数理解析研究所講究録
第1552巻 2007年 50-58

Hamilton系の可積分性とその解の特異点分布の規則性

椙山女学園大学・現代マネジメント学部　石井 雅治 (Masaharu ISHII)
School of Modern Management, Sugiyama Jogakuen University.

1. はじめに

力学系の解を複素時間の平面上に拡張し，その特異点を考えよう．この特異点は系の主要な情報を含んでいるはずであり，これを調べるだけで系の大域的な情報が得られることが期待される．このような観点から系を解析するのが特異点解析である．

特に，Painlevé特性とよばれる，解の動く特異点が全て極であるという特性と，系の可積分性との関係を探る研究の系譜が存在し，様々な結果が得られている．この系譜の内で解析的な（非数値的な）研究は，常微分方程式の可積分性が，或る1個のまたは極少数個の特異点の近傍で，解（または線形化系の解）の様相をどのように決定するかを主題としてきた．

他方，特異点解析には，常微分方程式のカオスの特徴を探る試みとして，解の複数の特異点の分布を主題とする研究の系譜も存在し（例えば[1],[2],[3],[4]），数値的または半解析的な結果が得られている．いずれの結果も，カオス的挙動を示す系では，解の特異点分布が稠密化したりフラクタル状になることを示している．しかし，この分布が系の挙動にどのような影響を与えるかを理論的に明らかにするには至っていない．

このような従来の研究に対し，我々の研究は，いわばこの2つの系譜を橋渡しし，Hamilton系の可積分性とその解の特異点分布との関係を示し，更に，特異点分布と系の挙動との関係を明らかにするものである．すなわち2自由度Hamilton系について，可積分性が，特異点を周期的に分布させ，局所解の解析接続に具体的な表示を与えることを示した．更に，この特異点分布と解析接続の構造が，準周期運動を可能にすることを，また系のトポロジカルな情報をもたらすことを明らかにした．この研究では，以上の結果を得るために，可積分性が与える対称性と系のトポロジーとの関係を本質的に用いている．

これらの結果は，カオス的挙動を示す系の特異点分布を直接的には与えないが，特異点配置の不規則性から，或る意味での非可積分性を導くことができる．また，カオスの発生機構を，特異点分布の規則性の消失として示唆するものになっている．

ところで，従来は，可積分Hamilton系の解の特異点分布が規則的になることは，解が楕円関数等で表されることの帰結であると理解されてきた．可積分系に関する精緻な代数幾何学的研究の進展により，このような解の表現はかなり明らかにされている（例えば，[5]や[6]と[6]の引用文献）．しかし，解が楕円関数等で表されるためには，少なくとも全ての第一積分がかなり具体的に，例えば或るクラスの多項式等として与えられていなければならないが，これを一般的に構成することは極めて困難である．従って，このような理解は，既に良いクラスの積分が構成されている

可積分系について狭く限定され，可積分系一般については不可能であることに注意しなければならない．

一方，我々の研究は，特異点近傍の解軌道上で第一積分の存在を仮定するだけで，具体的に第一積分を構成することなしに，またもちろん楕円関数解や Abel 関数解を構成することなしに，一般的に特異点分布の規則性を説明するものである．これにより，従来の理解では不可能であった，上述の非可積分性の判定も可能になるのである．

2．可積分 Hamilton 系の特異点分布

この節では，対象とする系を表し，特異点分布に関する定理を述べ，その帰結を説明する．定理の証明は§4で与える．

まず，実空間で定義された，2自由度自励 Hamilton 系を次で表す．

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H(p,q)}{\partial q},\quad \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H(p,q)}{\partial p}. \tag{2.1}$$

ここで，t を $\mathbb{C}$ 上で，$p=(p_1,p_2)$, $q=(q_1,q_2)$ をそれぞれ $\mathbb{C}^2$ 上で考え，H は p,q の一価解析関数とする．ただし，H の解析性は低次元の適当な除外集合の上で破れていても構わない．定理はこの系を対象とする．基本の定義を実空間で行うのは，後にコンパクト性を要請する際，配慮すべき次元を下げるためである．

