数理解析研究所講究録
第1550巻 2007年 45-63

Multiplier idealの標数0の手法と標数pの手法及びその応用

東北大学・大学院理学研究科　原 伸生 (Nobuo Hara)
Mathematical Institute, Tohoku University

0. 序に代えて

本稿は, 2006年8月28日–9月1日に行われた短期共同研究集会 “Arc Spaces and Multiplier Ideals” における筆者の二つの講演のノートを, 香川和広氏(岡山大学大学院自然科学研究科)がまとめて下さったものである. このような板書の筆記という形で記録が残ることは望むところではないが, 講演内容についての多少の注意と参考文献を添えるにとどめ, 後は編者に下駄を預けることとする.

本稿の標題には『標数0の手法と標数pの手法』とあるが, 講演では『標数p』の部分の解説に重きを置いた. 標数0における乗数イデアル (multiplier ideal) の手法は, 90年代中頃にはその様々な応用と共に代数幾何でもよく知られるところとなり [E], 2000年代に入り [La] で理論としても確立されたと言ってもよいだろう. 一方, 80年代後半に, Hochster–Huneke [HH] による密着閉包 (tight closure) の理論において正標数の可換環の判定イデアル (test ideal) なる概念が定義されていたが, 90年代後半になって, 標数pへの還元を通してある種の乗数イデアルと判定イデアルとの対応が示された ([H1], [S2]). ここで,『ある種の乗数イデアル』と書いたのは, これが単位イデアルに付随して定まるごく特殊なものだったからであるが, いずれにせよこれが事の発端であった. その後, [HY] において, 一般のイデアル$\mathfrak{a} \neq 0$と実係数$t \geq 0$ (本稿の記号法では実指数という方が正確だが) に付随する乗数イデアル$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$に対応するものとして, 判定イデアルの一般化$\tau(\mathfrak{a}^t)$を定義してみると, これがことのほか『標数$p$の乗数イデアル』と呼ぶに足るものであることがわかってきた.

標数pの乗数イデアル$\tau(\mathfrak{a}^t)$は, 密着閉包の一般化である$\mathfrak{a}^t$-密着閉包の零化イデアルとして定義される. すなわち, その定義において本質的なのは標数pの環のフロベニウス写像であって, 特異点解消を用いて定義される標数0の乗数イデアルとの見かけ上の共通点は全然ない. にもかかわらず, イデアル$\tau(\mathfrak{a}^t)$は$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$と同様の諸々の局所的性質をみたし, また, 両者は標数0から標数$p \gg 0$への還元により対応している. この対応は, 小さい標数$p > 0$では崩れることもあり得るのだが, 上記の局所的性質の多くはこうした『病的な』状況でも成り立つ. 例えば, Skodaの定理というのは, $\mathfrak{a}$がn個の元で生成される (節減をもつ) イデアルならば$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^n) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{n-1})\mathfrak{a}$が成り立つという主張であり, その標数0における証明には標数pでは成り立たない消滅定理が用いられるが, 標数pでは消滅定理を用いずにイデアルのフロベニウス巾の簡単な考察だけで$\tau(\mathfrak{a}^n) = \tau(\mathfrak{a}^{n-1})\mathfrak{a}$が示せてしまう [HT]. 1回目の講演では, この辺りについて解説したつもりである.

正標数のSkoda型定理を射影多様体X上の豊富な直線束Lに付随する次数環$R(X, L)$に適用することにより, 次のSmithの結果 [S1] の別証明が得られている [H2]: Xを正標数の非特異射影多様体, LをX上の大域生成的な豊富直線束とするとき, 随伴束$\omega_X \otimes L^{\otimes \dim X+1}$も大域生成的である. これは藤田予想の最も簡単な場合で, 標数0ではMumfordの補題と小平消滅定理から自明であるが, これは言うまでもなくLが大域生成という仮定が強すぎるのである. 数年前この議論を再検討したところ, 標数$p > 0$においても, 随伴束を階数p^{de}のベクトル束$L^{\otimes \dim X+1} \otimes F^e_*\omega_X$で置き換えてMunfordの補題を適用することにより殆ど自明に近い証明が得られた; cf. [Ke].

この第3の証明は2回目の講演で紹介したが, そのポイントは, フロベニウス写像による引き戻しにより L の豊富性を拡大して小平消滅定理の代わりに Serre 消滅定理を使うということであり, これを可能にしているのが非特異多様体 X の『F-特異点』に関する良い性質 (F-純性/F-purity) である.

