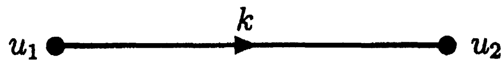

図 3: k 次の伝播関数 $g_{12}^{(k)}$; $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対応する Feynman 図形

次に，(17) 式の n 点 Green 関数 $\mathscr{G}$ から頂点 vertex（頂点）の表式を取り出す．(17) 式の各点の座標を $(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})$ に固定し，$0 < g < 1, 0 < \overline{g} < 1$ として，相互作用項を含む部分を摂動展開する．

$$\mathscr{G}(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q}) = \frac{1}{\mathscr{N}} \int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}x \mathscr{D}\overline{x} \cdot x(u_1) \cdots x(u_p) \cdot \overline{x}(u_{p+1}) \cdots \overline{x}(u_{p+q}) \times \mathrm{e}^{-S_K} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{g^m \overline{g}^n}{m!n!} \int_0^1 du x^m(u) \overline{x}^n(u) \right)^r. \tag{22}$$

(22) 式右辺の $r = 1$ の項

$$\frac{1}{\mathscr{N}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{g^m \overline{g}^n}{m!n!} \int_0^1 du \int_{\mathscr{H}} \mathscr{D}x \mathscr{D}\overline{x} \cdot x(u_1) \cdots x(u_p) \cdot \overline{x}(u_{p+1}) \cdots \overline{x}(u_{p+q}) x^m(u) \overline{x}^n(u) \mathrm{e}^{-S_K} \tag{23}$$

から図 4 の頂点に対応する項を取り出すと，

$$g^q \overline{g}^p \int_0^1 du\, \mathscr{G}_0(u_1, u) \cdots \mathscr{G}_0(u_p, u) \mathscr{G}_0(u, u_{p+1}) \cdots \mathscr{G}_0(u, u_{p+q}) \tag{24}$$

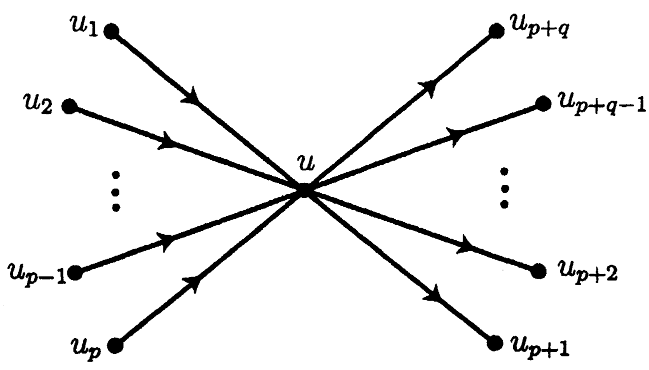

図 4: $\overline{g}^p g^q$ の頂点に対応する Feynman 図形

となり，自由場の Feynman 伝播関数 $\mathscr{G}_0$ の積の積分で表されることが分かる．(24) の自由場の Feynman 伝播関数 $\mathscr{G}_0$ をそれぞれ k 次の伝播関数 $g^{(k)}$ で展開すると

$$\lambda^{\sum_{i=1}^{p} k_i+\sum_{i=1}^{q} l_i}(2\pi i)^{\sum_{i=1}^{p} k_i+\sum_{i=1}^{q} l_i}\overline{g}^p g^q I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}(u_1, \cdots, u_{p+q}) \tag{25}$$

となり，ここで，$I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}$ はゼータ模型における elementary vertex integral（頂点積分）とよばれ，次の式で定義される．

$$\begin{aligned} I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}(u_1, \cdots, u_{p+q}) := \int_0^1 & du\; g^{(k_1)}(u_1-u) \cdots g^{(k_p)}(u_p-u) \\ & \times g^{(l_1)}(u-u_{p+1}) \cdots g^{(l_q)}(u-u_{p+q}). \end{aligned} \tag{26}$$

また，(26) 式の頂点積分 $I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}$ は図 5 の Feynman 図形によって表される．

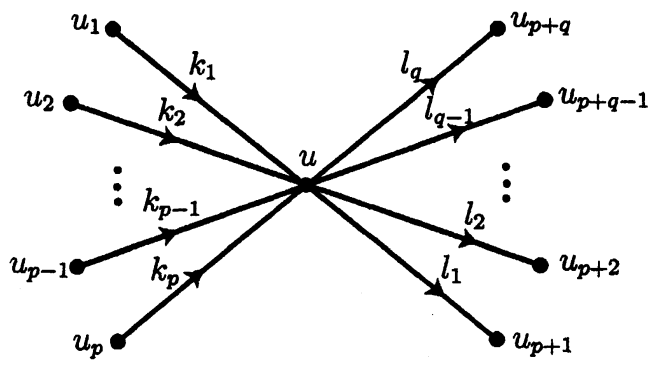

図 5: 頂点積分 $I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}$ に対応する Feynman 図形

