数理解析研究所講究録
第 1553 巻 2007 年 80-96

時間変更過程の最小固有値とファインマン-カッツ汎関数

東北大学・理学研究科 竹田 雅好 (Masayoshi Takeda)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 はじめに

ユークリッド空間内の領域 D と D 上の正のラドン測度 μ に対し, $\lambda(D,\mu)$ を

$$\lambda(\mu;D)=\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u):\ u\in C_0^{\infty}(D),\ \int_D u^2(x)\mu(dx)=1\right\}$$

で定義する. ここで $\mathbf{D}$ はディリクレ積分. ラドン測度 μ にある条件 (グリーン緊密性) を仮定すると, $\lambda(\mu;D)$ は吸収壁ブラウン運動の時間変更過程に関する最小固有値である. もう少し詳しく言うと, D 上の吸収壁ブラウン運動 $(\mathbb{P}_x, B_t^D)$ とし, A_t^{μ} を μ に Revuz 対応する加法的汎関数とする. A_t^{μ} の右連続逆関数 τ_t を $\tau_t=\inf\{s>0:\ A_s^{\mu}>t\}$ で定義し,

$$X_t=B_{\tau_t}^D$$

で時間変更過程を定義する. 測度 μ の細位相による台を F とかくと, X_t は状態空間 F をもつ μ-対称なマルコフ過程となる. そして, 生成作用素は $L^2(F;\mu)$ 上の自己共役作用素となり, その最小固有値が $\lambda(\mu;D)$ である.

ブラウン運動が最初に領域 D を脱出する時刻を τ_D とかき, D 上の関数を

$$g_D^{\mu}(x)=\mathbb{E}_x\left(\exp\left(A_{\tau_D}^{\mu}\right)\right)\quad(\text{ゲージ関数})$$

で定義したとき, Z.-Q. Chen [2], M. Takeda [25] で

$$\sup_{x\in D} g_D^{\mu}(x)<\infty\Longleftrightarrow\lambda(\mu;D)>1$$

が示された. この事実は, $\lambda(\mu;D)$ が対 (D,μ) の大きさ (または $A_{\tau_D}^{\mu}$ の大きさ) を忠実に測っていることを示している. 実際, $\lambda(\mu;D)$ が次の性質:

$$(i)\ \ \mu_1\le\mu_2\Longrightarrow\lambda(\mu_1;D)\ge\lambda(\mu_2;D)$$
$$(ii)\ D_1\subset D_2\Longrightarrow\lambda(\mu;D_1)\ge\lambda(\mu;D_2)$$

を持つことを容易に示せる. 特に D を固定して考えれば, “$\lambda(\mu;D)>1$” なる条件は測度 μ が小さいことを表現している. そこで “$\lambda(\mu;D)>1$” が必要十分条件として与えられるような性質 (分枝ブラウン運動において, 閉集合に到達する分枝数の期待値が有限になるための必要十分条件, 熱核がガウス評価をもつとき, シュレディンガー作用素の熱核もガウス評価をもつためのポテンシャルに対する必要十分条件など) について述べることが本解説文の目的である. そして, 「$\lambda(\mu;D)$ のような L^2-の量で

$\sup_{x\in D} g_D^\mu(x) < \infty$ (gaugeability) のような L^∞ の量が制御できるのは, 対称マルコフ半群を L^p-空間で考えたとき, その growth bound が p に依らないからだ」と考えることが本解説文の視点である. シュレディンガー半群における L^p-独立性に関しては, B. Simon [20], そのリーマン多様体への拡張として K.T. Sturm [21], [22] の結果が知られている. その証明には熱核の評価が用いられており, 吸収壁ブラウン運動の時間変更過程の場合にその方法はに直ちには使えない. 台 F が D と一致しない場合には時間変更過程は F の境界でジャンプも消滅も起こり, その生成作用素すら簡単に表示できないからだ. そこで, ドンスカー-バァラダーン (Donsker-Varadhan [6]) が大偏差原理証明のために用いた方法で示す. 「大偏差原理成立のためにマルコフ過程に課した仮定が L^p-独立性成立のための十分条件になっている」と考えられるからだ. 実際, 対称マルコフ過程の場合, 大偏差原理のレート関数は対応するディリクレ形式で与えられいて, 大偏差原理という確率法則がまさにディリクレ形式という L^2 の量で制御されることを示している. ただし, 時間変更過程の生存時間は一般に有限なので, 有限な生存時間を許す対称マルコフ過程に対してドンスカー-バァラダーン大偏差原理を拡張しておく必要がある. 以上が本解説文のアイデアである.

本解説では, ラプラシアンを主要部とするシュレディンガー作用素とブラウン運動のファインマン-カッツ汎関数を例として解説するが, もう少し広いマルコフ過程の生成作用素を主要部とするシュレディンガー型作用素とファインマン-カッツ汎関数の枠組みに対しても成り立つことを最後に注意しておく ([25], [26], [27]).

2 ディリクレ問題の確率表現

記号の確定のため, ブラウン運動の定義から始める. Ω を 区間 $[0,\infty)$ から d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ への連続な関数の全体とし, $\omega\in\Omega$ に対して $\omega(t)\in\mathbf{R}^d$ を対応させる写像を B_t とかく: $B_t(\omega)=\omega(t)$, $0\le t\le\infty$. Ω 上の確率測度の族 $\{\mathbb{P}_x\}_{x\in\mathbf{R}^d}$ が次の 3 条件を満たすときに, $(\Omega,\mathbb{P}_x,B_t)$ をブラウン運動と言う.

(i) $\mathbb{P}_x(B_0=x)=1$. すなわち, $\mathbb{P}_x$ は x から出発するブラウン運動の法則を表す.

(ii) 任意の $t>s\ge 0$ に対して, B_t-B_s は平均ベクトル 0, 分散行列 $(t-s)I$(I は単位行列) をもつ d-次元正規分布に従う. すなわち,

$$p(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}},\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^d$$

としたとき,

$$\mathbb{P}_x(B_t-B_s\in A)=\int_A p(t-s,x)dx$$

が, 任意のボレル集合 $A\subset\mathbf{R}^d$ に対して成り立つ.