Smith の定理のあまりにも簡単な別証明ができてしまったので, L が大域生成でない場合 — 例えば, 正標数曲面の Reider 型定理 — もこの方法で何とかならないかと期待したいところだが, ここで遂に F-特異点の病理が大きな障害となって発現した. 2回目の講演の後半はこの失敗の報告に終始したわけだが, いささか舌足らずの気味もあったので多少補足しておくことにする. 以下の議論において, [HW] で定義された組の F-特異点 (強 F-正則, F-純) が組の特異点 (対数的端末/klt, 対数的標準/lc) の標数 p における類似概念であることに注意されたい.

観察. X を標数 $p>0$ の非特異射影曲面, $x\in X$ を閉点とし, X 上の直線束 L が, $L^2>4$ かつ $x\in C$ なる任意の曲線 $C\subset X$ に対し $LC\geq 2$ をみたすとする. すると, $D\sim_{\mathbb{Q}} tL$ $(0<t<1)$ かつ $\mathrm{ord}_x D=2$ なる有効 $\mathbb{Q}$-因子 D がとれて, 組 (X,D) の x における F-純閾値 $c=\mathrm{fpt}_x(X,D)\leq \mathrm{lct}_x(X,D)\leq 1$ となる. このとき, 組 (X,cD) は x において F-純だが強 F-正則ではない. ここで,

$\{x\}$ が組 (X,cD) の F-純中心 (center of F-purity)
$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ と x を通る一般の有効因子 D' に対し, $(X,cD+\varepsilon D')$ が x で F-純でない,

と定義してみる. これは勿論, 対数的標準中心 (center of log canonical singularities) の概念を模倣したものである. このとき,

命題. 上の状況で, $\{x\}$ が組 (X,cD) の F-純中心ならば, $x\notin \mathrm{Bs}|K_X+L|$.

ここまではまず妥当な結論であるが, 問題は, x が組 (X,cD) の孤立した非強 F-正則点 (すなわち, $\tau(X,cD)_x\subset \mathcal{O}_{X,x}$ の零点が x のみ) にもかかわらず, $\{x\}$ が組 (X,cD) の F-純中心でない, という状況が起こり得ることである. 局所的な例として, $p=\mathrm{char}\,k\equiv 3 \pmod 4$ のとき, $\mathrm{Spec}\,k[[x,y]]$ 上 $xy(x-y)(x+y)=0$ で定義される因子 D を考えると, $\mathrm{fpt}(X,D)=(2p-1)/2p<\mathrm{lct}(X,D)=1/2$ で, $\tau(X,\frac{1}{2}D)=\mathfrak{m}$ にもかかわらず, 組 $(X,\frac{1}{2}D)$ の最小 F-純中心が D 自身というべき状況になっている. 一般に, 最小の対数的標準中心は正規であることと比較すると, これは非常に病的な状況といえるだろう.

組 (X,cD) の F-純中心の振舞いが wild であるのに対して, $D=0$ の場合には Aberbach–Enescu [AE] が, F-純な局所環 R に対し, $X=\mathrm{Spec}\,R$ (と $D=0$ の組) の F-純中心の定義イデアルに相当するイデアル $\mathcal{P}(R)\subset R$ を定義して, $\mathcal{P}(R)$ が素イデアルであることと, $R/\mathcal{P}(R)$ が強 F-正則であることを示している.

Multiplier idealの標数0の手法と標数pの手法とその応用 I

東北大学大学院・理学研究科　原伸生 (Nobuo Hara)
Graduate School of Science,
Tohoku University

Multiplier ideal (char. 0)

X: normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein variety $/k$, char $k = 0$

$\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$: ideal sheaf

$\mu : Y \longrightarrow X$: log resolution of $(X, \mathfrak{a})$

$\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-Z)$

$\mathrm{Exc}(\mu) \cup \mathrm{Supp}(Z)$: SNC div.

$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t) := \mu_* \mathcal{O}_Y(\ulcorner \underbrace{K_Y - \mu^* K_X}_{\underset{K_{Y/X}}{\parallel}} - t \cdot Z \urcorner) \subseteq \mathcal{O}_X$$

Easy: ⓪ $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$: integrally closed ideal $\subseteq \mathcal{O}_X$

① $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t \mathfrak{b}) \supseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a}^t) \cdot \mathfrak{b}$

② $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathcal{J}(\mathfrak{b}^t) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$.