この系が可積分であるとは，次を満たす p,q の一価解析関数 $\Phi(p,q)$ が存在することとする．

$$[H,\Phi]=0.$$

ここで，記号[]は通常の Poisson 括弧である．ただし，Φ の解析性は低次元の適当な除外集合の上で破れていても構わない．この Φ を第一積分とよぶ．

系の自励性によって，1つの特異点が $t=0$ にあるとして一般性を失わない．この特異点が極であると仮定し，解の，$t=0$ の回りでの展開を

$$p_i(t)=t^{d_i}(p_{i0}+p_{i1}t+p_{i2}t^2+\cdots),\quad q_i(t)=t^{e_i}(q_{i0}+q_{i1}t+q_{i2}t^2+\cdots)\quad (i=1,2) \tag{2.2}$$

とおいて(2.1)に代入すれば，直接的計算によって t の冪指数について帰納的に p_{ij}, q_{ij} が決定される．この決定の際の整合性によって，局所的な有理型解が存在するか否かを，少なくとも形式的には確かめられる．通常，この形式解が整合的に構成できれば，或る領域で収束する有理型の局所解となる．以下では，局所解の成分の1つ以上が極を持つ場合，有理型局所解とよぶ．

(2.2)の展開を持つ有理型局所解の最低次の項を，以下，“$(t^{d_1}p_{10}, t^{d_2}p_{20}, t^{e_1}q_{10}, t^{e_2}q_{20})$ バランス”の特異点（または極）とよび，この有理型局所解を，以下，“$(t^{d_1}p_{10}, t^{d_2}p_{20}, t^{e_1}q_{10}, t^{e_2}q_{20})$ バランス”の解とよぶ．同じバランスの解は，任意パラメータを持てば，その値のみが異なる同一の展

開(2.2)を持つので，解の展開はこの意味において一意性的である．なお，最低次の項が任意パラメータとなる場合も有り得る．この場合２つの解のバランスが同じであるとは，最低次の項において，両者の同じ成分に任意パラメータが有り，両者の他の成分は等しいこととする．

或るバランスの解が，t の並進についての自明な任意パラメータを除き，３個の独立な任意パラメータを含むとき，この解を，以下，“局所一般解”とよぶ．(2.2)の展開形より，任意パラメータとして，任意パラメータと t による p, q の偏微分が非退化になるものがとれる．この非退性を持った任意パラメータを，c_1, c_2, c_3 とおき，(2.2)で表される局所一般解を次で表記する．

$$p_i(t) = \xi_i(t; c_1, c_2, c_3), \quad q_i(t) = \zeta_i(t; c_1, c_2, c_3) \quad (i = 1, 2). \tag{2.3}$$

以下では，$\xi = (\xi_1, \xi_2), \zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ という表記も用いる．

以上の準備の下で，主結果である次の定理を述べることができる．

定理： (2.1)が可積分であり，その解は，$t = 0$ の近傍で，$t = 0$ に極を持つ局所一般解(2.3)で表されるとする．更に，この局所一般解を乗せた，$H = const., \Phi = const.$ が定める等レベル集合は，実空間のほとんど至るところでコンパクトであり，この局所一般解の軌道全体から成る集合上で，

$$\left\langle \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} \end{pmatrix} \right\rangle_{Span}$$

の複素次元が２であるとする．

このとき，適当な任意パラメータ c_1, c_2, c_3 をとれば，或る $\Delta t\ (\in \mathbb{C})$ と $\Delta \tau\ (\in \mathbb{C})$ の組が少なくとも１つ存在し，解は，$t = k\Delta t$ において $t = 0$ と同じバランスの極を持ち，$t = k\Delta t$ の近傍において次で表される．

$$\begin{aligned} p(t) &= \xi(t - k\Delta t; c_1, c_2, k\Delta\tau), \\ q(t) &= \zeta(t - k\Delta t; c_1, c_2, k\Delta\tau). \end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで，k は任意の整数であり，$\Delta\tau$ は c_1, c_2 に一般に依存する．

