数理解析研究所講究録
第 1551 巻 2007 年 105-110

Stability of Volterra difference equations

早稲田大学理工学部　室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Science, Waseda University
東京理科大学理学部　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

Volterra 差分方程式

$$\begin{cases} x_{i+1} = qx_i - \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{i} a_{i,j} f_{i-j}(x_j), & i = 0, 1, 2, \cdots, \\ x_j = \phi_j, & -\infty < j \leq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

について考える．ここで $0 < q < 1$ であり，関数 $f_j(x)(0 \leq j < +\infty)$ が与えられ，$a_{i,j} \geq 0\ (-\infty < j \leq i)$，$\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{i} a_{i,j} > 0$ かつ $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{i} a_{i,j} = +\infty$ とする．さらに，ϕ_j，$-\infty < j \leq 0$ と $b_i = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{0} a_{ij} f_{i-j}(\phi_j)$，$i \geq 0$ は有界であり，次を満たす狭義単調増加関数 $f(x)$ が存在するとする．

$$\begin{cases} f(0) = 0, \quad 0 < \dfrac{f_j(x)}{f(x)} \leq 1, \quad x \neq 0\ (0 \leq j < +\infty), \\ f(x) \not\equiv x \text{ のとき，} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ が存在し有限である．} \end{cases} \tag{1.2}$$

これまでに，有限個の遅れを持つ非線形微分方程式に対して，Muroya, Ishiwata, Guglielmi [3] と Uesugi, Muroya, Ishiwata [5] の結果が得られており，本報告では，これらの結果を非有界遅れの差分方程式 (1.1) に応用する．(1.1) の零解の大域漸近安定性の十分条件には若干の制約はあるが，Volterra 積分微分方程式の差分法の安定性解析にも応用可能である (Vecchio [6] と Song, Baker [4] 参照)．

ここで，定義を述べておく．

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは，任意の $\varepsilon > 0$ と非負の整数 i_0 に対して，(1.1) の解 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が $\sup\{|x_{i_0-j}| \mid 0 \leq j < +\infty\} < \delta$ のとき，$|x_i| < \varepsilon$，$i = i_0, i_0+1, \cdots$ となる $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在することである．

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域吸引性**を持つとは，(1.1) のすべての解が $i \to \infty$ に対し，0 に収束することである．

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域漸近安定**であるとは，一様安定であり，かつ大域吸引性を持つことである．

定義 1.4 (1.1) の零解が**一様漸近安定**であるとは，一様安定であり，かつ，(1.1) の任意の解 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が $|x_j| < \delta$，$-\infty < j \leq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{i \to +\infty} x_i = 0$ となる $\delta > 0$ が存在することである．

2 Volterra 差分方程式への応用

この節では，非有界遅れを持つ (1.1) の零解の大域漸近安定性の十分条件を考える．有限個の遅れを持つ差分方程式に対する条件と比べて，証明に少し特別な工夫が必要である．

補題 2.1 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする．任意の $i \ge i_0$ に対し，$x_i \ge 0$ (*respect.* $x_i \le 0$) となるような非負の整数 i_0 が存在し，$\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j}$ は有界であると仮定する．このとき，$\tilde{b}_{i,i_0} = -\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j} f_{i-j}(x_j)$ は有界で，$\limsup_{i\to\infty} x_i \le \dfrac{\limsup_{i\to\infty} \tilde{b}_{i,i_0}}{1-q}$ (*resnect.* $\liminf_{i\to\infty} x_i \ge \dfrac{\limsup_{i\to\infty} \tilde{b}_{i,i_0}}{1-q}$) となる．

さらに，a) $\lim_{i\to\infty} \tilde{b}_{i,i_0} = 0$，もしくは b) $\liminf_{j\to\infty}(\liminf_{i\to\infty} a_{i,j}) > 0$，かつ，$\inf_{j\ge 0} f_j(x) \ge \underline{f}(x)$ (*respect.* $\sup_{j\ge 0} f_j(x) \le \underline{f}(x)$)，$x \in (-\infty, +\infty)$ と $f(0) = 0$ を満たすような $(-\infty, +\infty)$ で狭義単調増加関数 $\underline{f}(x)$ が存在すると仮定する．このとき，$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ が成り立つ．

