数理解析研究所講究録
第 1555 巻 2007 年 40-48

非代数的ザリスキー幾何
Non-algebraic Zariski Geometries

板井　昌典 (ITAI Masanori)
東海大学　理学部　情報数理学科
Dept. of Math. Sciences, Tokai University

概要

In the last section of the joint paper [HZ], Hrushovski and Zilber present a method of constructing new Zariski geometries from given Zariski geometries with groups acting on them. The authors also give an example of non-algebraic Zariski geometry. After examining their argument in detail, I mention briefly Zilber's idea of viewing non-algebraic Zariski geometries from a non-commutative geometric point of view.

はじめに

ザリスキー幾何に関する Hrushovski と Zilber の論文 [HZ] が出版されて 10 年が経過した．幾何的モーデル・ラング予想の解決に威力を発揮したわけであるが，その後一般論は Zilber が発展させている．本稿では，二人の共著論文の最後にある，非代数的ザリスキー幾何の例を解説し，その例がどのような意味を持ちうるかに関する Zilber の構想について一言述べる．

1　ザリスキー幾何への作用

X をザリスキー幾何とし，群 G が X に作用しているとする．ここで新たな群 H と H から G への，群準同型 $h: H \to G$ を考える．このとき群 H が作用しているザリスキー幾何 X_H をどう定義すればようかという問題から考えよう．

定義 1 (ザリスキー写像) ザリスキー幾何からザリスキー幾何への閉写像をザリスキー写像と呼ぶ．ザリスキー幾何 X に対して，X の自己同型のうち，ザリスキー写像になっているものをザリスキー自己同型と呼び，ザリスキー自己同型全体を $\mathrm{ZAut}(X)$ と書く．

定義 2 (semi-free action) 群 G の集合 X への作用が次の性質をもつとき，G の X への作用を半自由 (semi-free) な作用と呼ぶ．

$$\forall g \in G\, \forall x \in X\Big((g \neq 1 \wedge gx = x) \to \forall g' \in G\ (g'x = x)\Big)$$

注意 3 $\forall g \in G\, \forall x \in X(gx = x \to g = 1)$ という性質を持つ作用を，自由な作用と呼ぶ．また自由な作用は，もちろん半自由な作用である．

命題 4 (Prop. 10.1) X をザリスキー幾何とし，群 G は X へ半自由に作用しているとする．このとき群準同型 $i: G^* \to G$ に対して $\ker(i)$ が有限な場合，G^* が半自由に作用するザリスキー幾何 X^* で，任意の $g^* \in G^*$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{g^* \text{による作用}} & X^* \\ \downarrow j & \circlearrowleft & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i(g^*) \text{による作用}} & X \end{array}$$

が可換になるものが存在する．ただし $j: X^* \to X$ はザリスキー写像とする．

証明：証明は，まず集合 X^* を定義し，ついで X^* にネーター位相を定義し，最後に X^* がザリスキー幾何になることを示して終わる．

第1段階 X^* の定義．$X_0 = \{x \in X : \forall g \in G(gx = x)\}$ とおく．仮定より G の作用は半自由だから，各 $g \in G(g \neq i)$ に対して，集合 X_0 は g による X への作用の不動点の集合になっている．したがって X_0 は X の定義可能集合だから，閉集合である．X はザリスキー幾何だから，無限集合であり，既約かつ次元は 1 である．したがって X_0 は有限集合か X 自身でなければならない．$X = X_0$ ならば X^* として，X 自身をとればよいが，これでは新しいザリスキー幾何が出てこないので X_0 が有限集合の場合を考える．

群 G^* と，群準同型 $i : G^* \to G$ を考える．ただし i の核 $\ker(i) = H$ は G^* の有限部分群になっているものとする．$X^*/H \simeq X$ になっているような X の有限被覆 X^* を考え，群 G^* は X^* に半自由に作用しているとする．また $|X_0^*| = |X_0|$ であるような，X^* の部分集合 X_0^* に対しては G^* の作用は自明，すなわち X_0^* の点を動かさないものとする．