注： H, Φ の偏微分の張る次元を２としたが，この条件は，精密な取り扱いによって弱められる可能性もある．

定理より，このバランスの特異点は，少なくとも周期的に分布し，更に，もし Δt が２つ存在すれば，複素平面上で２重周期を持って格子状に分布する．

定理の対偶を利用すれば，このバランスの特異点の分布が周期性を持たないことを示すことによって，系の非可積分性を示すことができる．周期性を持たないことの証明は，精度を評価できる数値計算によって可能であると思われるが，未だ十分な検討はしていない．ただし，非可積分性の厳密な証明には，注にも記載した非退化性の処理が問題になる．

また，定理は，解の動く特異点が全て極であるという Painlevé の特性を，可積分である場合に部分的に与えるものにもなっている．これを系としておく．

系： 定理の前提の下で，解の動く特異点の内の無限個*が極である．

定理は更に，局所解の t についての解析接続の具体的な表示を与えているが，その意義については次節で考察する．

3．特異点分布と局所解の解析接続の構造が規定する系の挙動

特異点分布がある程度得られれば，系の挙動との結びつきが直ちに問題となる．この節では，定理が与える特異点分布と局所解の解析接続の構造に基づいて，系の挙動を考察する．

一般の４次元の自励常微分方程式で表される次の力学系を考え，これが可積分である場合の挙動を，前節の可積分 Hamilton 系の挙動と対比し，この Hamilton 系の挙動に輪郭を与える．

(3.1) $$\frac{dx}{dt}=f(x) \quad (x=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ f=(f_1,f_2,f_3,f_4)).$$

ここで，t を $\mathbb{C}$ 上で，x を $\mathbb{C}^4$ 上で考え，f_i は x の一価解析関数とする．この系が完全可積分であるとは，次を満たす３個の独立な一価解析関数 $\Phi_i(x)\ (i=1,2,3)$ が存在することとする**．

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}f_k(x)=0.$$

ただし，Φ_i の解析性は低次元の適当な除外集合の上で破れていても構わない．この Φ_i を第一積分とよぶ．

前節と同様に，この系の有理型局所解の極 $t=0$ の回りでの展開を

$$x_i(t)=t^{d_i}(x_{i0}+x_{i1}t+x_{i2}t^2+\cdots) \quad (i=1,2,3,4)$$

とおき，バランスや局所一般解を定義する．局所一般解を次で表記する．

(3.2) $$x_i(t)=\eta_i(t;c_1,c_2,c_3) \quad (i=1,2,3,4).$$

---

* 全てではない．

** “超可積分”とよばれることも少なくない．

この系について，定理１に類似した次の命題が成り立つ.

命題： (3.1)が完全可積分であり，その解は，$t=0$の近傍で，$t=0$に極を持つ局所一般解(3.2)で表され，この解には$t=0$と同じバランスの特異点が他に少なくとも１個存在するとする. 更に，この局所一般解の軌道全体から成る集合上で，

$$\left\langle \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right\rangle_{Span}$$

の複素次元が３であるとする.

このとき，適当な任意パラメータc_1, c_2, c_3をとれば，或る$\Delta t\ (\in \mathbb{C})$が少なくとも１つ存在し，解は，$t=k\Delta t$において，$t=0$と同じバランスの極を持ち，$t=k\Delta t$の近傍において次で表される.

(3.3) $\quad x_i(t)=\eta_i(t-k\Delta t; c_1, c_2, c_3) \quad (i=1,2,3,4).$

ここで，kは任意の整数である.