$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$: "reduction" of $\mathfrak{a}$ $\Rightarrow \mathcal{J}(\mathfrak{b}^t) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$.

$$\left(\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \overline{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}} \\ \Updownarrow \\ \exists r \in \mathbb{N},\ \mathfrak{a}^{n+r} = \mathfrak{a}^r \mathfrak{b}^n \ (\forall n \geq 0) \end{array}\right)$$

③ $t \leq t' \Rightarrow \mathcal{J}(\mathfrak{a}^t) \supseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{t'})$.

Skoda's thm. $X = \operatorname{Spec} R$

$\mathfrak{a} = (x_1, \cdots, x_\ell) \subset R$ gen. by ℓ elements.

$\Rightarrow \mathcal{J}(\mathfrak{a}^\ell \mathfrak{b}^t) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{\ell-1}\mathfrak{b}^t) \cdot \mathfrak{a}$.

Cor. (Briançon - Skoda's thm.)

X : log terminal , $\mathfrak{a}$ as above

$\Rightarrow \overline{\mathfrak{a}^n} \subseteq \mathfrak{a}^{n-\ell+1} \quad (\forall n \geq 0)$

$\because \overline{\mathfrak{a}^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \ell t}}{\subseteq} \mathcal{J}(\overline{\mathfrak{a}^n}) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^n) = \mathfrak{a}^{n-\ell+1} \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{\ell-1}) \subseteq \mathfrak{a}^{n-\ell+1}$. //

Pf of Skoda :

$\mu : Y \longrightarrow X$: log resol. of $(X, \mathfrak{a})$

$\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-Z)$

$\mathcal{E} := \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{O}_Y \cdot e_i \cong \mathcal{O}_Y^{\oplus \ell} \xrightarrow{(x_1, \cdots, x_\ell)} \mathcal{O}_Y(-Z)$: surj.

Associated Koszul complex

$$0 \to (\overset{\ell}{\wedge}\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_Y(\ell Z) \to \cdots$$
$$\to (\overset{2}{\wedge}\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_Y(2Z) \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_Y(Z) \to \mathcal{O}_Y \to 0 \quad (\text{ex})$$

$\otimes\, \mathcal{O}_Y(\ulcorner K_{Y/X} \urcorner - \ell\cdot Z)$ and break up into short exact sequences

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y(\ulcorner K_{Y/X} \urcorner - j\cdot Z)) = 0 \quad (i>0,\ j\geq 0)$$

$$\begin{array}{ccc} H^0(Y, \mathcal{E}\otimes \mathcal{O}_Y(\ulcorner K_{Y/X}\urcorner - (\ell-1)Z)) & \to & H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\ulcorner K_{Y/X}\urcorner - \ell Z)) \to 0 \\ \| & & \| \\ \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{\ell-1})^{\oplus \ell} & \xrightarrow[(x_1,\cdots,x_\ell)]{\text{surj.}} & \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{\ell}) \end{array}$$

$$\therefore\ \mathcal{J}(\mathfrak{a}^\ell) = (x_1, \cdots, x_\ell)\,\mathcal{J}(\mathfrak{a}^{\ell-1}) = \mathfrak{a}\cdot \mathcal{J}(\mathfrak{a}^{\ell-1}). \ //$$

<u>Rem.</u> L : ample gl. gen. invertible sheaf on X

$\mathcal{F}$: coherent sheaf

$$H^i(X, \mathcal{F}\otimes L^{-i}) = 0 \quad (i>0)$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$: gen. by global sections.

(Mumford's lemma)

☺ $V = H^0(X, L)$, $V\otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow L$: surj.

$\Rightarrow$ Koszul seq. is exact.

$$\Rightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \otimes H^0(X, L^m) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{F}\otimes L^m) \quad (\forall m \geq 0)$$

· $\mathcal{F}\otimes L^m$: gl. gen. , $m \gg 0$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow H^0(X, \mathcal{F}\otimes L^m) \otimes \mathcal{O}_X & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}\otimes L^m \\ \uparrow\!\!\uparrow & & \uparrow \text{surjection} \\ H^0(X,\mathcal{F}) \otimes H^0(X, L^m) \otimes \mathcal{O}_X & \to & H^0(X, \mathcal{F}) \otimes L^m \end{array} \quad //$$

<u>Tight closure, generalized test ideal</u> (char. $p>0$)

