数理解析研究所講究録
第 1550 巻 2007 年 113-120

On a comparison of minimal log discrepancies in terms of motivic integration

川北真之 (京都大学数理解析研究所)
Masayuki Kawakita (RIMS, Kyoto University)

本稿の目的は、Ein、Mustaţă、安田による、極小モデルプログラムに現れる特異点のモチーフ積分論からの研究手法 [4], [5] を、一般の代数多様体へ拡張させる試行の解説である。原論文は [8] である。代数多様体の局所完全交叉性からの離れ具合を記述する不変量を有理係数イデアル層として導入する。これが多様体と全空間の間の標準因子の同伴公式に自然に現れ、その比較に対し極小対数的食い違い係数の同伴及び逆同伴が証明される。

定理 X を滑らかな代数多様体 A の余次元 c の正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 閉部分代数多様体、$\mathscr{I}_X$ を対応する A 上のイデアル層、$\mathscr{D}_X$ を X の弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層とする。Z を X の閉真部分集合とするとき、

$$\mathrm{mld}_Z(X,\mathscr{D}_X)=\mathrm{mld}_Z(A,\mathscr{I}_X^c)$$

が成立する。

上定理の解釈及び証明を本稿のさしあたりの目標として、その過程でモチーフ積分論による特異点研究の一般化を解説する。議論は標数 0 の代数的閉体 k 上で展開されるが、特異点解消を仮定すれば標数正でも問題無い。

1. 極小対数的食い違い係数

定理で比較される不変量は極小対数的食い違い係数である。我々が扱う係数は、正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X とその上の有理イデアル層 $\mathscr{I}$ の対 $(X,\mathscr{I})$ に関する係数である。ここで"有理イデアル層"とは単純にイデアル層の有理係数への拡張である。すなわち非負有理数 a_i を係数とするイデアル層 $\mathscr{I}_i$ らの形式的有限積 $\prod\mathscr{I}_i^{a_i}$ として表現され、二つの表現 $\prod\mathscr{I}_i^{a_i},\prod\mathscr{J}_j^{a_j}$ は、全ての ra_i,ra_j が整数となる或る正整数 r が存在して各々の r 乗 $\prod\mathscr{I}_i^{ra_i},\prod\mathscr{J}_j^{ra_j}$ が通常のイデアル層として一致するとき、同一の有理イデアル層を定義するものとする。有理イデアル層なる概念を要する理由は、後述の通り、それが全空間 A 上の対 $(A,\mathscr{I}_X^c)$ を X へ制限する際自然に現れるためである。

X の関数体上の"代数的附値"とは、X と双有理な代数多様体上の素因子が定める附値である。それが固有双有理射 $f\colon\bar{X}\to X$ を伴う代数多様体 $\bar{X}$ 上の素因子 E の定める代数的附値 v_E であるとき、$f(E)$ を附値 v_E の X 上の"中心"と言う。X は $\mathbb{Q}$-Gorenstein であるから例外 $\mathbb{Q}$-因子 A を用いて $K_{\bar{X}}=f^*K_X+A$ と記述するとき、附値 v_E の"対数的食い違い係数" $a_E(X,\mathscr{I})$ が $1+\mathrm{mult}_E A-\mathrm{mult}_E\mathscr{I}$ として定義される。対 $(X,\mathscr{I})$ に関する X の閉部分集合 Z 上の"極小対数的食い違い係数" $\mathrm{mld}_Z(X,\mathscr{I})$ とは、中心が Z に含まれる代数的附値の対数的食い違い係数 $a_E(X,\mathscr{I})$

らの極小値である。2次元以上ではそれは非負有理数または $-\infty$ となるが、便宜上1次元においても負となるときは $-\infty$ であると定義し直す。

