

# デファイナブル相対被覆ホモトピー定理と 被覆写像柱予想

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

ABSTRACT. ここでは、R.S. Palais による被覆ホモトピー定理のデファイナブル版と G.E. Bredon による被覆写像柱予想の肯定的解決について考察する。

以下が R.S. Palais [13] によって証明された被覆ホモトピー定理である。

**定理 1** ([13] または II.7.3 [1]).  $G$  をコンパクト Lie 群、 $X, Y$  を  $G$  空間とし、 $X/G$  の任意の開部分空間がパラコンパクトととする。 $f: X \rightarrow Y$  を  $G$  写像とし、 $f': X/G \rightarrow Y/G$  をその誘導写像とする。 $F': X \times [0, 1] \rightarrow Y/G$  を軌道構造を保つ  $f'$  のホモトピーとする。このとき、 $G$  ホモトピー  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  で  $\pi_Y \circ F = F' \circ \pi_{X \times [0, 1]}$  を満たすものが存在する。ただし、 $\pi_Y: Y \rightarrow Y/G$  と  $\pi_{X \times [0, 1]}: X \times [0, 1] \rightarrow X/G \times [0, 1]$  は射影とする。

最初に上の定理をデファイナブルカテゴリーで考察する。

$\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \dots)$  を実数体  $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  の順序極小拡張とする。デファイナブルは、パラメータ付きのデファイナブルを意味し、特に注意がなければ、すべて  $\mathcal{M}$  上で考える。順序極小構造の参考文献として、[2], [3], [15] などがある。

ここでは、デファイナブル写像はすべて連続とする。セミアルジェブリックカテゴリーはデファイナブルカテゴリーのひとつであり、非可算個のデファイナブルカテゴリーが存在

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 03C64.

*Keywords and Phrases.* 順序極小構造, デファイナブル  $G$  集合, デファイナブル被覆ホモトピー定理, 写像柱.

在することが知られている ([14])。デファイナブルカテゴリーとデファイナブル  $C^*$  カテゴリーは、[4], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12] などにおいて研究されている。

$\mathbb{R}^n$  のデファイナブル部分集合  $G$  がデファイナブル群とは、 $G$  が群であって、群演算  $G \times G \rightarrow G$  と  $G \rightarrow G$  がデファイナブルであることである。デファイナブル  $G$  集合とは、デファイナブル集合  $X$  と  $X$  上のデファイナブル  $G$  作用  $\phi: G \times X \rightarrow X$  の組で  $\phi$  がデファイナブルとなるものである。デファイナブル  $G$  集合間のデファイナブル写像がデファイナブル  $G$  写像とは、 $G$  写像となることである。

ここでは、特に注意がなければ、 $G$  はコンパクトデファイナブル群とする。

**定理 2** (1.1 [12]). 任意のデファイナブル  $G$  集合は有限個の軌道型しかもたない。  $\square$

デファイナブル  $G$  集合  $X$  と点  $x \in X$  に対して、軌道型  $(G/G_x)$  を対応させることができる。これを  $type(G/G_x)$  と書く。  $x, y \in X$  が同じ軌道型をもつとは、 $G_y$  と  $G_x$  が共役であることである。対応  $x \mapsto type(G/G_x)$  を  $X$  の軌道型という。  $X$  の軌道型は、  $x \in X/G \mapsto type(G/G_x)$  を誘導する。これを  $X/G$  の軌道構造という。

**定理 3** ([6]).  $G$  をコンパクトデファイナブル群、  $(X, X^-)$  をデファイナブル  $G$  集合とその閉デファイナブル  $G$  集合の組とし、  $Y$  をデファイナブル  $G$  集合とする。  $F': X/G \times [0, 1] \rightarrow Y/G$  を軌道構造を保つデファイナブルホモトピーとする。  $F'|X/G \times \{0\} \cup X^-/G \times [0, 1]$  がデファイナブル  $G$  写像  $F_0: X \times \{0\} \cup X^- \times [0, 1] \rightarrow Y$  にもちあげられて、  $\pi_Y \circ F_0 = F' \circ \pi_{X \times [0, 1]}$  を満たすとする。ただし、  $\pi_{X \times [0, 1]}: X \times [0, 1] \rightarrow X/G \times [0, 1]$  と  $\pi_Y: Y \rightarrow Y/G$  を射影とする。このとき、  $F_0$  のデファイナブル  $G$  拡張  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  が存在して、  $\pi_Y \circ F = F' \circ \pi_{X \times [0, 1]}$  となる。