R: integral domain $\supseteq \mathbb{F}_p$ (not nec. normal $\mathbb{Q}$-Gor.)

$$\begin{array}{ccccl} F_R : R & \longrightarrow & R & : & \text{Frobenius map} \\ \cup & & \cup & & \\ x & \longmapsto & x^p & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccl} F_R^e : R & \longrightarrow & R & ; & x \longmapsto x^q \qquad (q := p^e) \\ \| & \circlearrowright & \wr\| & & \\ R & \hookrightarrow & R^{1/q} & ; & x \longmapsto x \end{array}$$

M: R-module

$$\begin{array}{ccc} F_M^e = F_R^e \otimes 1_M : M = R \otimes_R M & \longrightarrow & R \otimes_R M =: \mathbb{F}^e(M) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & 1 \otimes x =: x^q \end{array}$$

$N \hookrightarrow M$: submodule

$$N_M^{[q]} := \mathrm{Im}(\mathbb{F}^e(N) \to \mathbb{F}^e(M)) \subset \mathbb{F}^e(M)$$

$I \subset R$: ideal

$$\Rightarrow I^{[q]} := I_R^{[q]} = (a^p \mid a \in I)R \subset R$$

<u>Def.</u> $0 \neq \mathfrak{a} \subset R$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$N \subseteq M$: submodule

$N_M^{*\mathfrak{a}^t} \subseteq M$: $\mathfrak{a}^t$-tight closure of N in M is def by:

$$z \in N_M^{*\mathfrak{a}^t} \Leftrightarrow 0 \neq {}^\exists c \in R \text{ s.t. } c\mathfrak{a}^{\lceil qt \rceil} z^q \subseteq N_M^{[q]} \text{ in } \mathbb{F}^e(M)$$
$$\text{for all } q = p^e \gg 0.$$

$I \subset R$: ideal

$$z \in I^{*\mathfrak{a}^t} \Leftrightarrow 0 \neq {}^\exists c \in R \text{ s.t. } c\mathfrak{a}^{\lceil qt \rceil} z^q \subseteq I^{[q]} \text{ for } {}^\forall q = p^e \gg 0.$$

$0 \subset M$

$z \in 0_M^{*\mathfrak{a}^t} \Leftrightarrow 0 \neq {}^\exists c \in R$ s.t. $c\,\mathfrak{a}^{\lceil qt \rceil} z^q = 0$ in $F^e(M)$ for ${}^\forall q \gg 0$.

<u>Rem.</u> $\mathfrak{a} = R$ (or $t = 0$)

$\Rightarrow I^{*R} = I^* (\supseteq I)$: tight closure [Hochster - Huneke]

R : F-regular $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $I = I^*$ for ${}^\forall I \subseteq R$

R : regular $\Rightarrow$ R : F-regular

$\Rightarrow$ R : normal & Cohen-Macaulay

<u>Basic Properties</u>

⓪ $N \subseteq N_M^{*\mathfrak{a}^t} \subseteq M$: submodule, $N_M^{*\mathfrak{a}^t}/N \cong 0_{M/N}^{*\mathfrak{a}^t}$.

① $N_M^{*\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}} \subseteq N_M^{*\mathfrak{a}^t} :_M \mathfrak{b}$.

② $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow N_M^{*\mathfrak{b}^t} \supseteq N_M^{*\mathfrak{a}^t}$.

$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$: reduction of $\mathfrak{a}$ $\Rightarrow N_M^{*\mathfrak{b}^t} = N_M^{*\mathfrak{a}^t}$.

③ $t \leq t' \Rightarrow N_M^{*\mathfrak{a}^t} \subseteq N_M^{*\mathfrak{a}^{t'}}$.

<u>Def - Thm.</u> (Generalized test ideal)

$$E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \text{m-Spec}R} E_R(R/\mathfrak{m})$$

$$\tau(\mathfrak{a}^t) = \bigcap_{M:\text{f.g. }R\text{-mod.}} \mathrm{Ann}_R(0_M^{*\mathfrak{a}^t}) = \bigcap_{I \subseteq R} (I :_R I^{*\mathfrak{a}^t}) \subseteq R$$

$$\tilde{\tau}(\mathfrak{a}^t) := \mathrm{Ann}_R(0_E^{*\mathfrak{a}^t}) \subseteq R$$

<u>Thm.</u> R: normal $\mathbb{Q}$-Gor. $\Rightarrow$ $\tau(\mathfrak{a}^t) = \tilde{\tau}(\mathfrak{a}^t)$.