完全可積分系では，可積分 Hamilton 系と同様，命題より，このバランスの特異点は，少なくとも周期的に分布し，更にもしΔtが２つ存在すれば，複素平面上で２重周期を持って格子状に分布する. しかし Hamilton 系とは異なり，解析接続された局所解は，異なる特異点の近傍においてもc_3が不変なせいで，同一性を保っている. この不変性は，第一積分が３個存在すること（通常の可積分 Hamilton 系では２個）の効果であり，系の挙動として周期運動しか許されないことを意味する. このことから逆に，通常の可積分 Hamilton 系では，解析接続された局所解が，異なる特異点におけるc_3の差に応じて変化することによって，準周期運動が可能になっていることがわかる. つまり，系の挙動を決定するのは，特異点分布のみではなく，特異点ごとの局所解の変化との総合なのである. もっとも，特異点が解に有限値から無限大までの大きな変化を与える以上，特異点分布が挙動の骨格を規定することは間違いない.

厳密な証明は与えないが，以上の議論より，定理は，系の挙動が周期運動に近い運動であることを含意していると考えてよい. ただし，この運動が準周期運動であることまでを含意している訳ではない. なお，もし系が，複素平面における特異点配列と平行な直線の上の（つまりΔt方向の）時間発展*について，準周期運動を行うとすれば，定理の局所解(2.3)は，独立変数c_3について周期性を持っていることがわかる.

---

* 実軸上の通常の時間発展になるとは限らないことに注意.

4．定理の証明

この節では，§2 の定理を証明する．また，証明の過程を利用して，可積分性が与える対称性と系のトポロジーとの関係を明らかにする．

証明： 以下は，局所一般解の軌道全体から成る集合上で考える．(2.3)より，点 p,q は，任意パラメータと t で表すことができる．逆に，任意パラメータの組は，時間発展に対し不変な p,q の関数の組であってその偏微分が非退化なものとしてよい．任意パラメータと t による(2.3)の偏微分は非退化なので，陰関数定理が成り立つからである．H,Φ は，この条件を満たすので，$c_1=H$，

$c_2=\Phi$ とおく．

系は Hamilton 系なので，時間発展の生成子は，

$$\mathbf{w}=\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$$

であるところ，

$$\mathbf{v}=\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}.$$

は $\mathbf{w}$ と可換になり，従って $\mathbf{v}$ は系の対称性の生成子となる．補題より，(2.3)に $\exp(\alpha\mathbf{v})$ を作用すると，任意パラメータは c_1', c_2', c_3' に写るが，

$$\mathbf{v}H=0,\ \mathbf{v}\Phi=0$$

が成り立つので c_1, c_2 は不変である．従って，

$$\begin{pmatrix}\xi(t;c_1,c_2,c_3'(\alpha))\\ \zeta(t;c_1,c_2,c_3'(\alpha))\end{pmatrix}=\exp(\alpha\mathbf{v})\begin{pmatrix}\xi(t;c_1,c_2,0)\\ \zeta(t;c_1,c_2,0)\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

となる．ところで，(4.1)の α による偏微分は，

$$\left.\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial \Phi}{\partial q}\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\end{pmatrix}\right|_{\substack{p=\xi(t;c_1,c_2,c_3'(\alpha))\\ q=\zeta(t;c_1,c_2,c_3'(\alpha))}}$$

であり，H,Φ の非退化性より，

$$\left.\left\langle \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \Phi}{\partial q} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial p} \end{pmatrix} \right\rangle_{Span} \right|_{\substack{p=\xi(t;c_1,c_2,c_3'(\alpha)) \\ q=\zeta(t;c_1,c_2,c_3'(\alpha))}}$$

の複素次元は 3 なので，c_1, c_2, α, t による(4.1)の偏微分は非退化であり，よってαをc_3の代わりの任意パラメータにとれる．以下，改めて$c_3 = \alpha$とする．