(iii) 任意の $t>s\ge 0$ に対して, B_t-B_s は $\mathcal{F}_s=\sigma(B_t:0\le t\le s)$ に独立. ここで, $\mathcal{F}_s$ は Ω 上の関数族 B_t, $0\le t\le s$ を可測にする最小の完全加法族.

$D \subset \mathbf{R}^d$ を滑らかな境界 ∂D を持つ有界領域として, 次のディリクレ境界値問題を考える.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = f(x) & x \in \partial D. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, 関数 f は境界 ∂D 上で与えられた連続関数. このディリクレ問題の解は, ブラウン運動による期待値として

$$u(x) = \mathbb{E}_x(f(B_{\tau_D(\omega)}(\omega)))$$

と表現できることが, 1944 年角谷静夫によって示された. ここで $\tau_D(\omega)$ は最初に領域 D を脱出する時刻で, $\tau_D(\omega) = \inf\{t > 0 : B_t(\omega) \notin D\}$ で定義される. $B_{\tau_D(\omega)}(\omega) \in \partial D$ はブラウン運動 $B_t(\omega)$ の時刻 t に, 脱出時刻 $\tau_D(\omega)$ を代入したもの. $\mathbb{E}_x$ は確率測度 $\mathbb{P}_x$ による期待値を表す.

次に, 非負のポテンシャル V を加えて方程式 (1) を少し一般化する:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x) + V(x)u(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = f(x) & x \in \partial D \end{cases} \tag{2}$$

ファインマン-カッツ (Feynman-Kac) の公式 (または, 伊藤の公式とマルチンゲールの任意抽出定理) により, (2) の解が

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left(\exp\left(\int_0^{\tau_D} V(B_t(\omega))dt\right) f(B_{\tau_D(\omega)})(\omega)\right) \tag{3}$$

と表現されることが推測できる. すなわち, ウィナー測度 $\mathbb{P}_x$ に重み,

$$\exp\left(\int_0^{\tau_D(\omega)} V(B_t(\omega))dt\right)$$

が付いた測度で $f(B_{\tau_D(\omega)}(\omega))$ を積分した値が (2) の解となる. 重み $\exp(\int_0^s V(B_t(\omega))dt)$ は連続関数 ω の関数, すなわちウィナー汎関数で, ファインマン-カッツ汎関数と呼ばれる. 以後, サンプル ω は省く. また, ファインマン-カッツ汎関数を $e_V(s)$ と書き, $\mathbb{E}_x(e_V(\tau_D))$ を出発点 x の関数とみて $g^V(x)$ と簡単に書く:

$$g^V(x) = \mathbb{E}_x(e_V(\tau_D)).$$

ところで, 本当に (3) の右辺が (2) の解になっているだろうか？Durrett [7] に載っている簡単な例で検討してみよう.

例 2.1 領域 D を 1 次元の区間 $(-1, 1)$ とし, ポテンシャル V を正の定数 c とする. さらに, 境界条件は $u(-1) = u(1) = 1$ とする. そのとき, (2) の解は求まって, $\cos\sqrt{2c}x/\cos\sqrt{2c}$ となる. ただし, $\cos\sqrt{2c} = 0$ のとき解は存在しない. また, $\sqrt{2c} > \pi/2$, すなわち $c > \pi^2/8$ のとき, 関数 $\cos\sqrt{2c}x/\cos\sqrt{2c}$ は正の値も負の値もともに取る. 一方, (3) の右辺は $\mathbb{E}_x(\exp(c\tau_D))$ となり, 決して負の値を取らない. 従って, $c > \pi^2/8$ のとき, $\mathbb{E}_x(\exp(c\tau_D))$ は決して (3) の解とはならない. 実はそのとき, $\mathbb{E}_x(\exp(c\tau_D))$ の値は恒等的に無限大となる. $c < \pi^2/8$ のときにのみ, $\mathbb{E}_x(\exp(c\tau_D))$ は有限の値をもち, $\cos\sqrt{2c}x/\cos\sqrt{2c}$ に等しくなっている.

上の例が示すように, 方程式 (2) の解が確率表現 (3) を持つためには, ファインマン-カッツ汎関数の可積分性, $g^V(x) < \infty$, が必要なことが分かる. ファインマン-カッツ汎関数の可積分性には領域 D とポテンシャル V が関係するが, ポテンシャル V が加藤クラスと呼ばれるクラスに属するとき, $g^V(x)$ は有界であるか恒等的に無限であるかのいずれかであるという "all or nothing" 型の事実 (gauge theorem と呼ばれている) が知られている ([4]). 有界関数になる場合には, $\mathbb{E}_x(e_V(\tau_D)f(B_{\tau_D}))$ が (2) の一意解となる. それではいつ $g^V(x)$ が有界関数になるか調べてみよう.

3 ファインマン-カッツ汎関数の可積分性

関数 $g^V(x)$ が有界になるための十分条件として, ハシミンスキー (Khasminskii) の補題と呼ばれる結果が知られている ([13]). それは

$$\|G^D V\|_\infty = \sup_{x\in D} \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt\right) < 1$$

ならば,

$$\sup_{x\in D} g(x) \leq \frac{1}{1 - \|G^D V\|_\infty}.$$

が成り立つというものである. 汎関数 $\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt$ の可積分性からその指数可積分性がしたうという結果であるり, 強マルコフ性から容易に導ける. しかし十分条件なので, 必要十分条件を見つけたい. そこで前節の例に戻って, 条件 $c < \pi^2/8$ はどのような意味を持つか考えてみよう. 実は, $\pi^2/8$ は区間 $(-1, 1)$ 上のディリクレ-ラプラシアン $(1/2)d^2/dx^2$ の最小固有値であるから, $c < \pi^2/8$ は

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx : u \in C_0^\infty(-1,1),\ c\int_{-1}^{1} u^2 dx = 1\right\} > 1$$

と同値になることがわかる. そこで, 最後の条件を一般化して

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) : u \in C_0^\infty(D),\ \int_D Vu^2 dx = 1\right\} > 1 \tag{4}$$

なる条件を考えると, g^V が有界になるための必要十分条件になることが示せる. ここで, $\mathbf{D}(u, u)$ はディリクレ積分 $\int_D (\nabla u, \nabla u)\, dx$. 以下, (4) が必要十分条件となる理由を説明する.

4 ブラウン運動の時間変更

マルコフ過程のランダムな時間変更については, 変換論の一つとして非常に一般的に研究されてきた. ここでは吸収壁ブラウン運動に対して考えてみる.