極小対数的食い違い係数は、高次元極小モデル理論の中で導入された不変量である。極小モデル理論は現在極小モデルプログラムの形で定式化されているが、これはフリップの存在及びフリップの列の終止が示されて初めて完成する。両者は一般次元では大きな予想であったが、昨年 Hacon と McKernan により低次元極小モデルプログラムの仮定下で*フリップの存在が証明され([7])、終止予想のみが残されることとなった。終止予想は大域的問題であるが、Shokurov の観察 [11] に従えば、局所的な値である極小対数的食い違い係数についての二つの予想に還元される。一つは閉点上の極小対数的食い違い係数の下半連続性であり、もう一つは或る種の降鎖律を満たす境界付多様体の族が与える極小対数的食い違い係数の成す集合の昇鎖律である。この視点が、極小対数的食い違い係数を研究する直接の動機である。

また、特異点の程度が極小対数的食い違い係数の大小に反映し、非特異点に対し係数が最大となるであろう ([10]) ことが、経験から知られていて、純粋に特異点論的にも興味深い対象となる。顕著な例として2次元正規特異点を挙げると、非特異であるのは極小対数的食い違い係数が1より大きい(或いは2となる)とき、Du Val 特異点であるのは係数が1以上であるとき、商特異点であるのは係数が正のときで、綺麗な対応がある。ところが一般には、次元を固定したとき係数が上に有界であるかどうかすら未解決なのが、現状である。

2. 弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層

Ein、Mustaţă、安田は極小対数的食い違い係数をモチーフ積分論の述語で記述し、応用として局所完全交叉多様体に対する係数の逆同伴及び下半連続性を証明した。X を d 次元正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体とし、rK_X が Cartier 因子となる正整数 r に対してイデアル層 $\mathscr{J}_{r,X}$ を、自然準同型 $(\Omega_X^d)^{\otimes r} \to \mathscr{O}_X(rK_X)$ の像が $\mathscr{J}_{r,X}\mathscr{O}_X(rK_X)$ となるように定義する。このイデアル層はモチーフ積分論の変換公式に自然に現れる。彼らは X が局所完全交叉であるとき、Gorenstein であってさらに $\mathscr{J}_{1,X}$ は明示的計算の容易な Jacobian イデアル層 $\mathscr{J}'_X$ に一致することを利用した。ところが一般には $(\mathscr{J}'_X)^r$ の整閉包が $\mathscr{J}_{r,X}$ のそれに含まれることが言えるのみで、両者の差を表す概念として弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層が導入される。

準備として、正規代数多様体 X 上の有理イデアル層全体の成す集合に同値関係を入れる。正整数 r が有理イデアル層 $\mathscr{I}$ の“分母”であるとは、$\mathscr{I}^r$ が通常のイデアル層で表現されるときを言い、その通常のイデアル層を $\mathscr{I}$ の“r 乗表現イデアル層”と呼ぶ。X 上の有理イデアル層 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ は、或る共通の分母 r と各々の r 乗表現イデアル層があってそれらの整閉包が一致するとき同値であると定義し、$\langle\mathscr{I}\rangle = \langle\mathscr{J}\rangle$ と書く。これを代数的附値の視点から解釈すれば、全ての代数的附値 v_E に

*Birkar、Cascini、Hacon、McKernan の最新の論文 [1] によれば低次元極小モデルプログラムの仮定も外せる。

対し $\mathrm{mult}_E \mathscr{I} = \mathrm{mult}_E \mathscr{J}$ となることに同値である。特に E に沿う重複度が同値類に対し定義され、$\langle \mathscr{I} \rangle \subset \langle \mathscr{J} \rangle$ を全ての代数的附値 ν_E に対し $\mathrm{mult}_E \mathscr{I} \geq \mathrm{mult}_E \mathscr{J}$ となることで定めれば、X 上の有理イデアル層の同値類集合に半順序が入る。

正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X 上の有理イデアル層 $\mathscr{J}_X$ を $(\mathscr{J}_{r,X})^{1/r}$ として定義すると、これは r の選択に依らない。後で明確にするが、一般に $\langle \mathscr{J}'_X \rangle \subset \langle \mathscr{J}_X \rangle$ が成立し、ちょうど X の局所完全交叉性が成立しない部分集合上で真の包含関係となる。こうして次の妥当な定義を得る。