$\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j} = \sum_{k=(i-i_0)+1}^{\infty} a_{i,i-k}$ であることに注意しよう．(1.1) が convolution タイプ，すなわち，$a_{i,j} = a_{i-j}$，$-\infty < j \le i$ のとき，条件 $\lim_{i\to\infty} \tilde{b}_{i,i_0} = 0$ は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$ と同等である．なぜならば，これは任意の正定数 $i_0 \ge 0$ に対して，$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=(i-i_0)+1}^{\infty} a_k = 0$ と同等であるからである．

補題 2.2 $f(x) \ne x$ で $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする．x_i が 0 のまわりで振動し，$\lambda = \sup_{i\ge 0} \sum_{k=0}^{i} q^{i-k} \sum_{j=-\infty}^{k} a_{k,j} < +\infty$ ならば，x_i は有界である．

注意 2.1 $f(x) \ne x$ で $\lambda < +\infty$ ならば，補題 2.2 より，0 のまわりを振動する (1.1) の任意の解 x_i は 上にも下にも有界である．

ここで，$r_1 = \sup_{i\ge 0} \sum_{k=0}^{i} q^{i-k} (\sum_{j=0}^{k} a_{k,j})$ とおく．次の主定理の証明ができる．

定理 2.1 $f(x)$ が $(-\infty, +\infty)$ で連続で，任意の $L < 0$ に対して $-r_1 f\Big(-r_1 f(L)\Big) > L$ とする．また，次式を仮定するとき，(1.1) の零解は大域漸近安定である．

$$\lim_{k_1\to\infty} (\limsup_{i\to\infty} \sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{i,i-k}) = 0. \tag{2.1}$$

(証明) 補題 2.1 より，(1.1) の解 x_i が 0 のまわりで振動すると仮定する．

I) はじめに，$f(x) \ne x$ の場合を考えよう．(1.1) の解 x_i は補題 2.2 によって有界である．$\underline{x} = \liminf_{i\to\infty} x_i < 0$ を仮定し，$M = \sup_{-\infty<i<+\infty} |f(x_i)| < +\infty$ とおく．また，任意の $0 < \epsilon < \bar{x}$ と $[0, \epsilon]$ での連続関数 $F(x) = -r_1 f(-r_1 f(\underline{x} - x) + 2x) - 3x$ をとる．$F(0) = -r_1 f(-r_1 f(\underline{x})) > \underline{x}$ となるので，$x = 0$ での $F(x)$ の連続性により，$F(\epsilon_0) = -r_1 f(-r_1 f(\underline{x} - \epsilon_0) + 2\epsilon_0) - 3\epsilon_0 > \underline{x}$ となる定数 $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ が存在する．$\underline{x} = \liminf_{i\to\infty} x_i < 0$ により，この $\epsilon_0 > 0$ に対し，$i \ge i_0$ ならば，$x_i > \underline{x} - \epsilon_0$ となる正整数 i_0 が存在する．仮定 (2.1) より，$\epsilon_1 = (1-q)\epsilon_0/M > 0$ に対して，

$$\sum_{j=-\infty}^{(i-k_1)-1} a_{i,j} = \sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{i,i-k} < \epsilon_1, \quad i \ge i_1 \ge 2k_1 + i_0, \quad \text{かつ} \quad q^{k_1+1} < \epsilon_0/M.$$

となる正整数 i_1 と $k_1 \geq i_0$ が存在する．このとき，$l \geq i_1$ と $\tilde{b}_{l,l-k_1} = -\sum_{j=-\infty}^{(l-k_1)-1} a_{l,j} f_{l-j}(x_j)$ に対して，

$$|\tilde{b}_{l,l-k_1}| \leq \Big(\sum_{j=-\infty}^{(l-k_1)-1} a_{l,j} \Big) M = \Big(\sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{l,l-k} \Big) M < \epsilon_1 M = (1-q)\epsilon_0,$$