D を $\mathbf{R}^d$ 領域とし, 吸収壁ブラウン運動を

$$B_t^D = \begin{cases} B_t & \text{on } t < \tau_D \\ \Delta & \text{on } t \geq \tau_D \end{cases} \qquad (B_\infty^D = \Delta).$$

で定義する．ここで，Δ は死点と呼ばれる仮想点．吸収壁ブラウン運動は，領域 D を脱出するまではブラウン運動のように振る舞い，脱出以後は死点に留まることを上の定義は述べている．また，汎関数 $\int_0^t V(B_t)dt$ の右連続な逆関数を，τ_t と書く：$\tau_t = \inf\{s > 0 : \int_0^s V(B_u^D)du > t\}$．そのとき，吸収壁ブラウン運動の時間変更過程 X_t を，B_t^D の時間変数 t のところにランダムな時間 τ_t を代入して，$X_t = B_{\tau_t}^D$ で定義する．すると X_t は，$F = \{x \in R^d : \mathbb{P}_x(\tau_0^V = 0) = 1\}$ を状態空間に持つ Vdx-対称なマルコフ過程になる ([8])．すなわち，F 上の関数 f に対して半群 p_t を $p_tf(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t))$ で定義すると，$L^2(F; Vdx)$ 上の対称作用素となる．それに伴って，時間変更過程 X_t の生成作用素は $L^2(F; Vdx)$ 上の自己共役作用素となり，(4) の左辺はその最小固有値を与えている．

それではなぜ時間変更過程の最小固有値とファインマン-カッツ汎関数の可積分性が結びつくのだろうか．それは時間変更過程の生存時間がちょうど $\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt$ に等しいことに依っている．

5 生存時間の指数可積分性

状態空間 X 上のある正の測度 m に対称な一般のマルコフ過程 $(\mathbb{P}_x, X_t)$ を考えよう．そのときマルコフ過程の作る半群 $p_tf(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t))$ は，対称性より $L^p(X; m)$-空間の縮小半群 T_t に拡張できるので，そのスペクトル半径 λ_p を

$$\lambda_p = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T_t\|_{p,p} \quad (1 \le p \le \infty) \tag{5}$$

で定義する．ここで $\|T_t\|_{p,p}$ は，$L^p(X; m)$ から $L^p(X; m)$ への作用素ノルムとする．マルコフ過程がその状態空間から消滅する最初の時刻，$\zeta = \inf\{t \ge 0; X_t \notin X\}$，を生存時間と言う．吸収壁ブラウン運動の場合だと，領域からの脱出時刻 τ_D が生存時間になる．生存時間 ζ を用いると，$\|T_t\|_\infty = \sup_{x\in X} \mathbb{P}_x(\zeta > t)$ と表わせるので，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in X} \mathbb{P}_x(\zeta > t) = -\lambda_\infty \tag{6}$$

となる．生存時間の指数可積分性については，

$$\sup_{x\in X} \mathbb{E}_x\left(\exp(\zeta)\right) < \infty \Longleftrightarrow \lambda_\infty > 1 \tag{7}$$

が知られていている ([18])．

時間変更過程 X_t の生存時間は $\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt$ に等しくなることから，$g^V(x)$ が有界であることと時間変更過程 X_t のスペクトル半径 λ_∞ が 1 以上であることの同値性は，式 (7) から従う．一方，式 (4) の左辺は λ_2 に等しいことがスペクトル分解より示せるので，時間変更過程 X_t に対して $\lambda_\infty = \lambda_2$ が成立することを示せれば，(4) は g^V が有界であるための必要十分条件であることがわかる．$\sup_{x\in D} g(x)$ のような言わば L^∞ の量が，(4) の左辺のような L^2 の量で制御できるためには，$\lambda_\infty = \lambda_2$，すなわちスペクトル半径の L^p-独立性が成り立っているわけである．

6 スペクトル半径の L^p 独立性

対称なマルコフ過程に対して (5) で定義される λ_p が p に依らないための条件を見つけるのがこの節の目的である．この種の定理は，シュレディガー半群に対して B. Simon [20] によって示された．その証明は基本解の評価を用いており，吸収壁ブラウン運動の時間変更過程に直ちに応用できるというものではない．しかし，ドンスカー-バァラダーン (Donsker-Varadhan [6]) が大偏差原理証明のために用いたアイデアを使うと，対称マルコフ半群については，定性的な性質，(i) 強 Feller 性，(ii) 既約性，と次の性質:

(iii) 任意の ϵ に対して，あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して，

$$\sup_{x\in X}\int_0^\infty e^{-t}p_tI_{K^c}(x)dt < \epsilon$$

(I_{K^c} は，K の補集合 K^c の定義関数) を仮定すると，λ_p が p に依らないことが示せる ([23])．(i)〜(iii) の条件の下で，式 (7) における λ_∞ は λ_2 に換えることができる．

加藤クラスのポテンシャル V による時間変更過程 X_t は仮定 (iii) を満たすことが確かめられ，(4) が $g^V(x)$ 有界性の必要十分条件となる．加藤クラスのポテンシャルは，Feller 性を保つなど時間変更を定義するクラスとしても取り扱い易い重要であることが分かる．もし，領域が有界でない場合は，ポテンシャル V に対してさらなる仮定，グリーン緊密性なる条件が必要になる．

7 スペクトル半径の L^p 独立性の証明について

スペクトル半径の L^p-独立性がポイントなので，少し詳しく証明のアイデアを述べてみる．Donsker-Varadhan 型の大偏差原理は，エルゴディックなマルコフ過程において，滞在分布と不変測度の大偏差に関する理論である．Donsker-Varadhan 型の大偏差原理を，有限な生存時間を持つ対称ハント過程に拡張することにより，対称マルコフ過程のスペクトル半径の L^p-独立性を証明する．m-対称なハント過程 $\mathbf{M}$ と生成する半群 p_t に関し，次の仮定をおく．