定義 正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X の“弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層”とは、$\langle \mathscr{J}'_X \rangle = \langle \mathscr{J}_X \rangle \langle \mathscr{D}_X \rangle$ を満たす有理イデアル層 $\mathscr{D}_X$ を言う。

定義名に弱と言う形容詞を付随させた理由は後述する。もちろん先験的にはこのような有理イデアル層 $\mathscr{D}_X$ が存在するかどうかわからない。以下 X の閉点上の芽において、弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層 $\mathscr{D}_X$ を定理の証明に適用される形で具体的に構成する。

d 次元正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X の全空間 A を固定する。すなわち X は滑らかな代数多様体 A の閉部分代数多様体である。我々は d 次元局所完全交叉スキームであって X を含む A の閉部分スキームを一般に選択し、それを Y とする。Bertini の定理から Y は X 及び別の代数多様体 C^Y の和スキームである。Grothendieck 双対から

$$\omega_X = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y) \cdot \omega_Y|_X$$

となる。上式に現れる層 $\mathscr{C}_{X/Y} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y)$ は導手イデアル層であって、X 上閉部分スキーム $D^Y := C^Y|_X$ を定義する。特に D^Y は X 上の $\mathbb{Q}$-Cartier 因子で、

$$\mathscr{O}_X(rK_X) = \mathscr{O}_X(-rD^Y)\omega_Y^{\otimes r} \tag{1}$$

となる。さて全射

$$(\Omega_A^d)^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathscr{J}_{r,Y}\omega_Y^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathscr{J}_{r,X}\mathscr{O}_X(rK_X)$$

を考える。ここで Y 上のイデアル層 $\mathscr{J}_{r,Y}$ は全射 $(\Omega_Y^d)^{\otimes r} \twoheadrightarrow \mathscr{J}_{r,Y}\omega_Y^{\otimes r}$ で定義され、Y の局所完全交叉性から $\mathscr{J}_{r,Y}$ は Jaconian イデアル層 $\mathscr{J}'_Y$ の r 乗に一致する。よって (1) より

$$(\mathscr{J}'_Y\mathscr{O}_X)^r = \mathscr{J}_{r,X} \cdot \mathscr{O}_X(-rD^Y) \tag{2}$$

となる。X を含む d 次元局所完全交叉スキーム Y を様々に選択し等式 (2) の和を取ることで、等式

$$\sum_Y (\mathscr{J}'_Y\mathscr{O}_X)^r = \mathscr{J}_{r,X} \cdot \sum_Y \mathscr{O}_X(-rD^Y)$$

を得る。等式 $\mathscr{J}'_X = \sum_Y \mathscr{J}'_Y\mathscr{O}_X$ から、左辺の同値類 $\langle \sum_Y (\mathscr{J}'_Y\mathscr{O}_X)^r \rangle$ は $\langle (\mathscr{J}'_X)^r \rangle$ に一致し、結論として等式

$$\langle (\mathscr{J}'_X)^r \rangle = \langle \mathscr{J}_X^r \rangle \langle \sum_Y \mathscr{O}_X(-rD^Y) \rangle$$

を得る。従って有理イデアル層 $(\sum_Y \mathscr{O}_X(-rD^Y))^{1/r}$ は X の弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層となる。簡単な考察から、有理イデアル層

$[(\mathscr{J}'_X)^r : \mathscr{J}_{r,X}]^{1/r}$ もやはり弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層であることがわかる。こうして次の命題が示された。

命題 正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X の弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層 $\mathscr{D}_X$ は存在し、それはちょうど X の局所完全交叉性が成立しない部分集合上で非自明となる。

ところで $\mathscr{D}'_X := \sum_Y \mathscr{C}_{X/Y}$ として定めるイデアル層は、任意の代数多様体に対し定義できる点で、$\mathscr{D}_X$ よりも自然な、局所完全交叉性からの離れ具合を記述する不変量に思われる。そこで $\mathscr{D}'_X$ を"局所完全交叉欠陥イデアル層"と呼ぶこととする。X が Gorenstein ならば $\mathscr{D}'_X$ は弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層でもあるが、一般には $\langle\mathscr{D}'_X\rangle \subset \langle\mathscr{D}_X\rangle$ しか成立しない。これが $\mathscr{D}_X$ の定義名に弱を付した理由である。