さらに X_0^* 以外では，G^* の作用は，regular, すなわち sharply 1-transitive, すなわち

$$\forall x^*, y^* \in (G^* - X_0^*)\, \exists!\, g^* \in G^*\, (g^* x^* = y^*)$$

が成り立っていると仮定する．

最後に，非自明な G^*-軌道と非自明な G-軌道の間には 1-1 対応があるものとする．

このとき，

$$x^* \sim y^* \iff \exists h \in H(hx^* = y^*)$$

によって同値関係を定義すると，任意の $g^* \in G^*$ に対して

$$x^* \sim y^* \Longrightarrow g^* x^* \sim g^* y^*$$

が成り立つ．よって G^* は $X^*/\sim$ に作用しており，この作用で H の作用は自明である．$G^*/H \simeq G$ だから G が $X^*/\sim$ に作用していると見なしてよい．また $X^*/H \simeq X$ となっている．よって写像 $j : X^* \to X$ が存在して，図式

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{g^* \text{による作用}} & X^* \\ \downarrow j & \circlearrowleft & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i(g^*) \text{による作用}} & X \end{array}$$

が可換になるようにすることができる．写像 j が全射であることに注意しよう．

第2段階 位相の定義とネーター性の証明．

$U \subseteq X^n$ と n^2 から G^* への部分写像 w に対して $F(U, w) \subseteq (X^*)^n$ を次のように定義する．

$$F(U,w) = \left\{(x_1^*, \cdots, x_n^*) : (jx_1^*, \cdots, jx_n^*) \in U \text{ かつ } \exists(\mu, \mu') \in \mathrm{dom}(w)\Big(w(\nu,\nu')(x_\nu^*) = x_{\nu'}^*\Big)\right\}$$

ついで (U, w) が，以下の 4 つの条件をみたす時，**正規** (*normal*) であるという．

(i) $\mathrm{dom}(w)$ は同値関係であり，$w(\nu, \nu) = 1$ である．

(ii) $(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ ならば $U \subseteq \{(x_1, \cdots, x_n) : i(w(\nu, \nu'))x_\nu = x_{\nu'}\}$

(iii) $(\nu, \nu'), (\nu', \nu'') \in \mathrm{dom}(w)$ ならば $w(\nu, \nu'') = w(\nu, \nu')w(\nu', \nu'')$

(iv) $J(U) = \{\nu : U \subseteq \{x : x_\nu \in X_0\}\}$ とおく．このとき $\nu, \nu' \in J(U)$ かつ $(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ ならば $w(\nu, \nu') = 1$ である．

X^n の閉集合 U と n^2 から G^* への部分写像 w に対して $F(U, w)$ を考え，このような $F(U, w)$ の有限個の和集合を $(X^*)^n$ の閉集合とする位相を定義し，さらにこの位相に関して $(X^*)^n$ がネーター性を持つことを示す．

(1) (U, w) が正規ならば，U の任意の点は $F(U, w)$ の点に持ち上げられる．すなわち任意の $x \in U$ に対して $jx^* = x$ となる $x^* \in F(U, w)$ が存在する．

証明：任意に $x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$ をとる．同値関係 $\mathrm{dom}(w)$ の代表元の集合を R とおく．各 $\mu \leq n$ に対して，$\nu \in R$ を $(\nu, \mu) \in \mathrm{dom}(w)$ であるようにとり，$j : X^* \to X$ の全射性に注意して，x_ν に対して x_ν^* を $j(x_\nu^*) = x_\nu$ であるようにとる．さらに $x_\mu^* = w(\nu, \mu)x_\mu^*$ とおく．こうすると，写像 j と G^* の作用の可換性から

$$j(x_\mu^*) = i(w(\nu, \mu))x_\nu = x_\mu$$

が成り立つので，$(x_1^*, \cdots, x_n^*) \in F(U,w)$ である．

(2) 任意の U, w に対して，$F(U,w) = F(U',w')$ となる正規な (U',w') が存在する．

証明：まず $J = \{\nu : 1 \leq \nu \leq$ かつ$\forall x^* \in F(U,w)\,(x_\nu^* \in X_0^*)\}$ とおく．U を

$$U' = U \cap \{x \in X^n : \exists \nu \in J\,(x_\nu \in X_0)\}$$

に制限しても $F(U,w) = F(U',w)$ である．あとは $\mathrm{dom}(w)$ が同値関係となるように w をすこし変え，(U',w') が正規で $F(U,w) = F(U',w')$ となるようにすればよい．