以上のように，ゼータ模型の Feynman 規則は (21) 式の k 次の伝播関数 $g^{(k)}$ と (26) 式の頂点積分 $I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}$ によって構成される．

[3](19) 式から，k は MVZ のインデックスに対応する数であることが推察できる．実際，後の節でこの模型の Feynman 規則から MVZ の関係式を導出する際に，これが確かめられる．

2.2 伝播関数の性質

(21) 式から k 次の伝播関数 $g^{(k)}$ について以下の性質が分かる．
まず，$g^{(k)}$ の基本性質として，

$$\frac{\partial}{\partial u_1} g_{12}^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial u_2} g_{12}^{(k)} = g_{12}^{(k-1)}; \tag{27}$$

$$g_{21}^{(k)} = (-1)^k g_{12}^{(k)\dagger} = g^{(k)}(1-u_{12}); \tag{28}$$

$$g^{(k)}(0) = \frac{\zeta(k)}{(2\pi i)^k}; \tag{29}$$

$$\int_0^1 du_1\, g_{12}^{(k)} = \int_0^1 du_2\, g_{12}^{(k)} = 0 \tag{30}$$

が挙げられる．(28) 式で，$u_{12} = u_1 - u_2$ である．
$g^{(k)}$ は k 次の多重対数関数

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_k(z_{12}) &:= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\, z_{12} \int_0^1 dx \frac{\log^{k-1} x}{1 - x z_{12}}; \\ z_{12} &:= \mathrm{e}^{2\pi i(u_1-u_2)} \end{aligned} \tag{31}$$

を用いて，

$$g_{12}^{(k)} = \frac{1}{(2\pi i)^k}\, \mathrm{Li}_k(z_{12}) \tag{32}$$

と表される．
(31)(32) 式から $g^{(k)}$ の具体的な形が求まる．$k = 0, 1$ の場合

$$g_{12}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\delta(u_{12}) - 1 + i\cot(\pi u_{12})\right)\ ; \tag{33}$$

$$g_{12}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sign}(u_{12}) - u_{12} + \frac{i}{\pi}\log|2\sin(\pi u_{12})|\right) \tag{34}$$

となり，一般に，k が 2 以上の偶数の場合

$$\begin{aligned} g_{12}^{(k)} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{k!}B_k(|u_{12}|) \\ &+ \frac{i}{(2\pi)^k}\frac{(-1)^{\frac{k}{2}+1}}{(k-1)!}\int_0^1 dx \frac{\sin(2\pi u_{12})}{1 - 2x\cos(2\pi u_{12}) + x^2}\log^{k-1} x; \end{aligned} \tag{35}$$

k が 3 以上の奇数の場合

$$\begin{aligned} g_{12}^{(k)} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{k!}B_k(|u_{12}|)\mathrm{sign}(u_{12}) \\ &+ \frac{i}{2(2\pi)^k}\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{(k-2)!}\int_0^1 \frac{dx}{x}\log\left(1 - 2x\cos(2\pi u_{12}) + x^2\right)\log^{k-2} x \end{aligned} \tag{36}$$

と表される．ここで，$B_k(u)$ は k 次の Bernoulli 多項式である．特に，(35),(36) 式から，k 次の伝播関数 $g_{12}^{(k)}$ の虚部は，k 次の Clausen 関数に比例することが，Müller と Schubert によって指摘された [10]．また，この後 MVZ の関係式を導く際に，(33) 式の 0 次の伝播関数 $g_{12}^{(0)}$ が重要な役割を担うことになる．

(33) 式と cot についての等式

$$\cot(\pi u_{21})\cot(\pi u_{31}) + \cot(\pi u_{12})\cot(\pi u_{32}) + \cot(\pi u_{13})\cot(\pi u_{23}) = -1 + \delta(u_{12})\delta(u_{13}) \quad (37)$$

から，0 次の伝播関数 $g^{(0)}$ の積について次の (38),(39) の関係式が成り立ち，Feynman 図形の中の $g^{(0)}$ について図 6,7 の変形ができることを表している．これらの関係式は three-point relation（3 点関係式）とよばれる．

$$g_{21}^{(0)}g_{31}^{(0)} + g_{12}^{(0)}g_{32}^{(0)} + g_{13}^{(0)}g_{23}^{(0)} = 1 + \delta_{12}g_{32}^{(0)} + \delta_{31}g_{21}^{(0)} + \delta_{23}g_{13}^{(0)} - \delta_{12}\delta_{13} \quad (38)$$