具体例について弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層 $\mathscr{D}_X$ の計算を紹介することは有用だと思われるから、ここで局所完全交叉ではない正規 Gorenstein 代数多様体 X の例に対し $\mathscr{D}_X$ を計算する。

最初の例は、$\mathscr{D}_X$ は一般には重複度が大きく定理の実用性は残念ながら乏しいことを示唆している。$o \in X = \frac{1}{3}(1,1,1)$ を 3 次元空間 $\mathbb{A}^3 = \operatorname{Spec} k[x_1,x_2,x_3]$ の巡回群 $\mathbb{Z}/(3)$ の作用 $x_i \mapsto \zeta x_i$ (ζ は 1 の原始 3 乗根) による商とする。$\omega_X = \mathscr{O}_X dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ から、$\mathscr{J}_{1,X}$ は原点の極大イデアル層 $\mathfrak{m}$ の平方 $\mathfrak{m}^2$ となる。一方 Jacobian イデアル層 $\mathscr{J}'_X$ については関係 $((x_1^3)^7, (x_2^3)^7, (x_3^3)^7) \subset \mathscr{J}'_X \subset \mathfrak{m}^7$ が簡単にわかり、従って $\mathscr{J}'_X$ は整閉包 $\mathfrak{m}^7$ を持つ。よって $\mathscr{D}_X = \mathfrak{m}^5$ は X の弱局所完全交叉欠陥有理イデアル層である。

上例は埋め込み余次元 7 の 3 次元特異点の例であるが、次例は埋め込み余次元が小さい限りは $\mathscr{D}_X$ の重複度はそれほど大きくないことを示している。局所完全交叉ではない Gorenstein 特異点の埋め込み余次元は 3 以上で、埋め込み余次元 3 の場合は Buchsbaum、Eisenbud による pfaffian を用いた特異点の明示的記述 [2] がある。$x \in X$ を滑らかな代数多様体 A の余次元 3 の正規 Gorenstein 閉部分代数多様体とすると、或る交代写像 $f\colon \mathscr{O}_A^n \to \mathscr{O}_A^n$ が存在し、X は f の $(n-1)$ 位の pfaffian 全ての生成するイデアル層で定義される。このとき X の局所完全交叉欠陥イデアル層 $\mathscr{D}'_X$ は f の $(n-3)$ 位の pfaffian 全てで生成されることがわかる。

3. モチーフ積分論

定理の本質たる部分、逆同伴に当る不等式 $\mathrm{mld}_Z(X,\mathscr{D}_X) \le \mathrm{mld}_Z(A,\mathscr{I}_X^c)$ は、Ein、Mustaţă、安田によるモチーフ積分論からの手法を改良して証明される。その紹介に先立ち、モチーフ積分論の基礎及びその述語による極小対数的食い違い係数の記述について、簡潔に復習すべきであろう。モチーフ積分は有限型スキームの孤空間上定義され、値を Grothendieck 環の拡張に持つ積分である。これは Kontsevich により p 進積分の類似として滑らかな代数多様体上発明され ([9])、Denef、Loeser により任意の代数多様体上へ拡張された ([3])。

Sch/k を $\operatorname{Spec} k$ 上の有限型スキームの成す圏とする。各非負整数 n に付き、X を $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k[t]/(t^{n+1})$ へ送る Sch/k 上の共変関手は右随