となり，よって，$i \geq i_1 + k_1$ に対して，$|\sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \tilde{b}_{k,k-k_1}| \leq \sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k}(1-q)\epsilon_0 < \epsilon_0$.

a) x_{i+1}, $i \geq i_1 + k_1$ の上界を考える．

$$x_{i+1} = q x_i - \sum_{j=i-k_1}^{i} a_{i,j} f_{i-j}(x_j) + \tilde{b}_{i,i-k_1}, \quad i \geq i_1 + k_1.$$

i) ある $i \geq i_1 + k_1$ に対して，$x_{i+1} > x_i$ であり，$\underline{x} - \epsilon_0 < x_{\underline{g}(i)} = \min_{i-k_1 \leq j \leq i} x_j < 0$ となる正整数 $\underline{g}(i) \in \{i-k_1, i-k_1+1, \cdots, i\}$ が存在する場合を仮定する．このとき，(1.1) により，

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\leq q^{i-\underline{g}(i)+1} x_{\underline{g}(i)} - \Big(\sum_{k=\underline{g}(i)}^{i} q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{k} a_{k,j} \Big) f(\underline{x} - \epsilon) - \sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \tilde{b}_{k,k-k_1} \\ &\leq -\Big(\sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{k} a_{k,j} \Big) f(\underline{x} - \epsilon) + \epsilon_0 \leq -r_1 f(\underline{x} - \epsilon) + \epsilon_0 \leq R_{\underline{x}} \end{aligned}$$

となる．ここで $R_{\underline{x}} = -r_1 f(\underline{x} - \epsilon_0) + 2\epsilon_0$ である．

ii) $x_{i+1} > x_i$ かつ，ある $i \geq i_1 + k_1$ に対して，$x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-k_1} \geq 0$ となる場合を仮定する．$x_j \geq 0$, $i - k_1 \leq j \leq i$ $q^{k_1+1} M < \epsilon_0$ かつ $|\sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \tilde{b}_{k,k-k_1}| < \epsilon_0$ なので，

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q^{k_1+1} x_{i-k_1} - \Big(\sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{k} a_{k,j} f_{k-j}(x_j) \Big) + \sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \tilde{b}_{k,k-k_1} \\ &\leq -\sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{(i-k_1)-1} a_{k,j} f(\underline{x} - \epsilon) + 2\epsilon_0 \leq R_{\underline{x}}. \end{aligned}$$

となる．ゆえに，i) と ii) の両方の場合に対して，$x_{i+1} \leq R_{\underline{x}}$, $i \geq i_1 + k_1$ を得る．

b) 次に $x_{i+1} = -\sum_{j=i-k_1}^{i} a_{i,j} f_{i-j}(x_j) + \tilde{b}_{i,i-k_1}$, $i \geq i_1 + 2k_1$ の下界を考えよう．

iii) ある $i \geq i_1 + 2k_1$ に対し，$x_{i+1} < x_i$ であり，$R_{\underline{x}} \geq x_{\bar{g}(i)} = \max_{i-k_1 \leq j \leq i} x_j > 0$ となる正整数 $\bar{g}(i) \in \{i-k_1, i-k_1+1, \cdots, i\}$ が存在する場合を仮定する．

このとき，同様に，$x_{i+1} \geq -r_1 f(R_{\underline{x}}) - \epsilon_0 > S_{\underline{x}}$ を得る．ここで，$S_{\underline{x}} = -r_1 f(R_{\underline{x}}) - 2\epsilon_0$ である．

iv) $x_{i+1} < x_i$ および，ある $i \geq i_1 + 2k_1$ に対し，$x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-k_1} \leq 0$ の場合を仮定する．このとき，同様に，