局所一般解を乗せた等レベル集合は，実空間のほとんど至るところでコンパクトな 2 次元集合であり，$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ は H, Φ の非退化性により等レベル集合上で非退化であるから，局所解$\xi(t;c_1,c_2,0)$, $\zeta(t;c_1,c_2,0)$ を延長した等レベル集合上の実 1 次元の解軌道 $p(t), q(t)$ に $\exp(\alpha\mathbf{v})$ を作用すると，一般に，この解軌道は自分自身と交わる．微分方程式の解の一意性より，交点で横断的交叉は発生し得えないので，交叉の存在は解軌道が自分自身に一致することを意味する．この交叉を生じるパラメータ α の最小のものを$\Delta\tau$とおく．交叉によって解は自分自身と一致するから，$t=0$の近傍の $p(t), q(t)$ を $\exp(\Delta\tau\,\mathbf{v})$ で写したものは，適当なΔtをとれば，$t=\Delta t$ 近傍の $p(t), q(t)$ と一致する．すなわち，$t=0$の近傍で次が成り立つ，

(4.2) $$\begin{pmatrix} p(t+\Delta t) \\ q(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \exp(\Delta\tau\mathbf{v}) \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \left(\exp(\Delta\tau\mathbf{v}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right)_{\substack{p=p(t) \\ q=q(t)}}.$$

以上より，

$$p(t+\Delta t) = \xi(t; c_1, c_2, \Delta\tau),$$
$$q(t+\Delta t) = \zeta(t; c_1, c_2, \Delta\tau),$$

を得，$t+\Delta t$ を改めてtとおけば，$t=\Delta t$ の近傍における$k=1$の場合の(2.4)を得る．

いま，

$$\exp(\beta\mathbf{v}) \circ \exp(\alpha\mathbf{v}) = \exp((\beta+\alpha)\mathbf{v})$$

が成り立つので，$k=1$の場合の(2.4)へ$\exp(\Delta\tau\mathbf{v})$を作用し，以上と同様の考察を行えば，$t=2\Delta t$の近傍における$k=2$の場合の(2.4)が得られる．以下同様な操作を帰納的に繰り返せば，kが正の場合の(2.4)が示される．また，(4.2)において$t+\Delta t$ を改めてtとおけば，

$$\exp(-\Delta\tau\mathbf{v}) \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t-\Delta t) \\ q(t-\Delta t) \end{pmatrix}$$

と書き直せるから，$\Delta\tau$ の代わりに$-\Delta\tau$を用いて同様の操作を行い，kが負の場合の(2.4)を示すことができる．■

証明では，等レベル集合がコンパクトであるとき，対称性のフローが解軌道を自分自身に重ね合わせることを本質的に用いている．コンパクト性の条件は，この重ね合わせを保証するやや強い条件であって必須ではない．例えば，等レベル集合が$T^1\times\mathbb{R}$であり，これに解軌道がコイル状に巻きついている状況であっても定理の結果が得られる．このことは，上記の証明をわずかに修正すれば示せる．

いずれにせよ，解軌道が，それに対し非退化な対称性のフローによって，等レベル集合上で自分自身に重なり合うというトポロジカルな状況が，特異点分布と局所解の解析接続の構造とを決定しているのである．逆に，等レベル集合と解軌道の形状がこのような重なり合いを許さなければ*，同じバランスの局所解が対称性の与える任意パラメータを変化させながら周期的に分布することはおそらくない．以上の意味において，特異点分布や解析接続の構造は系のトポロジカルな情報をもたらすのである．なお，実数値の$\Delta\tau$が存在すれば，このような重なり合いが実空間で生じていることがわかる．

次に，証明に用いた補題を述べ，これを示す．

補題： ξ,ζを$t=0$における局所一般解とし，$\mathbf{v}$を系の対称性の生成子としたとき，$\mathbf{v}$の作用のパラメータαに対し，適当なc_1',c_2',c_3'がとれて次が成り立つ．

$$\begin{pmatrix}\xi(t;c_1',c_2',c_3')\\ \zeta(t;c_1',c_2',c_3')\end{pmatrix}=\exp(\alpha\mathbf{v})\begin{pmatrix}\xi(t;c_1,c_2,c_3)\\ \zeta(t;c_1,c_2,c_3)\end{pmatrix}=\left(\exp(\alpha\mathbf{v})\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\right)_{\substack{p=\xi(t;c_1,c_2,c_3)\\ q=\zeta(t;c_1,c_2,c_3)}}.$$