(3) $F(U,w)$ の形の集合の無限降下列は存在しない．

証明：背理法で示す．

$$F(U_1,w_1) \supsetneq \cdots \supsetneq F(U_i,w_i) \supsetneq \cdots \tag{1}$$

という無限降下列が存在したと仮定する．上の (2) で証明したことより，各 (U_i,w_i) は正規であると仮定してよい．

まず任意の i に対して $U_{\leq i} = \cap_1^i U_i$ とおくと，$F(U_{\leq i},w_i) = F(U_i,w_i)$ であることに注意する．

$n=2$ の時を示そう．まず $F(U_1 \cap U_2, w_2) = F(U_1,w_2) \cap F(U_2,w_2) \subseteq F(U_2,w_2)$ である．$F(U_i,w_i)$ が降下列なので $F(U_1,w_1) \cap F(U_2,w_2) = F(U_2,w_2)$ に注意すれば，$x^* \in F(U_2,w_2)$ とすると，$(jx_1^*, \cdots, jx_n^*) \in U_1 \cap U_2$ だから $x^* \in F(U_1,w_2) \cap F(U_2,w_2)$ である．よって $F(U_1 \cap U_2, w_2) = F(U_2,w_2)$ が分かる．あとは数学的帰納法で証明できる．よって無限降下列 (1) において U_i が降下列になっていると仮定することが出来る．

一方各 U_i は X^n の閉集合であり，X^n はネーター性を持つので U_i は有限個を除いて同じであると仮定してよい．したがって，無限降下列 (1) において U_i はすべて同じものと仮定してよい．すなわち無限降下列

$$F(U,w_1) \supsetneq \cdots \supsetneq F(U,w_i) \supsetneq \cdots \tag{2}$$

が存在して，(U,w_i) はすべて正規であるとする．

次に，n^2 から G^* への部分写像達 w_i が無限狭義増加列になってしまい矛盾することを示す．

$$J = \{\nu : 1 \leq \nu \leq n \text{ かつ}, \forall i \forall x^* \in F(U,w_i)(x_\nu^* \in X_0^*)\}$$

とおく．さらに各 w_i を J の補集合に制限したものを w_i' とおく．このとき各 i に対して $F(U,w_i) = F(U,w_i')$ となるから，すべての i について

$$(\nu,\nu') \in \mathrm{dom}(w_i) \longrightarrow \nu \notin J \tag{3}$$

と仮定してよい．さて

$$(\nu,\nu') \in \mathrm{dom}(w_i) \cap \mathrm{dom}(w_j) \text{ かつ } w_i(\nu,\nu') \neq w_j(\nu,\nu') \tag{4}$$

となる (ν,ν') が存在したと仮定しよう．任意の $k \geq i,j$ と $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in F(U,w_k)$ に対して，$x^* \in F(U,w_i) \cap F(U,w_j)$ である．ゆえに，$w_i(\nu,\nu')x_\nu^* = x_{\nu'}^* = w_j(\nu,\nu')x_\nu^*$ より，$x_\nu^* \in X_0^*$ である．よって $\nu \in J$ となってしまって仮定 (3) に反する．したがって $w_i(\nu,\nu') = 1 = w_j(\nu,\nu')$ となるが，これは仮定 (4) と矛盾する．よって $\mathrm{dom}(w_i) \cap \mathrm{dom}(w_j)$ で値は一致しているから，すべての i,j に対して $w_i \cup w_j$ は写像（より正確には部分写像）になっている．

このことは，無限降下列 (2) において $i < j$ ならば $w_i \subset w_j$ ということを意味するがこれは不合理である．よって (U,w) が正規な $F(U,w)$ の無限降下列は存在しない．

(4) $F(U,w)$ の形の集合は，任意個の共通部分をとる操作に対して閉じている．

証明：(3) より $F(U,w)$ の形をした集合の無限個の共通部分を考える必要がないので，有限個の共通部分だけを考えればよい．よって 2 つの集合の共通部分について示す．