<u>Cor. of Basic Properties.</u>

① $\tau(\mathfrak{a}^t\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{b}\cdot\tau(\mathfrak{a}^t)$.

② $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \tau(\mathfrak{b}^t) \subseteq \tau(\mathfrak{a}^t)$.

  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$: reduction of $\mathfrak{a}$ $\Rightarrow$ $\tau(\mathfrak{b}^t) = \tau(\mathfrak{a}^t)$.

③ $t \leq t' \Rightarrow \tau(\mathfrak{a}^t) \supseteq \tau(\mathfrak{a}^{t'})$.

<u>Skoda's thm.</u>

$$\mathfrak{a} = (x_1, \cdots, x_\ell) \Rightarrow \tau(\mathfrak{a}^\ell\mathfrak{b}^t) = \tau(\mathfrak{a}^{\ell-1}\mathfrak{b}^t)\cdot\mathfrak{a}.$$

<u>Cor.</u> R: F-regular $\Rightarrow$ $\overline{\mathfrak{a}^n} \subseteq \mathfrak{a}^{n-\ell+1}$ $(\forall n \geq 0)$

<u>Pf of Skoda for τ</u>

$\boxed{\text{Point}}$ $\mathfrak{a}^{q\ell} = \mathfrak{a}^{[q]}\cdot\mathfrak{a}^{q(\ell-1)} = (x_1^q, \cdots, x_\ell^q)\cdot\mathfrak{a}^{q(\ell-1)}$

$$\left(\begin{array}{l}\mathfrak{a}^{q\ell}:\ \text{gen. by monomials in } x_1, \cdots, x_\ell \text{ of deg. } q\ell \\ \Rightarrow x_i^q \times (\text{—})\end{array}\right)$$

$z \in M$

$$z \in 0_M^{*\mathfrak{a}^\ell} \Leftrightarrow 0 \neq \exists c \in R \text{ s.t. } c\overset{\mathfrak{a}^{[q]}\cdot\mathfrak{a}^{q(\ell-1)}}{\overset{\parallel}{\mathfrak{a}^{q\ell}}}z^q = 0 \text{ for } \forall q \gg 0.$$

$\Leftrightarrow 0 \neq {}^{\exists}c \in R$ s.t. $c\mathfrak{a}^{q(\ell-1)}(x_i z)^q = 0 \quad ({}^{\forall}i = 1, \cdots, \ell)$

$\Leftrightarrow 0 \neq {}^{\exists}c \in R$ s.t. $x_i z \in 0_M^{*\mathfrak{a}^{\ell-1}}$

$\Leftrightarrow z \in 0_M^{*\mathfrak{a}^{\ell-1}} :_M \mathfrak{a}$

$\Rightarrow \tau(\mathfrak{a}^\ell) = \tau(\mathfrak{a}^{\ell-1}) \cdot \mathfrak{a}$. //

Thm. (H, Yoshida)

Fix $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

R: normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein ess. of finite type $/k$, char $k = 0$

$0 \neq \mathfrak{a} \subset R$

$\rightsquigarrow R_p, \mathfrak{a}_p, (\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t))_p$: red. mod p

${}^{\exists}p_0 = p_0(t)$ s.t. ${}^{\forall}p \geq p_0$, $\tau((\mathfrak{a}_p)^t) = (\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t))_p$

Rmk. $\tau \subseteq \mathcal{J}$ in general

Def. R: local, F-reg. ($\Rightarrow \tau(R) = R$)

$\mathfrak{a} \subset R$

$\mathrm{fpt}(\mathfrak{a}) = \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau(\mathfrak{a}^t) = R\}$

($\mathfrak{a}$: proper $\Rightarrow \mathrm{fpt}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_{>0}$)

Rem. $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a}_p) \leq \mathrm{lct}(\mathfrak{a})$ in general.

$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}) = \lim_{p \to \infty} \mathrm{fpt}(\mathfrak{a}_p)$.

Multiplier idealの標数0の手法と標数pの手法とその応用 II

東北大学大学院・理学研究科　原伸生 (Nobuo Hara)
Graduate School of Science,
Tohoku University

<u>Thm.</u> R : normal $\mathbb{Q}$-Gor. / $\mathbb{Q}$

$0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\exists p_0 = p_0(t)$, $\forall p \geq p_0$

$\tau((\mathfrak{a}_p)^t) = \mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)_p$ in R_p : red. mod p

A few remarks on <u>Pf.</u>

$\subseteq$ always holds.