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q^{k_1+1} x_{i-k_1} - \sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{i} a_{k,j} f_{k-j}(x_j) + \sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \tilde{b}_{k,k-k_1} \\ &\geq -\Big(\sum_{k=i-k_1}^{i} q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{(i-k_1)-1} a_{k,j} \Big) f(R_{\underline{x}}) - 2\epsilon_0 \geq S_{\underline{x}}. \end{aligned}$$

このように，iii) と iv) の両方の場合に対し，$x_{i+1} \geq S_{\underline{x}}$, $i \geq i_1 + 2k_1$ を得る．$S_{\underline{x}} - \epsilon_0 = F(\epsilon_0) > \underline{x}$ なので，$x_{i+1} \geq S_{\underline{x}} > \underline{x} + \epsilon_0$, $i \geq i_1 + 2k_1$ となる．これは矛盾する．よって，$\underline{x} = 0$ であり，補題 2.1 より，$\lim_{i \to \infty} x_i = 0$ を得る．

II) $f(x) = x$ の場合に対し，同様に $\limsup_{i \to \infty} |x_i| < +\infty$ を得る．残りは I) と同様に証明できる．よって，結論を得る． □

(1.1) の convolution タイプに対して，条件 (2.1) は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$ になる．

定理 2.1 を特に $f(x) = x$ と $f(x) = e^x - 1$ に適用すると，次の定理を得る．

定理 2.2 (1.1) に対して，(2.1) を仮定し，次が成り立つとする．

$$\begin{cases} f(x) = x \quad \text{ならば}, & r_1 < 1, \\ f(x) = e^x - 1 \quad \text{ならば}, & r_1 \leq 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

このとき，(1.1) の零解は大域漸近安定である．

特に，$f_j(x) = x$, $0 \leq j < \infty$ となる線形の場合に対し，(2.1) と次が成り立つとする．

$$\begin{cases} a_{i,i} \geq q,\ i \geq 0 \quad \text{ならば}, & r_1 < 1 + q \\ a_{i,i} < q,\ i \geq 0 \quad \text{ならば}, & \tilde{r}_1 < 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで，$\tilde{r}_1 = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^{i} (q - \liminf_{l \to +\infty} a_{l,l})^{i-k} (\sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j})$ である．このとき，*(1.1)* の零解は大域漸近安定である．この場合，$q_x - a_{i,i}x = (q - a_{i,i})x$, $i \geq 0$ なので，$q \geq 1$ も考えられる．

定理 2.2 は (1.1) の零解の一様漸近安定である十分条件を導くのに便利である．

最後に，$a_0 > \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ かつ $f(x) = f_0(x) = e^x - 1$ という条件のもとで，次の convolution タイプの差分方程式

$$x_{i+1} = x_i - \sum_{j=-\infty}^{i} a_{i-j} f_{i-j}(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.4}$$

に対する大域的漸近安定性の条件を考える．

定理 2.3 条件 (1.2) と $-\infty < j \leq i$ において $a_{i,j} = a_{i-j} \geq 0$ に加え，

$$\begin{cases} \bar{r}_1 > \bar{r}_2 \geq 0, \quad \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \leq 2, \quad \text{かつ} \\ \bar{r}_1 + \bar{r}_2 > 1 \quad \text{ならば}, \quad \bar{r}_1 + \bar{r}_2 - \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} e^{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 1} \geq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

ならば，(2.4) の零解が大域的漸近安定である．ここで，$\bar{r}_1 = a_0$ および $\bar{r}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ である．

3 $|f_i(x)| \leq |x|$, $i \geq 0$ の一般的な場合

ここで，次の方程式の解 x_i の有界性の条件と零解の大域吸引性の条件を考えよう．

$$x_0 = \phi_0, \quad x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=0}^{i} a_{i,j}x_j + b_i, \quad b_i = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{i,j}\phi_j, \quad i \geq 0. \tag{3.1}$$

(3.1) より，$|x_0| = |\phi_0|$,　$|x_{i+1}| \leq \sum_{j=0}^{i} |\tilde{a}_{i,j}||x_j| + |\tilde{b}_i|$,　$i \geq 0$ となる．ここで，$\tilde{b}_i = b_i$, $i \geq 0$, $\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j}$, $0 \leq j \leq i-1$ かつ $\tilde{a}_{i,i} = -q + a_{i,i}$ である．