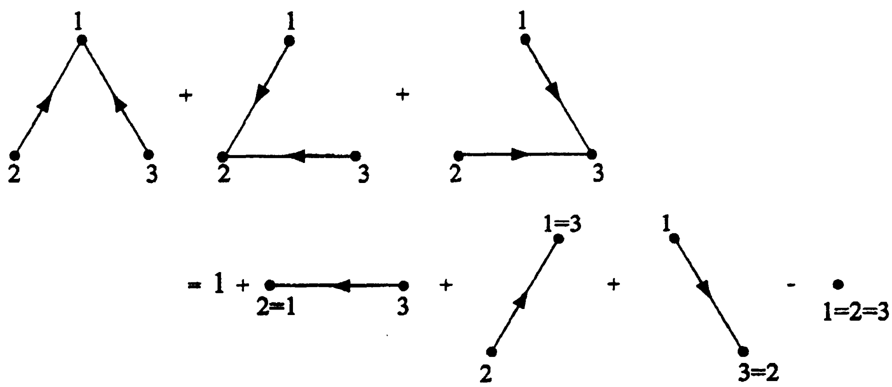

図 6: (38) の 3 点関係式を表す Feynman 図形

$$g_{12}^{(0)}g_{13}^{(0)} + g_{21}^{(0)}g_{23}^{(0)} + g_{31}^{(0)}g_{32}^{(0)} = 1 + \delta_{12}g_{23}^{(0)} + \delta_{31}g_{12}^{(0)} + \delta_{23}g_{31}^{(0)} - \delta_{12}\delta_{13} \quad (39)$$

2.3 頂点積分の性質

(26) 式から頂点積分 $I_{k_1\cdots k_p}^{l_1\cdots l_q}$ について以下の性質が分かる．

頂点積分 $I_{k_1\cdots k_p}^{l_1\cdots l_q}$ の基本性質として，矢線がすべて入る方向またはすべて出てゆく方向を持つ 2 頂点以上の頂点積分は 0 になる．つまり，

$$I_{k_1,\cdots,k_p}^{l_1,\cdots,l_q} = 0; \qquad \text{if } p = 0 \text{ or } q = 0. \quad (40)$$

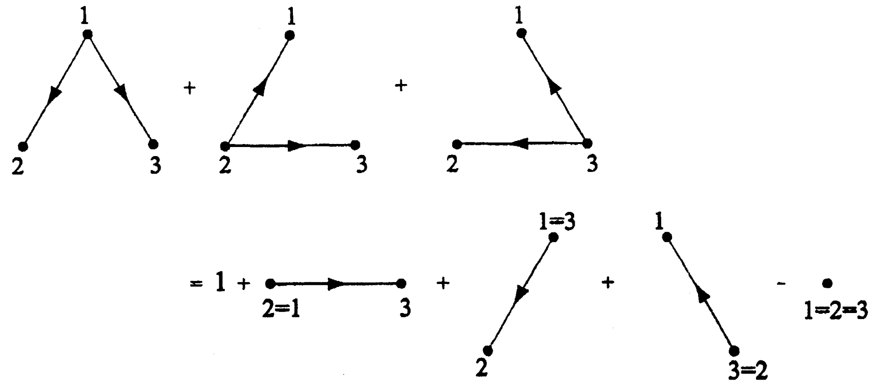

図 7: (39) の 3 点関係式を表す Feynman 図形

また，$I^{l_1\cdots l_q}_{k_1\cdots k_p}$ の複素共役について

$$I^{l_1,\cdots,l_q}_{k_1,\cdots,k_p}{}^{\dagger} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p} k_i+\sum_{j=1}^{q} l_i} I^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} \tag{41}$$

が成り立つ．

次に，頂点積分の具体例を挙げて，それぞれの性質を考える．

2 頂点積分 I^l_k について

$$I^l_k(u_1,u_2) = \int_0^1 du_3\ g^{(k)}_{13} g^{(l)}_{32} = g^{(k+l)}_{12} \tag{42}$$

が成り立ち，この等式は図 8 の Feynman 図形で表される．

図 8: (42) 式に対応する Feynman 図形

3 頂点積分

$$I^l_{mn}(u_1,u_2,u_3) = \int_0^1 du\ g^{(m)}(u_1-u)g^{(n)}(u_2-u)g^{(l)}(u-u_3) \tag{43}$$