証明： 右の等号は Lie 群論の一般論に従う**．左の等号は，[8]の Theorem2.1 から直ぐ得られる．ここでは，[8]の用語法や記号法を用いる．Theorem2.1 より$\nu_e(\mathbf{v})$は Kovalevskaja Exponets（以下，"KE" と表記する）の１つに現れる．有理型の局所一般解が存在するので，KE は，$\partial/\partial t$に対応する-1を除き全て非負整数であり，従って$\nu_e(\mathbf{v})$は非負整数である．このことは，KE の定義より，$\exp(\alpha\mathbf{v})$の作用が局所一般解のバランスを壊さないことを保証する．ところで，同じバランスを持つ局所一般解の展開は，任意パラメータの値を除いて一意的だったから，$\exp(\alpha\mathbf{v})$の作用は，任意パラメータの変化によって表わせなければならない．つまり補題が成り立つ．■

5．まとめ

特異点解析の観点から，可積分な２自由度 Hamilton 系を研究し，次の結果を得た．従来は，具体的に第一積分を構成することによって示されていた特異点分布の規則性を，特異点近傍の解

---

* 例えば等レベル集合が$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$であれば，どのような解軌道であったとしても，時間発展のフローと対称性のフローの非退化性が強い制約になって，このような重なり合いは不可能である．

** 例えば[7]を参照せよ．

軌道上での第一積分の存在とその非退化性を仮定したのみで一般的に示し，またこの仮定の下で有理型局所解の解析接続を具体的に表示した．すなわち，定理として，この仮定の下で等レベル集合がコンパクトであり有理型の局所一般解が存在するとき，この局所一般解は周期的に解析接続され，従ってその極は周期的に分布し，その或る任意パラメータが特異点ごとに一定値ずつ変化することを証明した．更に，この任意パラメータの変化が準周期運動を可能とする条件であることを明らかにした．また特異点分布や解析接続の構造が系のトポロジカルな情報をもたらすことをみた．この研究では，以上の結果を得るために，可積分性が与える対称性と系のトポロジーとの関係を本質的に用いた．

なお，この研究では未達成となったが，定理における第一積分の非退化性の仮定を弱められれば，その結果を非可積分性の厳密な判定に応用できる．また，定理の逆を，すなわち特異点配置の規則性とこの局所一般解の解析接続の構造から第一積分が存在することを示せるなら，カオスの発生機構を，積分の消失による特異点分布の規則性の消失として説明できる．いずれも今後の課題である．

参照文献

[1] Y. F. Chang, M. Tabor and J. Weiss, "Analytic Structure of the Henon-Heiles Hamiltonian in Integrable and Nonintegrable Regimes", J. Math. Phys. 23(4), (1982), pp531-pp538.

[2] Y. F. Chang, J. M. Greene, M. Tabor and J. Weiss, "The Analytic Structure of Dynamical Systems and Self-Similar Natural Boundaries", Physica 8D, (1983), pp183-pp207.

[3] Haruo Yoshida, "Self-Similar Natural Boundaries of Non-Integrable Dynamical Systems in the Complex t Plane", Chaos and Statistical Methods, Springer-Verlag (1984), pp42-pp45.

[4] T. Bountis, L. Drossos and I. C. Percival, "Non-Integrable systems with algebraic Singularities in Complex Time", J. Phys. A: Math. Gen. 24, (1991), pp3217-3236.

[5] Mark Adler and Pierre van Moerbeke, "The Complex Geometry of the Kowalewski-Painlevé analysys", Invent. Math., (1989), pp3-pp51.

[6] Michele Audin, (高崎金久訳), "コマの幾何学 ―可積分系講義", 共立出版, (2000：原著 1996).

[7] Peter J. Olver, "Application of Lie Groups to Differential Equations", Springer-Verlag, (1986), chap.1.

[8] Masaharu Ishii, "Symmetry and the Singular Point Analysis for Ordinary Differential Equations", Progress of Theoretical Physics, 87(5), (1992). pp1075-pp1086.