I. (既約性) $A \subset X$ を p_t-不変なボレル集合，すなわち，全ての $L^2(X;m)$ に属するボレル関数 f に対して，

$$p_t(I_Af)(x) = I_Ap_tf(x) \quad m\text{-a.e. } x$$

となるとき，A は $m(A)=0$ または $m(X\setminus A)=0$ を満たす．

II. (強フェラー性) $p_t(\mathcal{B}_b(X)) \subset C_b(X)$.

III. 任意の ϵ に対して，あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して，

$$\sup_{x\in X}\int_0^\infty e^{-t}p_tI_{K^c}(x)dt < \epsilon.$$

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $\mathbf{M}$ の生成する $L^2(X;m)$ 上のディリクレ形式とし，$\mathcal{P}$ で X 上の確率測度の全体を表わす．$\mathcal{P}$ には弱位相を入れ，$\mathcal{P}$ 上の関数 $I_\mathcal{E}$ を

$$I_\mathcal{E}(\mu) = \begin{cases} \mathcal{E}(\sqrt{f},\sqrt{f}) & \text{if } \mu = f\cdot m,\ \sqrt{f}\in\mathcal{D}(\mathcal{E}) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する. また, $0 < t < \zeta(\omega)$ なる $\omega \in \Omega$ に対し, $L_t(\omega) \in \mathcal{P}$ を

$$L_t(\omega)(A) = \frac{1}{t}\int_0^t I_A(X_s(\omega))ds, \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

で定義したとき, 次の定理を得る.

定理 7.1 ([24]) 仮定 I, II, III の下,

(i) G を $\mathcal{P}$ の開集合としたとき,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x(L_t \in G, t < \zeta) \geq -\inf_{\mu\in G} I_{\mathcal{E}}(\mu) \quad \textit{for all } x \in X.$$

(ii) K を $\mathcal{P}$ の閉集合としたとき,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{P}_x(L_t \in K, t < \zeta) \leq -\inf_{\mu\in K} I_{\mathcal{E}}(\mu) \quad \textit{for all } x \in X.$$

仮定 III は $m(X) < \infty$ かつ $\|p_t\|_{1,\infty} < \infty$ の場合, すなわち, 考えているマルコフ過程がエルゴデックな場合に成り立つ. しかし, 仮定 III は仮定 "任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{x\to\Delta}\mathbb{P}_x(\zeta > \epsilon) = 0$" から導け, 無限遠点の近傍で早く爆発する場合にも満たす. 一次元拡散過程の場合, 境界がともに Feller による分類の意味で, 正則境界または流出境界であれば, 仮定 III は満たされる. よって, Khashiminsky テストにより爆発が確かめられる多次元拡散過程の場合には, この仮定が満たされることが期待できる.

仮定 I~III を満たす対称マルコフ過程に対して, 上の定理において $G = K = \mathcal{P}$ を代入すると, その生存時間について

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x(\zeta > t) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sup_{x\in X}\log\mathbb{P}_x(\zeta > t)\\ &= -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u); u \in \mathcal{E}^{(\alpha)}, \int_{R^d} u^2dx = 1\right\}, \quad x \in R^d \qquad (8)\end{aligned}$$

が分かる. いま, $\sup_{x\in X}\mathbb{P}_x(\zeta > t) = \sup_{x\in X} p_t1(x) = \|T_t\|_{\infty,\infty}$ であり, (8) の右辺が $-\lambda_2$ に等しいことに注意すると, (8) 式は

$$\lambda_\infty = \lambda_2 \qquad (9)$$

を意味する. $\|T_t\|_{2,2} \leq \|T_t\|_{p,p} \leq \|T_t\|_{\infty,\infty}$, $1 \leq p \leq \infty$ が, p_t の対称性, 正値性と補間定理から導けるので, 結局 λ_p は p に依らないことが分かる. 仮定 III は生成作用素が滑らかな係数を持つ楕円型作用素である場合, 半群 p_t が $L^\infty(X;m)$ 上の作用素とみてコンパクトであることと関係がある.

最近, 上の I ~ III の仮定の他に

IV. ($C_\infty(X)$ の保存性) $p_t(C_\infty(X)) \subset C_\infty(X)$. ここで $C_\infty(X)$ は無限遠点でゼロとなる連続関数の全体.

を仮定すると, 対称マルコフ半群 p_t とグリーン緊密性をもつポテンシャルから定義されるシュレディンガー半群は L^p-独立性を満たすことを, Donsker-Varadhan 型大偏差原理をアイデアを用いて示すことができた ([29]). B. Simon の方法と違って熱核の評価を用いないので, ポテンシャルに制限を受けるもののより広い対称マルコフ作用素を主要部にもつシュレディンガー作用素に適用可能である.

8 全滞在時間に関するカッツの定理

必ずしも有界でない領域 D に対してもポテンシャル V のクラスを制限することにより, (4) が必要十分条件であることが示せる. 例えば, 全空間 $\mathbf{R}^d$ の部分集合 K が"無限遠点の近傍で十分小さい"という条件の下で,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} \mathbb{E}_x\left(\exp\left(\int_0^\infty I_K(B_t)dt\right)\right) < \infty$$

となるための必要十分条件は, $\inf\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u):\ \int_K u^2dx = 1\} > 1$ で与えられることになる. また関係式 (6) を用いると

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\int_0^\infty I_K(B_s)ds > t\right) = -\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u):\ \int_K u^2dx = 1\right\} \qquad (10)$$

も示せる. 特に K がコンパクト集合のときには, エルデシュ (P. Erdös) によって $\mathbb{P}_x(\int_0^\infty I_K(B_s)ds > t)$ が指数的に減衰することを予想され, カッツにより固有関数展開を用いて証明された.

もう一つ例を挙げる. 次元を $d=3$ とし, K として単位球 $B=\{|x|\le 1\}$ を考える. そのとき,

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u);\ \int_{\{|x|\le 1\}} u^2dx = 1\right\}$$

は, 単位球面上で外向き法線微分 $\frac{\partial u}{\partial n}$ と u が等しいという境界条件を付けたラプラシアンの最小固有値 $\frac{\pi^2}{8}$ に等しくなる. 一方, $\frac{\pi^2}{8}$ は区間 $(-1,1)$ におけるディリクレ-ラプラシアンの最小固有値. したがって,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\int_0^\infty I_B(B_t)dt > t\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_y(t < \tau_{(-1,1)})$$

となる. ここで, 右辺の $\mathbb{P}_y$ は一次元ブラウン運動です. 3次元ブラウン運動が単位球に滞在する時間 $\int_0^\infty I_B(B_t)dt$ と1次元ブラウン運動が単位区間から脱出する時間 $\tau_{(-1,1)}$ の間に原点から出発する3次元, 1次元のウィナー測度に関して等しい分布を持つことが知られている (Ciesielski-Taylor の定理).