において，1 回部分積分をして，$g^{(k)}$ の基本性質 (27) を用いると，

$$I^l_{mn}(u_1,u_2,u_3) = I^{l+1}_{m-1,n}(u_1,u_2,u_3) + I^{l+1}_{m,n-1}(u_1,u_2,u_3) \tag{44}$$

が成り立つ．この関係式は図 9 の Feynman 図形の間の関係式として表すこともできる．(44) 式右辺の 3 頂点積分についてさらに部分積分を繰り返し，$I^{l+m+n-k}_{0,k}$，$I^{l+m+n-k}_{k,0}$ で表

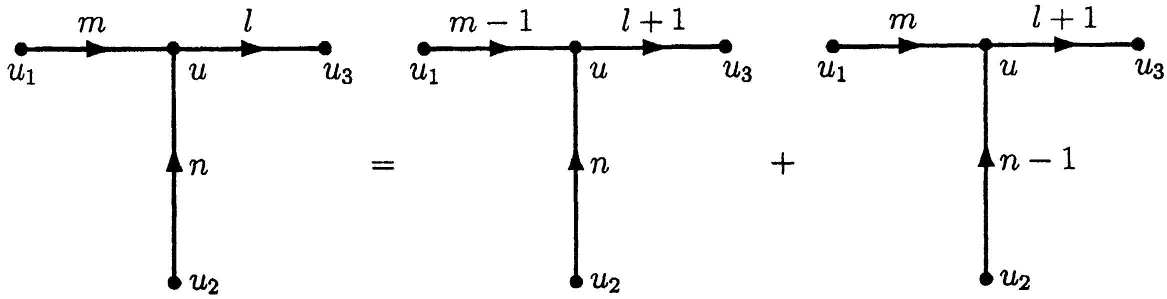

図 9: 3 頂点積分 I^l_{mn} の間の関係式 (44) を表す Feynman 図形

すと

$$
\begin{aligned}
I^l_{mn}(u_1,u_2,u_3) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{m+n-k-1}{m-1} I^{l+m+n-k}_{0,k}(u_1,u_2,u_3) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+n-k-1}{n-1} I^{l+m+n-k}_{k,0}(u_1,u_2,u_3).
\end{aligned} \tag{45}
$$

一方，$I^{l+m+n-k}_{0,k}$，$I^{l+m+n-k}_{k,0}$ は，それぞれ，2 次元多重対数関数 $\mathrm{Li}_{l,k}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
I^{l+m+n-k}_{0,k}(u_1,u_2,u_3) &= \int_0^1 du\ g^{(0)}(u-u_1) g^{(k)}(u-u_2) g^{(l+m+n-k)}(u_3-u) \\
&= \sum_{r>s>0} \frac{{z_{31}}^r {z_{12}}^s}{r^{l+m+n-k} s^k} = \mathrm{Li}_{l+m+n-k,k}(z_{31},z_{12});
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
I^{l+m+n-k}_{k,0}(u_1,u_2,u_3) &= \int_0^1 du\ g^{(k)}(u-u_1) g^{(0)}(u-u_2) g^{(l+m+n-k)}(u_3-u) \\
&= \sum_{r>s>0} \frac{{z_{23}}^r {z_{12}}^s}{r^{l+m+n-k} s^k} = \mathrm{Li}_{l+m+n-k,k}(z_{23},z_{12}).
\end{aligned} \tag{47}
$$

と表され，I^l_{mn} は

$$
\begin{aligned}
I^l_{mn}(u_1,u_2,u_3) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{m+n-k-1}{m-1} \mathrm{Li}_{l+m+n-k,k}(z_{31},z_{12}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+n-k-1}{n-1} \mathrm{Li}_{l+m+n-k,k}(z_{23},z_{12}).
\end{aligned} \tag{48}
$$

と表される．

同様にして

$$
\begin{aligned}
I_a^{bc}(u_1,u_2,u_3) &= \sum_{k=1}^{c}(-1)^{c+k}\binom{a+c-k-1}{a-1}\mathrm{Li}_{a+b+c-k}(z_{12})\mathrm{Li}_k(z_{13}) \\
&+ \sum_{k=1}^{a}(-1)^{c}\binom{a+c-k-1}{c-1}\mathrm{Li}_{k,a+b+c-k}(z_{13},z_{32})
\end{aligned} \tag{49}
$$

が得られる.

3 ゼータ模型におけるMZVの関係式の例

前節までに紹介したゼータ模型の Feynman 規則から導かれる，MZV の間関係式の例を紹介する.