このとき，Crisci 他 [2] の定理 3.1 と系 3.1 を改良する次の定理を得る．

定理 3.1　$A = \sup_{0\leq j\leq i} |\tilde{a}_{i,j}| < +\infty$ と $B = \max(|\phi_0|, \sup_{i\geq 0} |\tilde{b}_i|) < +\infty$ を仮定と，$|x_i| \leq (1+A)^i B$,　$i \geq 0$ である．特に，$\bar{A}_0 = \sup_{i\geq i_0} \sum_{j=i_0}^{i} |\tilde{a}_{i,j}| < 1$ となるような正整数 i_0 が存在するならば，x_i は有界であり，また $|x_i| \leq (1+A)^{i_0} B/(1-\bar{A}_0) < +\infty$, $i \geq i_0$ となる．さらに，$\lim_{i\to\infty} b_i = 0$ 及び $\lim_{k_1\to\infty}(\lim_{i\to\infty} \sum_{k=k_1+1}^{i} |a_{i,i-k}|) = 0$ ならば，$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ となる．

Crisci 他 [1] の証明と同様に，さらに次の定理を得る．

定理 3.2　$\bar{A} = \sup_{j\geq 0} \sum_{i=j}^{\infty} |\tilde{a}_{i,j}| < 1$ および $\bar{B} = |\phi_0| + \sum_{i=0}^{\infty} |\tilde{b}_i| < +\infty$ ならば，$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \leq \bar{B}/(1-\bar{A}) < +\infty$ であり，さらに $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ となる．

線形方程式

$$x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=0}^{i} a_{i,j} x_j + b_i, \quad b_i = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{i,j}\phi_j, \qquad i \geq 0 \tag{3.2}$$

に対して，(3.2) の零解の大域安定性に関する次の定理を得る (Crisci 他 [2] の定理 3.1 および系 3.1 を参照)．

定理 3.3　線形方程式 (3.2) に対し，次を仮定する．

$$\begin{cases} \tilde{c}_{i,j} = a_{i-1,j} - a_{i,j}, \ 0 \leq j \leq i-2, \quad i \geq 2 \\ \tilde{c}_{i,i-1} = -q + a_{i-1,i-1} - a_{i,i-1}, \quad i \geq 1, \quad \tilde{c}_{i,i} = 1 + q - a_{i,i}, \quad i \geq 0 \\ \tilde{d}_0 = b_0 \quad と \quad \tilde{d}_i = b_i - b_{i-1}, \quad i \geq 1. \end{cases}$$

i) $C = \sup_{0\leq j\leq i} |\tilde{c}_{i,j}|$ および $D = \max(|\phi_0|, \sup_{i\geq 0} |\tilde{d}_i|) < +\infty$ を仮定するとき，$|x_i| \leq (1+C)^{i_0} D$, $i \geq 0$ となる．特に $\bar{C}_0 = \sup_{i\geq i_0} \sum_{j=i_0}^{i} |\tilde{c}_{i,j}| < 1$ となる正整数 i_0 が存在するならば，x_i が有界であり，$|x_{i+1}| \leq (1+C)^{i_0} D/(1-\bar{C}_0) < +\infty$, $i \geq i_0$ である．さらに，

$$\lim_{k_1\to\infty} (\lim_{i\to\infty} \sum_{k=k_1+1}^{i} |\tilde{c}_{i,i-k}|) = 0 \qquad かつ \qquad \lim_{i\to\infty} (b_i - b_{i-1}) = 0$$

ならば，$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ となる．

ii) もし，$\bar{C} = \sup_{j\geq 0} \sum_{i=j}^{\infty} |\tilde{c}_{i,j}| < 1$ かつ $\bar{D} = \sum_{i=0}^{\infty} |b_{i+1} - b_i| + |b_0| < +\infty$ ならば，$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq \bar{D}/(1-\bar{C}) < +\infty$ となり，さらに $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ である．