伴関手 J_n を持つ。スキーム J_nX の閉点は射 $\mathrm{Spec}\,k[t]/(t^{n+1}) \to X$ に対応し、これを X の n 次"ジェット"と言う。ジェット空間 J_nX の間には自然射 $\pi^X_{nm}\colon J_mX \to J_nX$ $(m \geq n)$ が存在し、逆極限をとることでスキーム $J_\infty X$ が構成される。$J_\infty X$ の k-閉点は射 $\mathrm{Spec}\,k[[t]] \to X$ に対応し、これを X の"孤"と言う。孤空間からジェット空間へは自然射 $\pi^X_n\colon J_\infty X \to J_nX$ が存在する。$a \in k$ に付き変換 $t \mapsto at$ を考えることで、ジェット空間及び孤空間上には自然に $\mathbb{A}^1$ の作用が入る。

"Grothendieck 環" $K_0(\mathrm{Sch}/k)$ とは、Sch/k の同型類集合が生成する自由アーベル群に積構造 $[X][Y] := [X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y]$ を定めた環から、Y が X の閉部分スキームのとき $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$ なる関係式を入れて得られる商環である。$\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1]$ とおき、積閉集合 $\{\mathbb{L}^n\}_{n\geq 0}$ による $K_0(\mathrm{Sch}/k)$ の局所化を $\mathscr{M}$ とすると、$\mathscr{M}$ は環 $\mathscr{M}_{\mathbb{Q}} := \bigoplus_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \mathscr{M}\mathbb{L}^q$ へ自然に拡張される。各有理数 n に対し $F_n\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}$ を $\dim X + q \leq -n$ となる元 $[X]\mathbb{L}^q$ 全ての生成する $\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}$ の部分群とすれば、$\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}$ の降下フィルターを成す。これは $F_m\mathscr{M}_{\mathbb{Q}} \cdot F_n\mathscr{M}_{\mathbb{Q}} \subset F_{m+n}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}$ を満たすから、このフィルターによる $\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}$ の完備化 $\widehat{\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}}$ は導入された降下フィルター $F_n\widehat{\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}}$ を有する位相環となる。$\widehat{\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}}$ の元の"次元"とはそれが $F_{-n}\widehat{\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}}$ に含まれる n の極小値である。

以下 d 次元有限型スキーム X の孤空間 $J_\infty X$ 上の可測集合を定義する。$J_\infty X$ の部分集合 S が段階 n で"安定"であるとは、S が構成可能集合 $\pi^X_n(S)$ の逆像で、各 $m \geq n$ に対し射 $\pi^X_{m+1}(S) \to \pi^X_m(S)$ は底空間 $\pi^X_m(S)$ の Zariski 位相における適当な分割を施せばファイバー $\mathbb{A}^d$ の自明ファイバー空間となることである。$J_\infty X$ の安定部分集合の成す族 $\mathscr{B}_{0,X}$ は有限和、有限積で閉じている。まず $\mathscr{B}_{0,X}$ 上の関数 $\mu_{0,X}\colon \mathscr{B}_{0,X} \to \widehat{\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}}$ を、$\mu_{0,X}(S) := [\pi^X_n(S)]\mathbb{L}^{-(n+1)d}$ として定義する。そうして、$J_\infty X$ の部分集合 S が"可測"であることを、直和分解 $S = \bigsqcup_{i\geq 1} S_i$、及び $i, j \geq 1$ に付き $J_\infty X$ の安定集合 T_i 、次元 d 未満の X の部分代数多様体 Y_{ij} が存在し、S_i, T_i の対称差 $S_i \ominus T_i := (S_i \setminus T_i) \sqcup (T_i \setminus S_i)$ が可算和 $\bigcup_{j\geq 1} J_\infty Y_{ij}$ に含まれ、さらに和 $\sum_{i\geq 1} \mu_{0,X}(T_i)$ が極限を持つことと定義する。極限 $\sum_{i\geq 1} \mu_{0,X}(T_i)$ は S_i, T_i, Y_{ij} の選択に依らず、これを $\mu_X(S)$ と書く。$J_\infty X$ の可測部分集合の成す族 $\mathscr{B}_X$ は有限加法族となり、こうして"モチーフ測度" $\mu_X\colon \mathscr{B}_X \to \widehat{\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}}$ が構成された。ここで $J_\infty X$ の部分集合が測度 0 であることが、次元 d 未満の X の部分代数多様体 Y_i らの孤空間の可算和 $\bigcup_{i\geq 1} J_\infty Y_i$ に含まれることで特徴付けられるように、$\mathscr{B}_{0,X}$ から $\mathscr{B}_X$ への拡張を与えたことに注意されたい。