通常の場の理論の模型において散乱振幅などを摂動計算する場合，その摂動展開の各項に対応する Feynman 図形をすべて考える必要があるが，ゼータ模型においては MZV に対応する Feynman 図形だけを考えればよい．その MZV に対応する Feynman 図形のうち最も基本になる図形が図 10 の 'sea shell' diagram とよばれるものである．この 'sea shell'

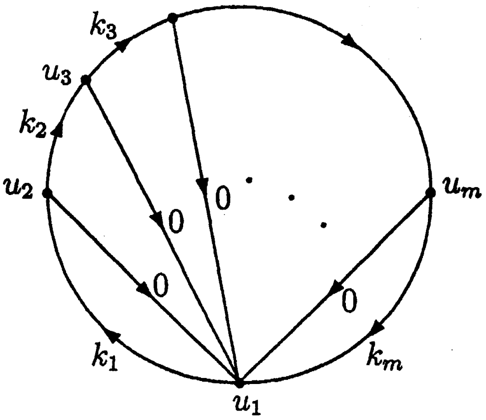

図 10: 'Sea shell' diagram

diagram を前節の伝播関数と頂点積分を用いて表すと

$$
(2\pi i)^{\sum_{i=1}^{m}k_i}\int_0^1\prod_{i=1}^{m}du_i\prod_{j=1}^{m-1}g^{(k_j)}(u_j-u_{j+1})g^{(0)}(u_{j+1}-u_1)g^{(k_m)}(u_m-u_1)=\zeta(k_1,\cdots,k_m) \tag{50}
$$

となり，深さ m の MZV$\zeta(k_1,\cdots,k_m)$ になることがわかる．ここで，(50) 式両辺に同次数で現れる λ と $g,\overline{g}$ は省略した．この後も，λ と $g,\overline{g}$ は MZV の関係式の両辺に同次数で現れるため，適宜省略することにする.

'Sea shell' diagram を前節で説明した伝播関数と頂点積分の性質にしたがって変形することにより，MZV に関する関係式が導かれる．この変形をする際に，特に必要になる性質をもう一度まとめておくと，次の通りである．

【1】 (33) 式から分かる，0 次伝播関数 $g^{(0)}$ の実部の triviality

$$g_{12}^{(0)} + g_{21}^{(0)} = \delta_{12} - 1. \tag{51}$$

【2】 3 点関係式 (38), (39).

【3】 すべて入る向きまたはすべて出る向きの伝播関数をもつ頂点積分は消える，(40) 式.

【4】 2 頂点積分 (42).

【5】 頂点積分の部分積分 (44).

3.1 深さ 1 の場合

k 次の伝播関数 $g^{(k)}$ から図 11 のループ図形に対応する G_k を (52) 式で定義すると，(29) 式より，Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$ が得られる．

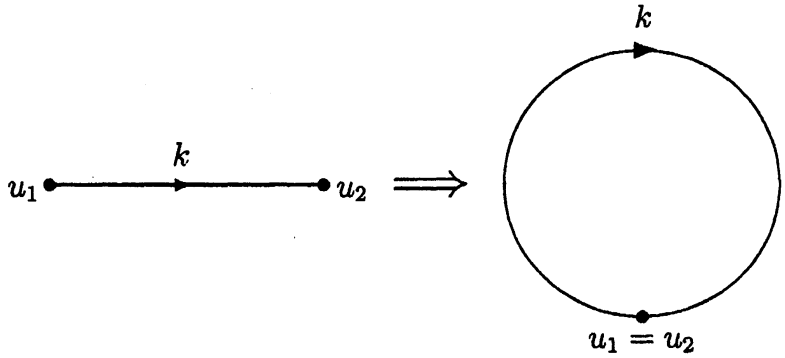

図 11: k 次の伝播関数 $g^{(k)}$ から作られるループ図形

$$G_k := (2\pi i)^k \int_0^1 du_1\ g^{(k)}(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \zeta(k). \tag{52}$$

この場合にはゼータ値の間の関係式が得られるわけではないが，Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$ がゼータ模型ではループ図形に対応していることが分かる．