$F(U_1,w_1)$ と $F(U_2,w_2)$ を考える．

- $Q = \{(i,j) \in \mathrm{dom}(w_1) \cap \mathrm{dom}(w_2) : w_1(i,j) \neq w_2(i,j)\}$
- $Q_1 = \{i : \exists j\,(i,j) \in Q\}$

とおく．w を $\mathrm{dom}(w_1) \cup \mathrm{dom}(w_2) - Q$ から G^* への写像で $(i,j) \in \mathrm{dom}(w)$ ならば $w(i,j) = w_1(i,j) = w(i,j)$ であるような写像とし，

$$U = U_1 \cap U_2 \cap \{(x_1, \cdots, x_n) : \exists i \in Q_1\,(x_i \in X_0)\}$$

とおくと，$F(U_1, w_1) \cap F(U_2, w_2) = F(U, w)$ である．
　以上で X^* への位相の導入が終了した．

第3段階 X^* の既約閉集合とその次元について調べる．

(1) (U, w) を正規かつ U は無限閉集合とする．このとき $F(U, w)$ が既約閉集合であるのは次の2条件が成り立つときに限る．

(i) U は既約閉集合である．

(ii) $U \subseteq \bigcup_{g \in G} \{(x_1, \cdots, x_n) : (gx_\nu = x_{\nu'})\}$ ならば $(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ である．

またこれら2条件が成り立っている場合，$\dim(F(U, w)) = \dim(U)$ である．

証明：$F(U, w)$ が既約閉集合だとする．(U, w) は正規だから，第2段階の主張(1)より，U の任意の点は $F(U, w)$ へ持ち上げられる．ここでもし U が既約でないと $F(U, w)$ も既約でなくなってしまう．よって U は既約閉集合である．(ii) を示すために，$g \in G$ かつ $U \subseteq \{(x_1, \cdots, x_n) : gx_\nu = x_{\nu'}\}$ と仮定する．

$$C = \left\{ w' : w \subseteq w', \mathrm{dom}(w') = \mathrm{dom}(w) \cup \{(\nu, \nu')\} \text{ かつ } i(w(\nu, \nu')) = g \right\}$$

とおくと，$|C| = |i^{-1}(g)| = |H| < \aleph_0$ であり（H は群準同型 $i : G^* \to G$ の核），

$$F(U, w) = \bigcup_{w' \in C} F(U, w')$$

である．仮定から $F(U, w)$ は既約だから，或る $w' \in C$ に対して $F(U, w) = F(U, w')$ でなければならない．そして (U, w) は正規だから $w = w'$ でなければならない．よって $(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ である．
　逆に (i), (ii) を仮定して $F(U, w)$ が既約閉集合であることを示す．もし

$$F(U, w) \subseteq \bigcup_{k=1}^{l} F(U_k, w_k) \cup \{c_1, \cdots, c_l\} \text{ かつ } F(U_k, w_k) \subset F(U, w)\ (1 \leq k \leq l)$$

となっていたとする．各 (U_k, w_k) は正規だと仮定してよいから，U は U_k 達の和集合と有限個の点の和集合の部分集合になっている．しかし U は既約無限閉集合だから，或る k に対して $U \subseteq U_k$ である．一方 (U_k, w_k) は正規だから，$(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w_k)$ ならば

$$U \subseteq U_k \subseteq \{(x_1, \cdots, x_n) : (i(w_k(\nu, \nu'))x_\nu = x_{\nu'})\}$$

である．したがって仮定の (ii) より，$(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ である．(ν, ν') は任意だったから $\mathrm{dom}(w_k) \subseteq \mathrm{dom}(w)$ であることがわかる．よって $w_k = w$ かつ $F(U_k, w_k) = F(U, w)$ である．ゆえに $F(U, w)$ は既約閉集合である．

(2) (U, w) を正規とし，V を U の既約閉部分集合とする．このとき w' が存在して，(V, w') は正規かつ，$F(V, w')$ が既約閉部分集合となる．そして $F(V, w)$ は有限個の既約な $F(V, w')$ たちの和集合になっている．