9 ポテンシャルを関数から測度へ

いままで, ポテンシャルとして関数 V を考えていきたが, 測度に拡張することもできる. 関数 $V(x)$ に対してウィナー汎関数 $\int_0^t V(B_s)ds$ が対応したように, 測度 μ に対してもウィナー汎関数を対応させてやることができる (Revuz 対応). 関数から測度へと拡張することは単なる一般化ではない. 確率論にとって興味深い具体的例を含めようとすると測度に拡張が必要になる. 例えば, 半径 r の球面の表面測度 σ_r に対しては, 球面上にブラウン運動が到達したときにのみ増大する局所時間と呼ばれるウィナー汎関数 ℓ_r を対応させてやることがでる. 判定条件 (4) を使うと, $\exp(\ell_r(\infty))$ が可積分であるための必要十分条件は, 半径 r が $\frac{d-2}{2}$ 以下であることが分かる. 一方, r が $\frac{d-2}{2}$ 以下という条件は, $\sup_{x\in\mathbf{R}^d}\mathbb{E}_x(\ell_r(\infty)) < 1$ であるための必要十分条件にも

なっていて, この例では ハシミンスキーの補題における条件が必要条件にもなっていることが分かる.

まず取り扱う測度のクラスを定義しておく.

定義 9.1 領域 D 上のラドン測度 μ がクラス $\mathcal{S}_{\infty}^{D}$ に属するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, コンパクト集合 $K \subset D$ と $\delta > 0$ が存在して,

$$\sup_{(x,z)\in D\times D\setminus\triangle}\int_{K^c}\frac{G_D(x,y)G_D(y,z)}{G_D(x,z)}\mu(dy) \le \epsilon$$

と, すべてのボレル集合 $B \subset K$ で $\mu(B) < \delta$ を満たすものに対し,

$$\sup_{(x,z)\in D\times D\setminus\triangle}\int_{B}\frac{G_D(x,y)G_D(y,z)}{G_D(x,z)}\mu(dy) \le \epsilon$$

が成立する.

このクラス $\mathcal{S}_{\infty}^{D}$ は, 村田 [14], P. Pinchover [16], Z.-Q. Chen [2] らによって導入された. 特に, D にコンパクトな台を持つ加藤クラスの測度は $\mathcal{S}_{\infty}^{D}$ に属することが分かる.

定理 9.1 (Revuz 対応)

$$\mu \in \mathcal{S}_{\infty}^{D} \Longleftrightarrow \text{PCAF } \mathrm{A}_t^{\mu}$$

i.e. 任意の超過関数 g に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_D \mathbb{E}_x\left(A_t^{\mu}\right)g(x)dx = \int_D g(x)d\mu(x).$$

$\mathcal{S}_{\infty}^{D}$ に属する測度 μ に対し,

$$\lambda(\mu; D) = \inf\left\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) :\ u \in C_0^{\infty}(D),\ \int_D u^2(x)\mu(dx) = 1\right\}$$

とおく. ディリクレ原理から $\lambda(\mu; D)$ は A_t^{μ} による時間変更過程の第一固有値であることが示せる.

$p_t^{\mu,D}(x,y)$ を ファインマン-カッツ半群の積分核, すなわち

$$p_t^{\mu}f(x) := \mathbb{E}_x\left(\exp(A_t^{\mu})f(X_t); t < \tau_D\right) = \int_D p_t^{\mu,D}(x,y)f(y)dy$$

とし. $G^{\mu,D}(x,y)$ を $G^{\mu,D}(x,y) = \int_0^{\infty} p_t^{\mu,D}(x,y)dt$ で定義する. そのとき, 次の定理が成立する.

定理 9.2 $\mu \in \mathcal{S}_{\infty}^{D}$ のとき, 次は互いに同値:

(i) **(gaugeability)** $\sup_{x\in D}\mathbb{E}_x\left(e^{A_{\tau_D}^{\mu}}\right) < \infty$
$\left(\Longleftrightarrow \exists x_0 \text{ s.t. } \mathbb{E}_{x_0}\left(e^{A_{\tau_D}^{\mu}}\right) < \infty\right)$;

(ii) **(劣臨界性 (subcriticality))** $G^{\mu,D}(x,y) < \infty$ *for* $x, y \in D$, $x \ne y$;

(iii) $\lambda(\mu; D) > 1$.

10 応用

(a) 最初の応用は, ファインマン-カッツ半群 p_t^μ の 超縮小性 に関連する. $\|p_t^\mu\|_{1,\infty}$ を p_t^μ の $L^1(\mathbb{R}^d)$ から $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ への作用素ノルムとする. そのとき,

定理 10.1 $\mu \in \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{R}^d}$ に対し,

$$\lambda(\mu;\mathbb{R}^d) > 1 \Longleftrightarrow \|p_t^\mu\|_{1,\infty} \le \frac{c}{t^{d/2}}, \quad t > 0.$$

B. Simon[19] では, もし 2μ が gaugeable ならば, 右辺が成立することが示されている.

(b) 第二の応用では, 分枝ブラウン運動を考える. 上で述べたハシミンスキーの補題の示されている論文 [13] の中で, この応用について言及している.

$\bar{\mathbb{B}} = (\bar{B}_t, \bar{\mathbb{P}}_x)$ を分枝ブラウン運動で, 分枝率 k,

$$\bar{\mathbb{P}}_x\left(T > t | \sigma(X)\right) = \exp(-A_t^k).$$

ここで, T は 分裂時刻 とする. また, $\{p_n(x)\}_{n\ge 2}$ を 分枝構造, $\sum_{n=2}^\infty p_n(x) = 1$ とする. $Q(x) = \sum_{n\ge 2} np_n(x)$, $\mu(dx) = (Q(x)-1)k(dx)$ とおいたとき,

定理 10.2 $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} Q(x) < \infty$ を仮定する. そのとき, $\mathrm{Cap}(K) > 0$ なる閉集合 K と $\mu \in \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{R}^d\setminus K}$ に対し,

$$\lambda(\mu;\mathbb{R}^d\setminus K) > 1 \Longleftrightarrow \bar{\mathbb{E}}_x\left(N_K\right) < \infty.$$

ここで, N_K は K に到達する分枝の数とする.