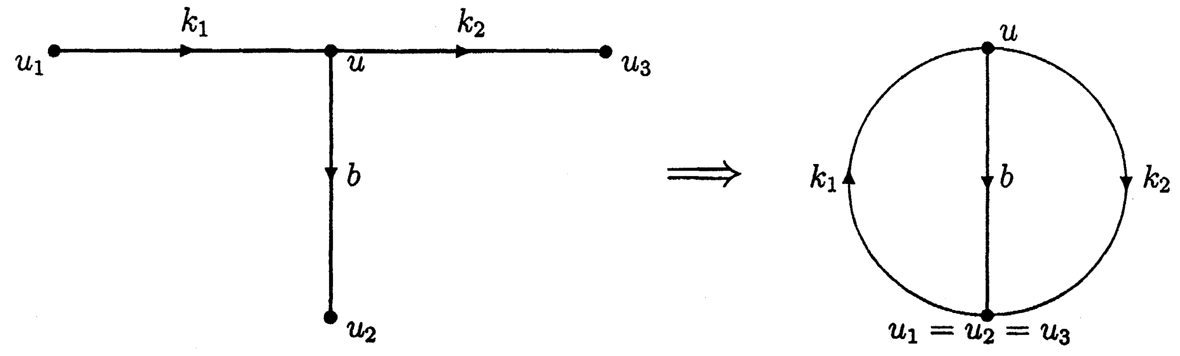

図 12: 3 頂点積分から作られるループ図形

3.2 深さ 2 の場合

3 頂点積分 $I_{k_1}^{bk_2}$ を用いて，図 12 のループ図形に対応する G_{k_1,b,k_2} を (53) 式で定義する．

$$\begin{aligned} G_{k_1,b,k_2} &:= (2\pi i)^{k_1+b+k_2} \int_0^1 du_1\ I_{k_1}^{bk_2}(u_1,u_1,u_1) \\ &= (2\pi i)^{k_1+b+k_2} \int_0^1 du_1 \int_0^1 du\ g^{(k_1)}(u_1-u) g^{(b)}(u-u_1) g^{(k_2)}(u-u_1) \\ &= \sum_{m>n>0} \frac{1}{m^{k_1}(m-n)^b n^{k_2}}. \end{aligned} \tag{53}$$

この G_{k_1,b,k_2} には次の性質がある．(53) 式で $b=0$ の場合，$G_{k_1,0,k_2}$ は 'sea shell' diagram に対応するので，

$$G_{k_1,0,k_2} = G_{k_1,k_2,0} = \zeta(k_1,k_2) \tag{54}$$

が成り立ち，深さ 2 の MZV になる．また，(53) 式で $k_1=0$ の場合，0 次伝播関数 $g^{(0)}$ の実部の triviality(51) と頂点積分の性質 (40) を用いて図 13 の変形をすると，

$$G_{0,b,k_2} = \zeta(b)\zeta(k_2) \tag{55}$$

が得られる．一方，G_{k_1,b,k_2} の定義 (53) 中の 3 頂点積分 $I_{k_1}^{bk_2}(u_1,u_1,u_1)$ に部分積分を繰り返すことにより導かれる公式 (49) を代入すると，

$$\begin{aligned} G_{k_1,b,k_2} = &\sum_{m=1}^{k_2} (-1)^{k_2+m} \binom{k_1+k_2-m-1}{k_1-1} \zeta(k_1+b+k_2-m)\zeta(m) \\ &+ \sum_{m=1}^{k_1} (-1)^{k_2} \binom{k_1+k_2-m-1}{k_2-1} \zeta(m, k_1+b+k_2-m). \end{aligned} \tag{56}$$