$J_\infty X$ の部分集合 S 上の関数 $\alpha\colon S \to \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ は、各ファイバーが可測で $\alpha^{-1}(\infty), \alpha^{-1}(-\infty)$ は測度 0 のとき"可測関数"と呼ばれる。例えば次元 d 未満の閉部分集合上非自明な有理イデアル層 $\mathscr{I}$ に沿う位数 $\mathrm{ord}_{\mathscr{I}}$ は可測関数となる。可測関数 α に対し $\mathbb{L}^\alpha$ の"モチーフ積分"を形式的に

$$\int_S \mathbb{L}^\alpha d\mu_X := \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu_X(\alpha^{-1}(q))\mathbb{L}^q$$

と定義し、これが極限を持つとき $\mathbb{L}^\alpha$ は"積分可能"であると呼ぶ。

モチーフ積分論において最も有用な性質は変換公式である。d 次元代数多様体 X の特異点解消 $f\colon \bar{X} \to X$ を考える。f は孤空間の間の射 $f_\infty\colon J_\infty\bar{X} \to J_\infty X$ を導入する。$\bar{X}$ 上のイデアル層 $\mathscr{J}_f$ を、自然準同型 $f^*\Omega_X^d \to \omega_{\bar{X}}$ の像が $\mathscr{J}_f\omega_{\bar{X}}$ となるように定義する。このとき $J_\infty X$ の部分集合 S 上の可測関数 α に対し、合成関数 $\alpha\circ f_\infty$ は $f_\infty^{-1}(S)$ 上の可測関数となり、積分可能性を込め次の"変換公式"が成立する。

$$\int_S \mathbb{L}^\alpha d\mu_X = \int_{f_\infty^{-1}(S)} \mathbb{L}^{\alpha\circ f_\infty - \mathrm{ord}\,\mathscr{J}_f} d\mu_{\bar{X}}\ 。$$

最後に Ein、Mustaţă、安田のモチーフ積分論の述語による極小対数的食い違い係数の記述を紹介する。

定理 $(X,\mathscr{I})$ を正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X と有理イデアル層 $\mathscr{I}$ の成す対、Z を X の閉部分集合とする。非負有理数 a に対し次は同値である。

(1) $\mathrm{mld}_Z(X,\mathscr{I}) < a$ 。

(2) Z 内に写される $J_\infty X$ の安定部分集合 S があって、S 上 $\mathscr{J}_X\mathscr{I}$ に沿う位数は一定かつ不等式 $\dim\mu_X(S) + \mathrm{ord}_{\mathscr{J}_X\mathscr{I}} S > -a$ を満たす。

特に極小対数的食い違い係数 $\mathrm{mld}_Z(X,\mathscr{I})$ は X の Z に沿う形式スキームの不変量である。

4. 定理の証明

我々は定理の精密な解釈へと移る。定理の主張は局所的であるから、閉点上の芽において議論する。X の次元を d とし、rK_X が Cartier 因子となる正整数 r を固定する。$\mathscr{D}_X$ の構成時と同様、d 次元局所完全交叉スキームで X を含む A の閉部分スキームを一般に選択し、それを Y とする。Y は X 及び別の代数多様体 C^Y の和スキームで、$D^Y := C^Y|_X$ は X 上の $\mathbb{Q}$-Cartier 因子であった。我々はさらに A 上の Y を含む c 個の素因子 $H_1^Y,\ldots,H_c^Y$ を一般に選択することで、Y をそれらの完全交叉として実現する。このとき Grothendieck 双対から自然な同伴公式

$$K_X + D^Y = (K_A + \sum_{1\le i\le c} H_i^Y)|_X$$

を得る。Y, H_i^Y の選択の一般性より

$$\mathrm{mld}_Z(X,\mathscr{D}_X) = \mathrm{mld}_Z(X,D^Y),$$
$$\mathrm{mld}_Z(A,\mathscr{I}_X^c) = \mathrm{mld}_Z(A,\mathscr{I}_Y^c) = \mathrm{mld}_Z(A,\sum_{1\le i\le c} H_i^Y)$$