この証明のために,

定理 10.3 $\mu \in \mathcal{S}_\infty^D$ に対し,

$$\begin{aligned}\lambda(\mu;D) > 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{x\in D} \mathbb{E}_x\left(\exp(A_{\tau_D}^\mu)\right) < \infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \sup_{x\in D} \mathbb{E}_x\left(\exp(A_{\tau_D}^\mu); \tau_D < \infty\right) < \infty.\end{aligned}$$

を示す. K.L. Chung と Z. Zhao の本 [4] では, 事象 $\{\tau_D < \infty\}$ の上でファインマンカッツ汎関数を積分した $\mathbb{E}_x\left(\exp(A_{\tau_D}^\mu); \tau_D < \infty\right)$ でゲージ関数の定義が与えられている. クラス $\mathcal{S}_\infty^D$ に属する測度に対してはどちらのゲージ関数を用いて gaugeability 定義してもそれらは同値であることを上の定理は主張している. 直感的には, $\mu \in \mathcal{S}_\infty^D$ は D の無限遠点近傍で小さい測度であるから, $\{\tau_D = \infty\}$ なる事象の上では, $\exp(A_\infty^\mu)$ は常に可積分であることを意味している.

等式

$$\bar{\mathbb{E}}_x\left(N_K\right) = \mathbb{E}_x\left(\exp(A_{\tau_D}^\mu); \tau_D < \infty\right),$$

に注意すると, 定理 10.3 から定理 10.2 が従う. $\bar{\mathbb{E}}_x\left(N_K\right)$ なる量は, 閉集合 K に関して単調とは限らない. 実際, K が大きくなると分枝の到達する可能性は拡大するが, 分

裂する機会は減るからである．しかし，$\lambda(D,\mu)$ は D に関して，したがって K 関して単調である．単調ではない量 $\sup_{x\in D}\mathbb{E}_x(\exp(A^{\mu}_{\tau_D}))$ の有限性が単調である量 $\lambda(D,\mu)$ で特徴付けられていることになる．ここにも測度 $\mathcal{S}^D_\infty$ の扱い易さが現れている．

(c) 第三の応用では熱核のガウス型評価に関する安定性について考える．加藤測度 μ に対して，シュレディンガー作用素 $\frac{1}{2}\Delta+\mu$ の熱核を $p^{\mu}(t,x,y)$ とかく：

$$\mathbb{E}_x(\exp(A^{\mu}_t)f(B_t))=\int_{\mathbb{R}^d}p^{\mu}(t,x,y)f(y)dy.$$

定理 10.4 ([26]) $\mu\in\mathcal{S}_\infty$．そのとき $p^{\mu}(t,x,y)$ が任意の $x,y\in\mathbb{R}^d$ と $t>0$ に対して，

$$\frac{C_1}{t^{d/2}}\exp\left(-c_1\frac{|x-y|^2}{t}\right)\le p^{\mu}(t,x,y)\le\frac{C_2}{t^{d/2}}\exp\left(-c_2\frac{|x-y|^2}{t}\right)$$

$(C_1,c_1,C_2,c_2$ 正定数$)$ を満たすための必要十分条件は $\lambda(\mu)>1$ である．

十分性を示すためには次のような議論を使う．$\lambda(\mu)>1$ を仮定する．

$$h(x)=\mathbb{E}_x(\exp(A^{\mu}_\infty)).$$

とおくと，h は $\mathcal{H}^{\mu}$-調和であり，定理 9.2 より

$$1\le h(x)\le C<\infty$$

である．

$$L^h_t=\frac{h(B_t)}{h(B_0)}\exp(A^{\mu}_t),$$

とおき，L^h_t によるブラウン運動の変換を考える：

$$\mathbb{P}^h_x(d\omega)=L^h_t(\omega)\mathbb{P}_x(d\omega).$$

そのとき $\mathbb{P}^h_x$ は h^2dx-対称拡散過程となる，$(p^h_tf,g)_{h^2dx}=(f,p^h_tg)_{h^2dx}$．その推移確率密度関数を $p^h(t,x,y)$ とすると

$$p^{\mu}(t,x,y)=h(x)p^h(t,x,y)h(y).$$

を満たす．実際，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}p^{\mu}(t,x,y)f(y)dy&=\mathbb{E}_x(\exp(A^{\mu}_t)f(B_t))=h(x)\mathbb{E}_x(L^h_t\frac{f}{h}(B_t))\\&=\int_{\mathbb{R}^d}h(x)p^h(t,x,y)\frac{f}{h}(y)h(y)^2dy=\int_{\mathbb{R}^d}h(x)p^h(t,x,y)h(y)dy.\end{aligned}$$

したがって，$p^{\mu}(t,x,y)$ と $p^h(t,x,y)$ のガウス型評価は同値である．そこで $\mathbb{P}^h_x$ の生成するディリクレ形式を同定すると，

定理 10.5 ([3]) $(\mathcal{E}^h,\mathcal{D}(\mathcal{E}^h))$ を $L^2(\mathbb{R}^d,h^2dx)$ 上の $\mathbb{P}^h_x$ が生成するディリクレ形式とする．そのとき，$\mathcal{D}(\mathcal{E}^h)=\mathcal{D}(\mathcal{E})$，で

$$\mathcal{E}^h(u,u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u\cdot\nabla v\ h^2dx$$

ポテンシャル μ の特異性から上の同定は明らかではないことを注意しておく. 定理 10.5 から $(\mathcal{E}^h, \mathcal{D}(\mathcal{E}^h))$ と古典的なディリクレ積分の同値性から定理が従う. リーマン多様体上のシュレディンガー作用素に対して同様の問題を考えることができるが,

Li-Yau 評価 $\Longleftrightarrow$ 体積二倍条件 + ポアンカレの不等式

(A. Grigor'yan [9] L. Saloff-Coste [17])

を用いることで拡張できる.

例 10.1 $(d \geq 3)$ とし $\mu = \sigma_r$ を $\{|x| = r\}$ の表面測度とする. そのとき

$$\lambda(\sigma_r; \mathbb{R}^d) = \frac{d-2}{2r}.$$

よって, $r < \dfrac{d-2}{2}$ のときにのみ, $p^{\sigma_r}(t,x,y)$ はガウス評価をもつ.