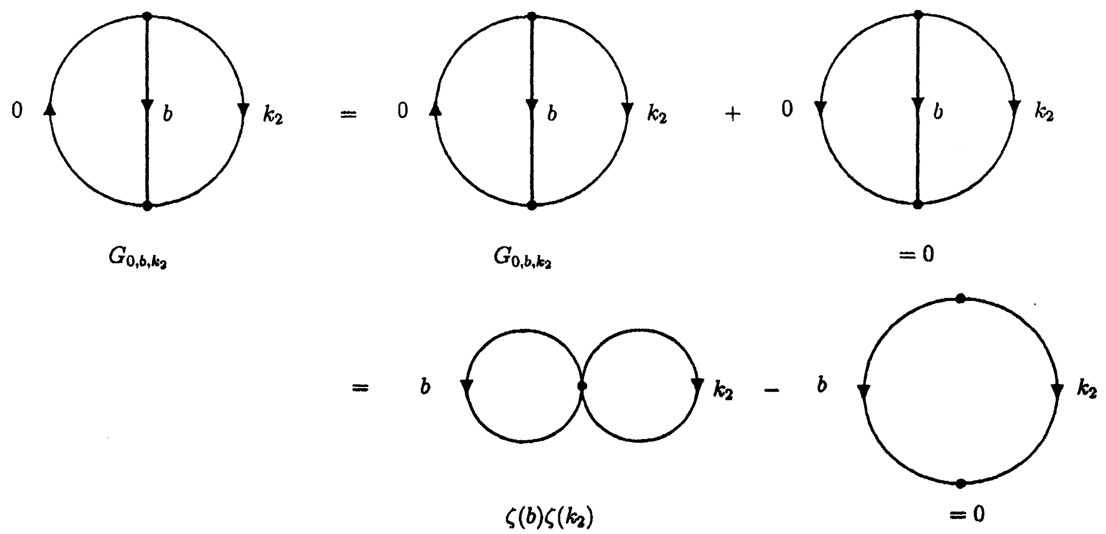

図 13: (55) 式を与えるループ図形の変形

となり，$b=0$ とおくと

$$\begin{aligned}\zeta(k_1,k_2) &= \sum_{m=1}^{k_2}(-1)^{k_2+m}\binom{k_1+k_2-m-1}{k_1-1}\zeta(k_1+k_2-m)\zeta(m)\\ &\quad+\sum_{m=1}^{k_1}(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2-m-1}{k_2-1}\zeta(m,k_1+k_2-m)\end{aligned} \tag{57}$$

が得られる．関係式 (57) には $m=1$ での発散項

$$-(-1)^{k_2}\binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}\{\zeta(k_1+k_2-1)\zeta(1)-\zeta(1,k_1+k_2-1)\} \tag{58}$$

が含まれるが，MZV の基本的な関係式としてよく知られた等式

$$\zeta(k_1,k_2)+\zeta(k_2,k_1)=\zeta(k_1)\zeta(k_2)-\zeta(k_1+k_2) \tag{59}$$

により取り除くことができ，

$$\begin{aligned}\zeta(k_1,k_2) = (-1)^{k_2}\Bigg[&\sum_{m=2}^{k_2}(-1)^{m}\binom{k_1+k_2-m-1}{k_1-1}\zeta(k_1+k_2-m)\zeta(m)\\ &+\sum_{m=2}^{k_1}\binom{k_1+k_2-m-1}{k_2-1}\zeta(m,k_1+k_2-m)\\ &-\binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}\{\zeta(k_1+k_2)+\zeta(k_1+k_2-1,1)\}\Bigg]\end{aligned} \tag{60}$$

が得られる．この関係式 (60) が，ゼータ模型から得られる，深さ 2 の MZV に関する結果である．また，関係式 (59) は，参考文献 [10] において，reflection formula とよばれ，図 14 の ‘sea shell’ diagram の変形で表されている．

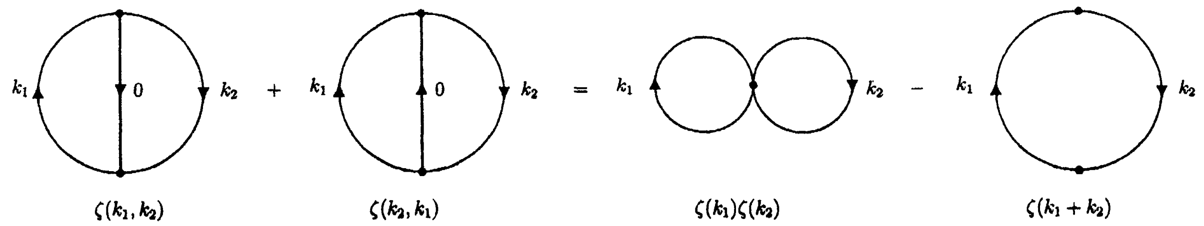

図 14: (59) 式の reflection formula

4 任意の深さの関係式と議論

Müller と Schubert は以上の計算に続き，深さ 3 の場合にもついても具体的に計算をし，さらにその計算結果を一般化し，任意の深さ m の MZV について次の関係式を与えている[4].