証明：

$$E = \left\{ (\nu, \nu') : V \subseteq \bigcup_{g \in G} \{(x_1, \cdots, x_n) : gx_\nu = x_{\nu'}\} \right\} \subseteq n^2$$

とおく．(U, w) が正規だから $\mathrm{dom}(w) \subseteq E$ であり，また E は同値関係になっている．任意の $v^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in F(V, w)$ をとる．この v^* に対して w' を次のように定義する．$(\nu, \nu') \in E$ に対して，

- $x_\nu^* = x_{\nu'}^* \in X_0^*$ ならば $w'(\nu, \nu') = 1$
- そうでない場合は $g^*(x_\nu^*) = x_{\nu'}^*$ となる $g^* \in G^*$ が唯一つ定まるから $w'(\nu, \nu') = g^*$ とする．

このようにして w' を定めると，$\mathrm{dom}(w') = E$ であり，(V, w') は正規であり，$v^* \in F(V, w')$ である．上の主張(1)の2条件が成り立っているから $F(V, w')$ は $F(V, w)$ の既約閉部分集合である．与えられた w を w' に拡張する可能性は有限通りしかないから主張は証明された．

(3) (U,w) を正規とし，U を既約閉集合とする．このとき $F(U,w)$ の任意の成分は，U の上へ射影され，U と同じ次元を持つ．

証明：上で証明したことから，

$$F(U,w) = \bigcup_{w' : \text{有限個}} F(U,w') \tag{5}$$

である．また各 (U,w') は正規だから $F(U,w')$ は U の上へ射影されている．この各既約成分 $F(U,w')$ に対して，$\dim(U)$ に関する帰納法から

$$\dim(U) \leq \dim(F(U,w')) \tag{6}$$

が分かる．

$F(U,w')$ の任意の既約無限閉部分集合は，或る $V \subseteq U$ と w'' に対して $F(V,w'')$ の形をしている．ただし V, w'' は第 3 段階の主張 (1) の 2 条件をみたしているものとする．この 2 条件のうちの (ii) と正規性の条件の (ii) から $U = V$ ならば $\mathrm{dom}(w') = \mathrm{dom}(w'')$ であり，さらに正規性の条件 (iv) から $w' = w''$ である．

よってもし $F(V,w'') \subsetneq F(U,w')$ ならば，$V \neq U$ でなければならない．U は既約閉集合だから，$\dim(U)$ に関する帰納法から $F(U,w)$ の既約成分 $F(U,w')$ に対して $\dim(F(U,w')) \leq \dim(U)$ が成り立ち，不等式 (6) と合わせて $\dim(U) = \dim(F(U,w'))$ が分かる．

第 4 段階 ザリスキー幾何であることの証明．
まずザリスキー幾何の公理を復習しよう．

定義 5 (ザリスキー幾何) D を無限集合とし，各 n について D^n にはネーター位相が入っている．次の 4 つの公理系が満たされるとき，D を**ザリスキー幾何**と呼ぶ．

(Z0) f_i を定数写像 $f_i(x_1, \cdots x_n) = c$，あるいは射影 $f_i(x_1, \cdots x_n) = x_j$ (j は $1, \cdots, n$ のどれか) とする．$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ とすると $f : D^n \longrightarrow D^m$ は連続写像である (n, m の大小関係に制限がないことに注意)．D^n の対角集合 $\Delta^n_{i,j} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = x_j\}$ は閉集合である．

(Z1) C を D^n の既約閉集合，π を D^n から D^k への射影とする．このとき，$\mathrm{cl}(\pi C)$ の真部分閉集合 F で，$\pi C \supseteq (\mathrm{cl}(\pi C) - F)$ となるものが存在する．

(Z2) D は既約である．また次の意味で，一様に 1 次元的である：$C \subseteq D^n \times D$ が閉集合であるとき，ある自然数 m が存在して，任意の $\bar{a} \in D^n$ に対して，$C(\bar{a}) = D$ または $|C(\bar{a})| \leq m$ である．ただし，$C(\bar{a}) = \{x \in D : (\bar{a}, x) \in C\}$．