$d = 3$ で $\lambda(\mu; \mathbb{R}^3) = 1$, 例えば, $\mu = \sigma_{1/2}$ とする. そのとき,

$$p^{\mu}(t,x,y) \simeq \frac{C}{t^{3/2}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\langle x \rangle}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\langle y \rangle}\right) \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right)$$

$(\langle x \rangle := 1 + |x|)$. よって, $t \geq \langle x \rangle + \langle y \rangle$ に対して,

$$p^{\mu}(t,x,y) \geq \frac{C}{\sqrt{t}\langle x \rangle \langle y \rangle}$$

([10]).

定理 10.4 は符号付測度に拡張できる. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ とし,$\mu^+ \in \mathcal{S}_\infty$ かつ μ^- はグリーン有界

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,y) d\mu^-(y) < \infty.$$

とするとき, $p^{\mu}(t,x,y)$ のガウス評価は

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) + \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu^- : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu^+ = 1\right\} > 1$$

と同値である.

(d) 最後の応用は, スペクトル関数の微分可能性に関してある.

定理 10.6

$$C(\theta) = \inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) - \theta \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1\right\}$$

おくと, $d \leq 4$ のときに限り $C(\theta)$ は微分可能.

(Point) $\mathcal{H}^{\mu} := -1/2\Delta - \mu$, $\theta^+ = \sup\{\theta : C(\theta) = 0\}$ とすると. $\lambda(\theta^+\mu) = 1$ で, $\mathcal{H}^{\theta^+\mu}$ は **臨界的 (critical)**. さらに, h を **ground state** とすると,

$$\mathcal{H}^{\theta^+\mu} \text{ は } \begin{cases} h \notin L^2(\mathbb{R}^d) \ (\text{零臨界的}) & d \leq 4 \\ h \in L^2(\mathbb{R}^d) \ (\text{正臨界的}) & d > 4. \end{cases}$$

11 非局所作用素の場合への拡張

非局所作用素の典型例として, $\mathbf{R}^d$ 上の対称 α-安定過程 $\mathbb{M}^\alpha = (X_t, \mathbb{P}_x)(0 < \alpha < 2)$, すなわち, $(1/2)(-\Delta)^{\alpha/2}$ を生成作用素にもつジャンプ過程とする. また $\alpha < d$ を, すなわち, $\mathbb{M}^\alpha$ が過渡的 (transient) あることを仮定する. $G(x,y)$ を $\mathbb{M}^\alpha$ のグリーン関数としたとき, 対応する加藤クラス, グリーン緊密などの概念も同様に定義される. $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ を対応するディリクレ形式とする:

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,v) = K(\alpha,d) \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy,$$
$$\mathcal{F}^{(\alpha)} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy < \infty \right\}.$$

ブラウン運動に対して示されたこれまでの定理は, 対応する概念に置き換えることで対称 α-安定過程に対しても成立する.

R. Bass と D. A. Levin [1] は, 対称ジャンプ過程のレビ測度 $J(dx,dy)$ が

$$\frac{c}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy \le J(dx,dy) \le \frac{C}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy$$

を満たすならば, 対称ジャンプ過程の推移密度関数は対称 α-安定過程の推移密度関数と同値であることを証明した. この事実を Grigor'yan-Saloff-Coste の定理の代わりに用いることで, 定理 10.4 と同様の方法で次の定理をえる:

定理 11.1 $\mu \in \mathcal{S}_\infty$ が

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} \frac{\mu(dx)d\mu(dy)}{|x-y|^{d+\alpha}} < \infty$$

を満たすとする. そのとき $-1/2(-\Delta)^{\alpha/2} + \mu$ の熱核 $p^\mu(t,x,y)$ が

$$C_1 \left(\frac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \frac{t}{|x-y|} \right) \le p^\mu(t,x,y) \le C_2 \left(\frac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \frac{t}{|x-y|} \right), \tag{11}$$

を満たすことと

$$\inf \left\{ \mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) : \ u \in \mathcal{F}^{(\alpha)}, \ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1 \right\} > 1$$

は同値.

また定理 11.2 は次の様に拡張される.

定理 11.2

$$C(\theta) = \inf \left\{ \mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) - \theta \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1 \right\}$$

おくと, $d \le 2\alpha$ のときに限り $C(\theta)$ は微分可能.

ブラウン運動の場合と同様に, $\mathcal{H}^{\theta^+\mu} := 1/2(-\Delta)^{\alpha/2} - \theta^+\mu$ は critical な作用素となるが, 対応する ground state h は

$$\frac{c}{|x|^{d-\alpha}} \le h(x) \le \frac{C}{|x|^{d-\alpha}}, \quad |x| \ge 1$$

なる評価をもつ. したがって $d \le 2\alpha$ が零臨界的, 正臨界的の境になる. 定理の中にある仮定 $d \le 2\alpha$ はここに起因する.

大偏差原理の一つの証明法としてゲルトナー-エリス (Gärtner-Ellis) の定理が知られている ([5]). その定理適用のためには, 対数モーメント母関数の存在とその "滑らかさ"をチェックする必要がある. 加法的汎関数に対する対数モーメント母関数の存在に関しては次の定理をえる.

定理 11.3 任意の $\mu \in \mathcal{S}_\infty - \mathcal{S}_\infty$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left(\exp(\theta A_t^\mu)\right)) = C(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}^1. \tag{12}$$

上の定理はシュレディンガー半群の spectral bound が p-独立性から導くことができる ([29]). その p-独立性の証明においても, ドンスカー-バラダァーン のアイデアが用いられ, 特に I-function の無限遠点近傍での振る舞いを調べることがポイントとなる. 上の定理 11.2, 定理 11.3 から, 対称安定過程の加法的汎関数に関する大偏差原理が導かれる.

定理 11.4 ([28]) $d \le 2\alpha$ とする. そのとき $\mu \in \mathcal{S}_\infty$ に対して, A_t^μ/t は大偏差原理を満たす:

(i) 閉集合 $K \in \mathbb{R}^1$ に対し

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in K\right) \le -\inf_{\lambda \in K} I(\lambda).$$

(ii) 開集合 $G \subset \mathbb{R}^1$ に対し

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in G\right) \ge -\inf_{\lambda \in G} I(\lambda).$$

ここに $I(\lambda) = \sup\{\lambda\theta - C(\theta) : \theta \in \mathbb{R}^d\}$.