**予想 4. (被覆写像柱予想 (P98 [1])).**  $G$  をコンパクト  $Lie$  群、  $W$  をコンパクト  $G$  集合とする。  $W/G$  は軌道構造を円柱の底の生成元にそって一定値となるような写像柱の形とする。このとき、  $W$  はある  $G$  写像の写像柱に  $G$  同相である。

ここでの次の目標は、上の予想の相対デファイナブル版を考察することである。

**定理 5** ([6]).  $(B, A)$  をデファイナブル集合の組で、  $A$  は  $B$  の閉集合とする。  $W$  をデファイナブル  $G$  集合で、射影  $\pi: W \rightarrow B \times [0, 1]$  は、各  $b \in B$  に対して、  $\{b\} \times [0, 1]$  上の軌道構造が一定とする。  $(X, X^-)$  をデファイナブル  $G$  集合の組で、  $(\pi^{-1}(B \times \{0\}), \pi^{-1}(A \times \{0\}))$  にデファイナブル  $G$  同相で、射影  $\pi_X: X \rightarrow B$  をもつとする。デファイナブル  $G$  写像  $\phi: X \times \{0\} \cup X^- \times [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(B \times \{0\} \cup A \times [0, 1])$  は射影と可換とする。このとき、  $\phi$  はデファイナブル  $G$  拡張  $\bar{\phi}: X \times [0, 1] \rightarrow W$  で射影と可換となるものが存在する。

$X, Y$  をデファイナブル集合とし、 $f: X \rightarrow Y$  をデファイナブル写像とする。 $f$  がデファイナブル固有とは、 $Y$  の任意のコンパクトデファイナブル部分集合  $C$  に対して、 $f^{-1}(C)$  がコンパクトとなることである。

次の定理は、予想 4 のデファイナブル版である。

**定理 6** ([6]).  $G$  をコンパクトデファイナブル群、 $W$  をデファイナブル  $G$  集合とする。 $W/G$  は、円柱の底の生成元にそって一定値となるようなデファイナブル固有写像によるデファイナブル写像柱の形とする。このとき、あるデファイナブル固有  $G$  写像の写像柱にデファイナブル  $G$  同相である。

#### REFERENCES

- [1] G.E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, (1972).
- [2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structure*, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structure*, Duke Math. J. **84**, (1996), 497-540.
- [4] T. Kawakami, *Affineness of definable  $C^r$  manifolds and its applications*, Bull. Korean Math. Soc. **40**, (2003), 149-157.
- [5] T. Kawakami, *Definable  $G$  CW complex structures of definable  $G$  sets and their applications*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Natur. Sci. **54**, (2004), 1-15.
- [6] T. Kawakami, *Definable relative covering homotopy theorem and covering mapping cylinder conjecture*, to appear.
- [7] T. Kawakami, *Equivariant definable  $C^r$  approximation theorem, definable  $C^r G$  triviality of  $G$  invariant definable  $C^r$  functions and compactifications*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2005), 23-36.
- [8] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.
- [9] T. Kawakami, *Every definable  $C^r$  manifold is affine*, Bull. Korean Math. Soc. **42**, (2005), 165-167.
- [10] T. Kawakami, *Homotopy property of definable fiber bundles*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.
- [11] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$* , Bull. Korean Math. Soc. **36**, (1999), 183-201.
- [12] T. Kawakami, *Proper definable actions*, preprint.
- [13] R.S. Palais, *The classification of  $G$ -spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **36**, (1960).
- [14] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), no. 4, 751-777.
- [15] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Mathematics **150**, Birkhäuser, Boston, 1997.