(Z3) (次元定理) $\dim(D^n) \leq n$, U を D^n の既約閉集合，$T_{ij} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = x_j\}$ とする．このとき $U \cap T_{ij}$ の各成分の次元は，$\dim(U) - 1$ 以上である．

定義 6 閉集合 $C \subseteq D^m$ と射影 $\pi : D^m \longrightarrow D^n$ に対して $\pi(C) \subseteq D^n$ が閉集合になっているとき，D を**完備**なザリスキー幾何という．

注意 7 (Z1) は，ザリスキー幾何の理論が，量化記号消去を持つことを保障し，(Z2) はザリスキー幾何の理論が，強極小性を持つことを保障する．

注意 8 (射影の性質について) ここで射影の基本的な性質をひとつ述べる．$(X^*)^n$ から $(X^*)^k$ への射影と，X^n から X^k への射影を共に π で表すことにする．

$$\begin{array}{ccc} (X^*)^n \supseteq C & \xrightarrow{\pi} & \pi C \subseteq (X^*)^k \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ X^n \supseteq U & \xrightarrow{\pi} & \pi U \subseteq X^k \end{array}$$

上図において，$C = F(U,w)$ とし (U,w) は正規とする．このとき

主張：$\pi C \subseteq F(\pi U, w')$ である．ただし，w' は w を $\{1, \cdots, k\}$ に制限したものである．

なぜなら $(x^*_1, \cdots, x^*_k) \in \pi C$ とすると，

$$\exists x^*_{k+1} \in X \cdots \exists x^*_n \in X^* \ (x^*_1 \cdots, x^*_n) \in C$$

である．よって $(jx^*_1, \cdots, jx^*_k, jx^*_{k+1}, \cdots, jx^*_n) \in U$ かつ w に関する条件が成り立っている．この条件を $\{1, \cdots, k\}$ に制限すれば w' に関する条件になっているから，$(jx^*_1, \cdots, jx^*_k) \in \pi U$ に注意すれば $(x^*_1, \cdots, x^*_k) \in F(\pi U, w')$ となる．よって $\pi C \subseteq F(\pi U, w')$ である．

逆に $x^* = (x_1^*, \cdots, x_k^*) \in F(\pi U, w')$ とすると，$(jx_1^*, \cdots, jx_k^*) \in \pi U$ かつ w' に関する性質が成り立っている．よって $x_{k+1}, \cdots, x_n$ が存在して，$(jx_1^*, \cdots, jx_k^*, x_{k+1}, \cdots, x_n) \in U$ が成り立つ．j は全射だから $jx_{k+1}^* = x_{k+1}, \cdots, jx_n^* = x_n$ となる $x_{k+1}^*, \cdots, x_n^*$ が存在する．w に関する性質が成り立っているとは限らないので，$x^* \in \pi C$ かどうかは不明である．ただし，任意の $(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ に対して，

$$(\nu \leq k \longrightarrow \nu' \leq k) \wedge (\nu > k \longrightarrow \nu = \nu') \tag{7}$$

の場合は，$\pi C = F(\pi U, w')$ である．

(Z0) の確認

これは X^* の位相の定義から明らかである．

(Z1) の確認

証明：$C = F(U, w) \subseteq (X^*)^n$ を既約閉集合，$\pi : (X^*)^n \to (X^*)^k$ を射影とする．このとき，真部分閉集合 $F^* \subseteq \mathrm{cl}(\pi(C))$ が存在して，$\pi(C) \supseteq \mathrm{cl}(\pi(C)) - F^*$ が成り立つことを示す．(U, w) は正規であると仮定してよい．$\mathrm{dom}(w)$ と k^2 との関係が重要である．

(場合１) 正規性の条件 (i) から $\mathrm{dom}(w) \subseteq n^2$ は同値関係であり，すべての $\nu = 1, \cdots, n$ に対して $(\nu, \nu) \in \mathrm{dom}(w)$ である．$\mathrm{dom}(w)$ が本質的に $\{1, \cdots, k\}^2$ の部分集合になっている，すなわち，条件

$$\mathrm{dom}(w) \cap (\{k+1, \cdots, n\} \times \{k+1, \cdots, n\}) = \{(\nu, \nu) : \nu = k+1, \cdots, n\}$$