例 3.1　$a_{i,j} = a$, $0 \leq j \leq i$ とする．この場合，(2.1) は満足しないが，$2q < a < 2$ および $\sum_{i=0}^{\infty} |b_{i+1} - b_i| + |b_0| < +\infty$ のとき，$\bar{C}_0 < 1$ は $|1 + q - a| + q < 1$ となり，定理 3.3 より，$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ が成り立つ．

4 応用

次の Volterra 差分方程式を考える.

$$x_{i+1} = x_i - \sum_{j=-\infty}^{i} a_{i-j} f(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, \tag{4.1}$$

ここで, $f(x) = e^x - 1$, $a_j = \lambda c_j$, $0 \le j < +\infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lambda$, さらに, $i = 0, 1, 2, \cdots$ に対し,

$$c_0 = \int_0^1 (1-t)k(t)dt, \quad c_{i-j} = \int_0^1 \int_0^1 k(i-j+u-s)dsdu, \quad -\infty < j \le i-1, \tag{4.2}$$

かつ $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = \int_i^{i+1} \int_{-\infty}^{u} k(u-s)dsdu = \int_0^{\infty} k(t)dt = k^* < +\infty$ である.

このとき, (4.1) に定理 2.2 の結果を応用できる. たとえば, $k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$ とおくと, $k^* = 1$ および $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^1 (1-t)e^{-\alpha t^2} dt \ge \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^1 (1-t)(1-\alpha t^2)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{12})$ である. ここで少なくとも, $\alpha \le \frac{1}{4\pi}$ に対して, $c_0 > \frac{1}{2}$ を得て, 条件 $a_0 > \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が成り立ち, 特に, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j / a_0 \le 1/e$ ならば, 定理 2.3 の (2.5) を満足し, (4.1) の零解は $0 < \lambda \le 2$ ならば, 大域漸近安定である.

定理 2.2 を (4.1) の $f(x) = x$ の場合に適用すると, (4.1) の零解の一様漸近安定性の十分条件を得る. たとえば, $0 < \lambda < 2$ ならば, $k(t) = te^{-t}$ の (4.1) の場合の零解は一様漸近安定である (cf. Song, Baker [4]).

他の応用として, 次の離散 Wazewska-Czyzewska-Lasota モデルがある (Wazewska, Czyzewska, Lasota [7] 参照).

$$y_{i+1} = qy_i + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e^{-\gamma y_{i-j}}, \ i = 0, 1, 2, \cdots, \quad 0 < q < 1, \ \gamma > 0, \ \beta_j \ge 0, \ \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j > 0. \tag{4.3}$$

正の平衡点 y^* は $y^* = \beta e^{-\gamma y^*}/(1-q)$ の正根で, 定理 2.2 の (2.2) より, $\gamma y^* \le 1$ ならば, y^* は大域漸近安定である.

参考文献

[1] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, Stability results on some direct quadrature methods for Volterra integro-differential equations, *Dynam. Systems Appl.* **7** (1998), 501-518.

[2] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, A priori bounds on the solution of a nonlinear Volterra discrete equation. Special issue: Hereditary systems qualitative properties and applications, Part I. *Stab. Control Theory Appl.* **3** (2000), 38-47.

[3] Y. Muroya, E. Ishiwata, N. Guglielmi, Global stability for nonlinear difference equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* (2007), doi:10.1016/j.jmaa.2006.12.028.

[4] Y. Song, Ch.T.H. Baker, Qualitative behavior of numerical approximations to Volterra integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **172** (2004), 101-115.

[5] K. Uesugi, Y. Muroya, E. Ishiwata, On the global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.* **294** (2004), 560-580.

[6] A. Vecchio, Stability of backward differentiation formulas for Volterra integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **115** (2000), 565-576.

[7] M. Wazewska-Czyzewska, A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of the red-blood cells systems, *Ann. Polish Math. Soc. Series III, Appl. Math.* **17** (1988), 23-40.