12 終わりに

本解説では, $\sup_{x\in D} g_D^\mu(x)$ が有限・無限で測度 μ の大きさを測った. Grygor'yan-Hansen [11] では, $g_D^{-\mu}(x) := \mathbb{E}_x(\exp(-A_{\tau_D}^\mu))$ が恒等的に 0 のとき "big", その他のとき "non-big" として測度の大きさを定義し, non-big な測度の構造を調べている. $\mathcal{S}_\infty^D$ に属する測度は non-big である. 実際, $\mathcal{S}_\infty^D$ に属する測度 μ はポテンシャル有限,

$$\|G^D\mu\|_\infty = \sup_{x\in D} \int_D G^D(x,y)d\mu(y) < \infty$$

であることが知られていて,

$$g_D^{-\mu}(x) \geq \exp(-\|G^D\mu\|_\infty) > 0$$

なる評価が成立するからだ. $\mathcal{S}_\infty^D$ という制限を付けずに $\sup_{x\in D} g_D^\mu(x) < \infty$ を満たす測度の構造を調るうえで, 村田実氏の講演の中で述べられた様々な性質 ([15]) が, 測度の大きさ測る尺度となりうるのではないか. またファインマン-カッツ汎関数を通して, それらの性質の確率論的な解釈が可能なのではないかと思っている. 最後の節では, スペクトル関数の微分可能性とシュレディンガー作用素の臨界性との関連について述べた. この結果を拡張するためには, より広範な非局所作用素に対する臨界性理論を確立することが必要である. 非局所作用素に対して臨界性理論を構築しようとすると, 作用素の定義域, 調和関数の定義など根本から見直す必要があり, マルコフ過程論を用いた確率論的定式化と接近が有効であると思う. 非局所作用素のハルナックの不等式, 調和関数の連続性, 基本解の評価などが, M. Barlow, R. Bass, Z.-Q. Chen, M. Kassmann, T. Kumagai, D.A. Levin, R. Song ら多くの研究者により最近活発に研究されている. 彼らの結果の応用として臨界性理論の確立が期待できる.

参考文献

[1] Bass, R., Levin, D. A..: Transition probabilities for symmetric jump processes. Trans. Amer. Math. Soc. **354**, 2933–2953 (2002).

[2] Chen, Z.-Q.: Gaugeability and Conditional Gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, 4639-4679, (2002).

[3] Chen, Z.-Q., Fitzsimmons, P. J., Takeda, M., Ying, J., and Zhang, T.S.: Absolute Continuity of Symmetric Markov Processes, Ann. Probab. **32**, 2067-2098, (2004).

[4] Chung, K. L., Zhao, Z.: From Brownian Motion to Schrödinger's Equation, Springer (1995).

[5] Dembo, A., Zeitouni, O.: Large deviation techniques and applications, Second edition, Applications of Mathematics **38**, Springer-Verlag, New York, (1998).

[6] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 1-47.

[7] Durrett, R.: Stochastic calculus, A practical introduction, CRC Press, (1996).

[8] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M.: Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, Walter de Gruyter, Berlin, (1994).

[9] Grigor'yan, A.: The heat equation on non-compact Riemannian manifolds, Engl. Transl. Math. USSR Sb.**72**, 47-77 (1992).

[10] Grigor'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Cont. Math. **398**, 93-191 (2006).

[11] Grigor'yan, A., Hansen, W.: A Liouville property for Schrdinger operators, Math. Ann. **312**, 659-716 (1998).

[12] Hawkes, J.: A lower Lipschitz condition for the stable subordinator, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. Z. **17**, 23–32 (1971) .

[13] Khas'minskii, K. Z.: On positive solutions of the equation $\mathcal{U}u + Vu = 0$, Theor. Probability Appl. **4**, 309-318 (1959).

[14] Murata, M.: Structure of positive solutions to $(-\Delta + V)u = 0$ in R^n, Duke Math. J. **53**, 869–943, (1986).

[15] Murata, M.: Integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations and elliptic Martin boundaries, to appear in J. Funct. Anal.

[16] Pinchover, Y.: Criticality and ground states for second-order elliptic equations, J. Differential Equations **80**, 237-250, (1989).

[17] Saloff-Coste, L.: A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities, Duke Math. J. **65**, 27-38 (1992).

[18] Sato, S.: An inequality for the spectral radius of Markov processes, Kodai Math. J. **8**, 5-13, (1985).

[19] Simon, B.: Schrödinger semigroups, Bull. Am. Math. Soc. 7, 447-536 (1982).

[20] Simon, B.: Brownian motion, L^p properties of Schrödinger semigroups and the localization of binding, J. Funct. Anal. **35**, 215-229 (1982).

[21] Sturm, K. T.: Schödinger semigroups on manifolds, J. Funct. Anal. 118, 309-350 (1993).

[22] Sturm, K. T.: On the L^p-spectrum of uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds, J. Funct. Anal. 118, 442-453 (1993).

[23] Takeda, M.: L^p-independence of the spectral radius of symmetric Markov semigroups, Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays. **II**: A Volume in Honor of Sergio Albeverio, Edited by Fritz Gesztesy, et. al, (2000).

[24] Takeda, M.: Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators, J. Funct. Anal. **191**, 343-376, (2002).

[25] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. **134** , 2719-2728 (2006).

[26] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels of Schrödinger operators on Riemannian manifolds, to appear in Bull. London Math. Soc.

[27] Takeda, M.: Branching Brownian motions on Riemannian manifolds: Expectation of the number of branches hitting closed sets, preprint.

[28] Takeda, M.: Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, preprint.

[29] Takeda, M.: L^p-independence of the growth bounds of Schrödinger type semigroups, preprint.

[30] Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for symmetric α-stable processes, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[31] Takeda, M., Uemura, T.: Subcriticality and Gaugeability for Symmetric α-Stable Processes, Forum Math. **16**, 505-517, (2004).

[32] Zhao, Z.: Subcriticality and gaugeability of the Schrödinger operator, Trans. Amer. Math. Soc. **334**, 75-96, (1992).