For $\supseteq$, need prove :

$\mu_p : Y_p \longrightarrow X_p = \mathrm{Spec}\, R_p$: log resol. of $\mathfrak{a}_p$

the injectivity of Frobenius of (local) cohomology on Y_p

$\Uparrow$

vanishing of cohomology of the form :

$H^i(Y_p, \mathcal{F}_p(p \cdot A_p)) = 0$ for $p \gg 0$ (Serre Vanishing)

($i > 0$, $\mathcal{F}_p$: coherent , A_p : ample div.)

F-singularities of pairs

R : normal, char. $p > 0$

D : effective $\mathbb{R}$-divisor on $X = \operatorname{Spec} R$

$X \xrightarrow{F} X$: id. on top. sp.

$F : \mathcal{O}_X \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$; $a \longmapsto a^p$: mod-fin.

(i.e. $X \xrightarrow{F} X$: fin. morphism)

Def. (local)

① (X, D) : F-pure $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall q = p^e$

$$(*)\quad F^e : \mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F^e_*\mathcal{O}_X \hookrightarrow F^e_*\mathcal{O}_X(\lfloor (q-1)\cdot D \rfloor)$$

$\exists$ splitting as $\mathcal{O}_X$-module homom.

$\Uparrow$

② (X, D) : strongly F-regular

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \neq \forall c \in R = \mathcal{O}_X$, $\exists q = p^e$ $(\Leftrightarrow \forall q \gg 0)$

$$(**)\quad \begin{tikzcd} \mathcal{O}_X \arrow[r, "cF^e"] \arrow[dr, bend right, "F^e"'] & F^e_*\mathcal{O}_X(\ulcorner qD \urcorner) \arrow[l, bend left, "\exists\,\text{splitting}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ & F^e_*\mathcal{O}_X(\ulcorner qD \urcorner + E) \end{tikzcd} \qquad (E = \operatorname{div}(c))$$

$D \leq D'$

(X, D') : F-pure $\Rightarrow$ (X, D) is so.

(resp. str. F-reg.)

R : $\mathbb{Q}$-Gor. local

$0 \neq f \in R$: irred.

$D = t \cdot \mathrm{div}_X(f)$, $t \geq 0$

(*) $R \hookrightarrow R^{1/q} \longrightarrow \left(\frac{1}{f^{\lfloor (q-1)t \rfloor}} R\right)^{1/q}$

(**) $R \hookrightarrow \left(\frac{1}{c f^{\lceil qt \rceil}} R\right)^{1/q}$

(X, tD) : str. F-reg. $\Leftrightarrow$ $\tau(f^t) = R$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \big\| \ (p \gg 0)$

(X, tD) : Kawamata log term. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{J}(f^t) = R$

$(X, 0)$: F-pure / str. F-reg.

$\Rightarrow$ Say $\underset{R}{X}$ is F-pure / str. F-reg.

R: str. F-reg.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fpt}(X, \underset{\substack{\#\\0}}{\underbrace{\mathrm{div}_X(f)}}) = \mathrm{fpt}(f) &:= \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \tau(f^t) = R\} \\
&= \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (X, t \cdot \mathrm{div}(f)) : \text{str. F-reg.}\} \\
&= \max\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (X, t \cdot \mathrm{div}(f)) : \text{F-pure}\} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

<u>Ex.</u> $R = k[x,y]$, $k = \overline{k}$

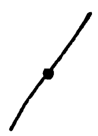
⓪ $D = 0$,

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "x^{1/q}"] & R^{1/q} = k[x^{1/q}, y^{1/q}] = \bigoplus_{0\le i,j\le q-1} R\cdot(x^{i/q}y^{j/q}) \arrow[d, "\oplus"] \\ & R \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

X : (str.) F-reg.