であるから、定理の主張の両辺の比較の妥当性がわかる。ちなみに定理は高木俊輔の予想 [12, Conjecture 4.4] に応える形でもある。

同伴に当る不等式 $\mathrm{mld}_Z(X,D^Y) \ge \mathrm{mld}_Z(A,\sum_i H_i^Y)$ はよくある議論から従う。特異点解消 $f\colon \bar{A} \to A$ を、$\bar{A}$ 上例外集合は因子 $\sum_j E_j$、$\bar{H}_i^Y$ を H_i^Y の厳密変換とするとき $\sum_i \bar{H}_i^Y + \sum_j E_j$ は単純正規交叉因子、$\bigcap_{1\le i\le c}\bar{H}_i^Y$ は X, C^Y の特異点解消となる代数多様体 $\bar{X}, \bar{C}^Y$ の直和スキーム、$\bar{X}$ と交わる E_j については $f(E_j) = f(E_j|_{\bar{X}})$ となるように選択する。$K_{\bar{A}} + \sum_i \bar{H}_i^Y +$

$\sum_j E_j = f^*(K_A + \sum_i H_i^Y) + \sum_j a_j E_j$ と書くと $K_{\bar{X}} + \sum_j E_j|_{\bar{X}} = f^*(K_X + D^Y) + \sum_j a_j E_j|_{\bar{X}}$ であるから、不等式 $\mathrm{mld}_Z(X, D^Y) \geq \mathrm{mld}_Z(A, \sum_i H_i^Y)$ を得る。

逆同伴に当る不等式 $\mathrm{mld}_Z(X, D^Y) \leq \mathrm{mld}_Z(A, \sum_i H_i^Y)$ にモチーフ積分論が応用される。証明のあらすじを記す。非負有理数 a に対し不等式 $\mathrm{mld}_Z(A, \sum_i H_i^Y) < a$ を仮定して不等式 $\mathrm{mld}_Z(X, D^Y) < a$ を導けばよい。モチーフ積分論による極小対数的食い違い係数の記述によれば、Z 内に写される $J_\infty A$ の $\mathbb{A}^1$-不変既約閉部分安定集合 S_∞ が存在し、S_∞ 上 $\mathrm{ord}_{H_i} \geq p$、かつ $S_m := \pi_m^A(S_\infty)$ とおくと十分大きい m に対し不等式

$$\dim S_m - (m+1)(d+c) + cp > -a \tag{3}$$

が成立する。A が滑らかであることから $\mu_X(S_\infty \cap J_\infty X) \neq 0$ がわかり、特に $S_\infty \cap J_\infty X$ は Y の特異点集合の孤空間には含まれない。従って $\mathrm{ord}_{\mathscr{J}'_Y}$ は $S_\infty \cap J_\infty X$ 上最小値 e を非負整数として持つ。

$T_\infty^o := S_\infty \cap J_\infty X \cap (\mathrm{ord}_{\mathscr{J}'_Y})^{-1}(e)$ は $J_\infty X$ の安定部分集合となることが簡単にわかる。ところが $(\mathscr{J}'_Y \mathscr{O}_X)^r \subset \mathscr{I}_{C^Y} \mathscr{O}_X$ ($\mathscr{I}_{C^Y}$ は C_Y に対応する A 上のイデアル層) であるから、大きい m に対し、$T_m^o := \pi_m^X(T_\infty^o) \subset J_m Y \setminus J_m C^Y$、特に $(\pi_m^Y)^{-1}(T_m^o) \subset J_\infty Y \setminus J_\infty C^Y \subset J_\infty X$ となる。この包含関係が局所完全交叉の場合へ議論を帰着させる鍵である。これから $(\pi_m^Y)^{-1}(T_m^o) = T_\infty^o$ が従い、T_∞^o は $J_\infty Y$ の部分集合としても安定となるのである。