$$
\begin{aligned}
\zeta(k_1,\cdots,k_m) &= (-1)^{k_m}\sum_{n_{m-1}=1}^{k_{m-1}}\binom{k_{m-1}-n_{m-1}+n_m-1}{k_m-1} \\
&\qquad \times\zeta(k_1,\cdots,k_{m-2},n_{m-1},k_{m-1}-n_{m-1}+n_m) \\
&+(-1)^{k_m}\sum_{n_{m-1}=1}^{n_m}\sum_{n_{m-2}=1}^{k_{m-2}}\binom{k_{m-1}-n_{m-1}+n_m-1}{k_{m-1}-1}\binom{k_{m-2}-n_{m-2}+n_{m-1}-1}{n_{m-1}-1} \\
&\times\zeta(k_1,\cdots,k_{m-3},n_{m-2},k_{m-2}-n_{m-2}+n_{m-1},k_{m-1}-n_{m-1}+n_m) \\
&+(-1)^{k_m}\sum_{n_{m-1}=1}^{n_m}\sum_{n_{m-2}=1}^{n_{m-1}}\sum_{n_{m-3}=1}^{k_{m-3}}\binom{k_{m-1}-n_{m-1}+n_m-1}{k_{m-1}-1}\binom{k_{m-2}-n_{m-2}+n_{m-1}-1}{k_{m-2}-1} \\
&\qquad\qquad\times\binom{k_{m-3}-n_{m-3}+n_{m-2}-1}{n_{m-2}-1} \qquad\qquad (61)\\
&\times\zeta(k_1,\cdots,k_{m-4},n_{m-3},k_{m-3}-n_{m-3}+n_{m-2},\cdots,k_{m-1}-n_{m-1}+n_m) \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&+(-1)^{k_m}\sum_{n_{m-1}=1}^{n_m}\sum_{n_{m-2}=1}^{n_{m-1}}\cdots\sum_{n_2=1}^{n_3}\sum_{n_1=1}^{k_1}\prod_{\ell=2}^{m-1}\binom{k_\ell-n_\ell+n_{\ell+1}-1}{k_\ell-1}\binom{k_1-n_1+n_2-1}{n_2-1} \\
&\times\zeta(n_1,k_1-n_1+n_2,\cdots,k_{m-1}-n_{m-1}+n_m) \\
&+(-1)^{k_m}\sum_{n_{m-1}=1}^{n_m}\sum_{n_{m-2}=1}^{n_{m-1}}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}(-1)^{n_1}\prod_{\ell=1}^{m-1}\binom{k_\ell-n_\ell+n_{\ell+1}-1}{k_\ell-1} \\
&\times\zeta(n_1)\zeta(k_1-n_1+n_2,\cdots,k_{m-1}-n_{m-1}+n_m).
\end{aligned}
$$

[4] 前節の深さ 2 の場合の計算では 3 点関係式 (38), (39) を用いる必要はなかったが，深さ 3 以上の場合の計算では必要になる.

(61) 式の $\zeta(1,\cdots)$ の発散を含む項は

$$\zeta(1)\zeta(k_1,\cdots,k_{m-1})-\zeta(1,k_1,\cdots,k_{m-1})=\sum_{\kappa=1}^{m-1}[\zeta(k_1,\cdots,k_{\kappa-1},k_\kappa+1,k_{\kappa+1},\cdots,k_{m-1}) + \zeta(k_1,\cdots,k_\kappa,1,k_{\kappa+1},\cdots,k_{m-1})] \tag{62}$$

により取り除かれる.

これらの結果の中で, 深さ3までの関係式については他の文献で紹介されている関係式と対応していて, 例えば, 深さ3の MZV の関係式は参考文献 [11] の中の 'decomposition equation' に対応していることが指摘されている [10]. 任意の深さの関係式は他の文献に対応する関係式が見当たらず, (61),(62) の関係式が数学的には何を意味しているのか, いまだ明確になっていない.

今回紹介した量子場理論のゼータ模型で得られた関係式と, MZV の間の複シャッフル関係式との関係を調べてみることは, 今後の興味深い課題の1つである.

参考文献

[1] C. G. Beneventano and E. M. Santangelo, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996), 2871.

[2] J. D. Broadhurst and D. Kreimer, Phys.Lett. **B393** (1997) 403 .

[3] 荒川恒男・金子昌信, "多重ゼータ値および多重 L 値ノート", http://www.math.kyushu-u.ac.jp/ mkaneko/ (2002).

[4] D. Zagier, "Values of zeta functions and their applications" in *First European Congress of Mathematics* (Birkhäuser, Boston, 1997),Vol.II, 497.

[5] T. Q. T. Le and J. Murakami, Topol. Appl. **62** (1995), 193; Nagoya Math. J. **142** (1996), 39.

[6] A. B. Goncharov, Math. Res. Lett. **5** no 4. (1998), 497.

[7] T. Terasoma, math.AG/9908045; math.AG/0104231.

[8] H. Furusho, math.NT/0011261, to be appeared in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[9] G. Racinet, C.R. Acad. Sci. Paris ser. I math. **333** (2001), no. 1, 5.

[10] U. Müller and C. Schubert, Int. J. Math. Math. Sci. **31** (2002), 127 (math.QA/9908067).

[11] J.M.Borwein and R.Girgensohn, "Evaluation of triple Euler sums", with appendix "Euler sums in quantum field theory" by D.J.Broadhurst, Electr. J. Comb. **3** (1996) R23.