① $D = \mathrm{div}_X(x)$,

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] & \left(\frac{1}{x^{q-1}}R\right)^{1/q} = \bigoplus_{\substack{1-q\le i\le 0 \\ 0\le j\le q-1}} R\cdot(x^{i/q}y^{j/q}) \arrow[d, "\oplus"] \\ & R \arrow[ul, bend left, "id"] \end{tikzcd}$$

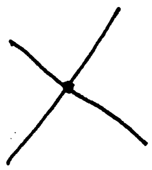
(Fig. )

(X, D) : F-pure , not str. F-reg.
$\searrow$ fpt $= 1$

$(X, (1+\varepsilon)D)$: not F-pure

② $D = \mathrm{div}_X(xy)$,

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] & \left(\frac{1}{(xy)^{q-1}}R\right)^{1/q} = \bigoplus_{1-q\le i,j\le 0} R\cdot(x^{i/q}y^{j/q}) \arrow[d, "\oplus"] \\ & R \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

(Fig. )

(X, D) : F-pure , not str. F-reg.
$\searrow$ fpt $= 1$

<u>Fedder's criterion</u>

$(S, \mathfrak{m})$: regular local , F-finite

① $f \in S$, $\left.\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f^{1/q}} & S^{1/q} \\ & \begin{array}{c}\cup\\ \|\end{array} & \\ S & \hookrightarrow & \left(\frac{1}{f}S\right)^{1/q} \end{array}\right\}$ splits as S-mod.

$$\Updownarrow$$

$$f \notin \mathfrak{m}^{[q]}$$

$\therefore$ $(\operatorname{Spec} S,\ t \cdot \operatorname{div}(f))$: F-pure

$\Leftrightarrow$ $f^{\lfloor t(q-1) \rfloor} \notin \mathfrak{m}^{[q]}$

② $R = S/I$: domain

$\bar{c} = c \bmod I \neq 0$

$R \xrightarrow{\bar{c}^{1/q}} R^{1/q}$ splits $\Leftrightarrow$ $c(I^{[q]} : I) \notin \mathfrak{m}^{[q]}$ in S

$\therefore$ $R = S/I$: F-pure $\Leftrightarrow$ $I^{[q]} : I \notin \mathfrak{m}^{[q]}$ $(q = p)$

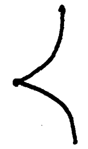
str. F-reg. $\Leftrightarrow$ $\forall c \notin I$, $\exists q$

$c(I^{[q]} : I) \notin \mathfrak{m}^{[q]}$

In particular, $R = S/(f)$ $\left((f^q) : (f) = (f^{q-1})\right)$

R : F-pure $\Leftrightarrow$ $f^{p-1} \notin \mathfrak{m}^{[q]}$

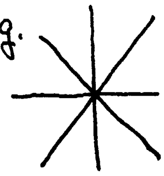
$\Leftrightarrow$ $(\operatorname{Spec} S,\ \operatorname{div}(f))$: F-pure

<u>Ex.</u> ① $f = x^3 - y^2$ (Fig. )

$$\operatorname{fpt}(f) = \begin{cases} \frac{5}{6} = \operatorname{lct}(f) & p \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{5p-1}{6p} \ (\neq \operatorname{lct}(f)) & p \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

② $f = xy(x-y)(x+y)$

$$\mathrm{fpt}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} = \mathrm{lct}(f) & p \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{p-1}{2p} & p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

(Fig. )

<u>Some application</u> ??

global generation of adjoint bundle

X: smooth proj. var. $/k$, char $k \geq 0$, $\dim X = d$.
(F-pure)

L: glob. gen. ample line bdl.

$\Rightarrow \omega_X \otimes L^{\otimes d+1}$: gen. by gl. sects.

<u>char. 0</u> Recall

<u>Lem</u> (Mumford)

$\mathcal{F}$: coherent sheaf s.t. $\left.\begin{array}{l} H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{-i}) = 0 \\ \qquad\qquad (i > 0) \end{array}\right\}$ ※

$\Rightarrow \mathcal{F}$: gen. by gl. sect.

$\mathcal{F} = \omega_X \otimes L^{\otimes d+1}$ Kodaira Vanishing Thm.

<u>char. $p > 0$</u> (Smith, Skoda's thm method, Keeler)

X: F-pure $\Leftrightarrow F^e : \mathcal{O}_X \longrightarrow F^e_* \mathcal{O}_X$

local splits

$$\Leftrightarrow \underset{\mathcal{H}om(-,\omega_X)}{(F^e)^\vee} : F^e_*\omega_X \twoheadrightarrow \omega_X \ : \text{surj.}$$

locallysplits

$$\therefore L^{\otimes d+1} \otimes F^e_*\omega_X \twoheadrightarrow L^{\otimes d+1} \otimes \omega_X$$

gl. gen. $\Rightarrow$ gl. gen.

$$\mathcal{F} = L^{\otimes d+1} \otimes F^e_*\omega_X \cong F^e_*(\omega_X \otimes L^{\otimes p^e(d+1)})$$

$$\mathcal{F} \otimes L^{-i} = F^e_*(\omega_X \otimes L^{\otimes p^e(\underset{\overset{\vee}{0}}{d+1-i})})$$

※ holds for $e \gg 0$ by Serre vanishing.