あとは簡単な次元の数え上げである。n, m を十分大きい整数とする。$U_m^o := S_m \cap J_m Y \cap (\mathrm{ord}_{\mathscr{J}'_Y})^{-1}(\mathbb{Z}_{\leq e}) \cap (\mathrm{ord}_{\mathscr{I}_{C^Y}})^{-1}(\mathbb{Z}_{\leq re})$ は T_m^o を含む $S_m \cap J_m Y$ の開集合である。さらに $m \gg n$ とすると [6] より $J_n Y$ 上 $J_\infty Y$ の像は $J_m Y$ のそれに一致し、$T_n^o = \pi_{nm}^Y(U_m^o)$ となる。

T_∞^o 内の一般の孤 γ を固定し、その $J_n Y, J_m Y$ 上の像を γ_n, γ_m と書く。まず Y の完全交叉性から不等式

$$\dim_{\gamma_m} U_m^o \geq \dim S_m - c(m+1-p) \tag{4}$$

を得る。さらに Taylor 展開の議論を用いると、やはり Y の完全交叉性から

$$(\pi_{nm}^Y)^{-1}(\gamma_n) \cong \mathbb{A}^{(m-n)d+e} \tag{5}$$

がわかる。よって (4)、(5) から不等式

$$\begin{aligned} \dim_{\gamma_n} T_n^o &= \dim_{\gamma_n} \pi_{nm}^Y(U_m^o) \\ &\geq \dim_{\gamma_m} U_m^o - \dim_{\gamma_m} (\pi_{nm}^Y)^{-1}(\gamma_n) \\ &\geq \dim S_m^o - c(m+1-p) - ((m-n)d+e) \end{aligned} \tag{6}$$

を得る。(3)、(6) より不等式

$$\dim T_n^o - (n+1)d + e > -a$$

が従う。(2) より $J_\infty X$ 上 $\mathrm{ord}_{\mathscr{J}'_Y} = \mathrm{ord}_{\mathscr{J}_X} + \mathrm{ord}_{D^Y}$ となるので、モチーフ積分論による極小対数的食い違い係数の記述から不等式 $\mathrm{mld}_Z(X, D^Y) < a$ が従い、これで定理が証明された。

参考文献

1. Birkar, C., Cascini, P., Hacon, C., McKernan, J. Existence of minimal models for varieties of log general type. preprint, math.AG/0610203 (2006)
2. Buchsbaum, D., Eisenbud, D. Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3. Amer. J. Math. **99**, 447–485 (1977)
3. Denef, J., Loeser, F. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. Invent. Math. **135**, 201–232 (1999)
4. Ein, L., Mustaţă, M. Inversion of adjunction for local complete intersection varieties. Amer. J. Math. **126**, 1355–1365 (2004)
5. Ein, L., Mustaţă, M., Yasuda, T. Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction. Invent. Math. **153**, 519–535 (2003)
6. Greenberg, M. Rational points in Henselian discrete valuation rings. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **31**, 59–64 (1966)
7. Hacon, C., McKernan, J. On the existence of flips. preprint, math.AG/0507597 (2005)
8. Kawakita, M. On a comparison of minimal log discrepancies in terms of motivic integration. preprint, math.AG/0608512 (2006)
9. Kontsevich, M. lecture at Orsay (1995)
10. Shokurov, V. Problems about Fano varieties. Birational geometry of algebraic varieties, Open problems, Katata, 30–32 (1988)
11. Shokurov, V. Letters of a bi-rationalist V. Minimal log discrepancies and termination of log flips. Tr. Mat. Inst. Steklova **246**, 328–351 (2004); translation in Proc. Steklov Inst. Math. **246**, 315–336 (2004)
12. Takagi, S. F-singularities of pairs and Inversion of Adjunction of arbitrary codimension. Invent. Math. **157**, 123–146 (2004)