<u>Obs.</u> char. p, F-purity + Serre VT $\Rightarrow$ gl. gen.

<u>general case</u> ?

$K_X + \underset{\text{not free, ample}}{L}$ $\qquad L^2 > 4$

X : smooth surface $\qquad L \cdot {}^\forall C \geq 2$, $C \ni x$

In considering freeness of $K_X + L$,

<u>Point</u> (char. 0)

$D \sim_{\mathbb{Q}} tL \ (0 < t < 1)$, $\mathrm{ord}_x D = 2$

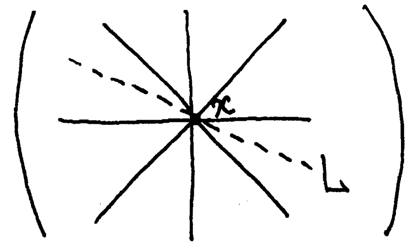
$c := \mathrm{lct}_x(X, D)$

$D \leftarrow cD$

"minimal center" of lc sing. of (X, D) at x is normal.

Want to expect the same for F-pure (thresholds).

<u>Ex.</u>

$D =$  $\quad lct_x = \frac{1}{2}$

(minimal center of lc sing. of $(X, \frac{1}{2}D)$ at x) $= \{x\}$

$\Leftrightarrow$ $(X, \frac{1}{2}D + \varepsilon D')$: not lc, $\forall \varepsilon > 0$, $x \in D'$ general

<u>char. p</u> $\quad D = (xy(x-y)(x+y) = 0)$

$p = 3$, $\mathrm{fpt}_x(X, D) = \frac{1}{3} \lneq lct$

$(X, \frac{1}{3}D + \varepsilon L)$: still F-pure, $\varepsilon \leq \frac{2}{3}$

(minimal $\underbrace{\text{center}}_{\text{of F-purity}}$ of $(X, \frac{1}{3}D)$ at x) $= D$

"minimal center of F-purity" for <u>$D = 0$</u> behaves well!

$(R, \mathfrak{m})$: local

$R \supseteq P := \{c \in R \mid R \xrightarrow{c^{1/q}} R^{1/q}$: not split, $\forall q = p^e\}$

R : str. F-reg. $\Leftrightarrow$ $P = 0$ $\qquad$ $D = 0$

R : F-pure $\Leftrightarrow$ $P \subsetneq R$

"P is the defining ideal of minimal center of F-purity"

<u>Easy</u>: P is a prime ideal if R is F-pure.

<u>Thm.</u> (Aberbach - Enescu)

$R = S/I$, S : regular local

Assume R is F-pure.

$\Rightarrow R/p(R)$ is str. F-regular.

<u>Rmk.</u> (J. C. Vassilev)

R: F-pure $\Rightarrow R/\tau(R)$: F-pure.

References

[AE] I. Aberbach and F. Enescu, The structure of F-pure rings, Math. Z. **250** (2005), 791–806.

[E] L. Ein, *Multiplier ideals, vanishing theorems and applications*, in "Algebraic Geometry–Santa Cruz 1995," pp. 203–219, Proc. Symp. Pure Math. **62**, AMS, Providence, 1997.

[H1] N. Hara, *Geometric interpretation of tight closure and test ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1885–1906.

[H2] N. Hara, *A characteristic p analog of multiplier ideals and applications*, Comm. in Algebra **33** (2005), 3375–3388.

[HY] N. Hara and K. Yoshida, *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3143–3174.

[HT] N. Hara and S. Takagi, *Some remarks on a generalization of test ideals*, Nagoya Math. J. **175** (2004), 59–74.

[HW] N. Hara and K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 363–392.

[HH] M. Hochster, and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[Ke] D. Keeler, *Fujita's conjecture and Frobenius amplitude*, preprint math.AG/0606406

[La] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **49**, Springer-Verlag, 2004.

[S1] K. E. Smith, *Fujita's freeness conjecture in terms of local cohomology*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 417–429.

[S2] K. E. Smith, *The multiplier ideal is a universal test ideal*, Comm. Algebra **28** (2000), 5915–5929.