を満たしている場合は，注意 (8) の条件 (7) が成り立っている．この場合，X^n から X^k への射影も π で表すことにし，X はザリスキー幾何だから (Z1) が成り立っているので，V を

$$\pi(U) \supseteq \mathrm{cl}(\pi U) - V \tag{8}$$

であるような $\mathrm{cl}(\pi U)$ の真部分閉集合とする．w を $\{1, \cdots, k\}$ へ制限したものを w' とすると

$$F(\pi U, w') \supseteq F(\mathrm{cl}(\pi U), w') - F(V, w') \tag{9}$$

である．また注意 8 より

$$F(\mathrm{cl}(\pi U), w') \supseteq F(\pi U, w') \supseteq \mathrm{cl}(\pi C)$$

である．よって

$$F(\mathrm{cl}(\pi U), w') - F(V, w') \supseteq \mathrm{cl}(\pi(C)) - F(V, w') \tag{10}$$

である．仮定 (7) より，$\pi C = F(\pi U, w')$ だから不等号 (9), (10) より

$$\pi C \supseteq \mathrm{cl}(\pi C) - F(V, w') \tag{11}$$

が得られる．ここで $F(V, w')$ は $F(\mathrm{cl}(\pi C), w')$ の真部分閉集合であるから (Z1) が成り立つことが示された．

(場合１以外) 条件 (7) が成り立たない場合は，射影 π を２段階で行う．$\mathrm{dom}(w)$ のうち $\{1, \cdots, k\}$ からはみでている部分がある場合は，$x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in (X^*)^n$ の添字の集合 $s \subseteq n$ が存在して

$$\forall \nu' \in n - s \, \exists \nu \in s \, ((\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w))$$

という条件をみたしているから，まず π' を $(X^*)^n$ から $\prod_{i \in s} X^*$ への射影とする．

主張：$\pi'(C)$ は閉集合である．

実際，任意の $\nu' \in n - s$ に対して，$(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w)$ であるような $\nu \in s$ が存在するから $h(\nu)$ を $i(w(\nu, \nu')) \in G$ によって定まる，ザリスキー幾何 X の射とする．次いで，$(x_\nu : \nu \in s) \in \prod_{i \in s} X$ から

$$\Big((x_\nu : \nu \in s), (h(\nu)(x_{\nu'}) : \nu' \notin s)\Big) \in \prod_{i \in s} X \times \prod_{i \notin s} X = X^n$$

への写像を H とすると H も射になる．よって $U' = H^{-1}(U)$ は閉集合である．一方，w' を w の s への制限とすると $\pi'(C) = F(U', w')$ だから，$\pi'(C)$ は閉集合である．**主張の証明終わり**

この π' を用いて，$\pi = \pi'' \circ \pi'$ と分解して，π'' が条件 (7) を満たすようにとる．$\pi(C)$ はまず $\pi'(C)$ によって閉集合に移り，$\pi''(\pi'(C))$ は (Z1) を満たすから，全体として (Z1) を満たしている．

X が完備の場合を考える．この場合，閉集合 U に対して πU は閉集合だから，(8) において $V = \emptyset$ である．しかし (8) において $V = \emptyset$ ならば，(11) において $F(V, w') = \emptyset$ である．よって，X が完備ならば，X^* における閉集合の射影は閉集合になるから，X^* も完備である．

(Z2) の確認

証明：$C = F(U, w) \subseteq (X^*)^n \times X^*$ を閉集合とし，任意の $\overline{a} \in (X^*)^n$ に対して

$$\begin{aligned} C(\overline{a}) &= \{b \in X^* : (\overline{a}, b) \in C\} \\ &= \{b \in X^* : (j\overline{a}, jb) \in U \text{ かつ } \exists(\nu, \nu') \in \mathrm{dom}(w) \\ &\quad \Big((\nu' \leq n \wedge w(\nu, \nu')a_\nu = a_{\nu'}) \vee (\nu' = n+1 \wedge w(\nu, n+1)a_\nu = b)\Big)\Big\} \end{aligned}$$

に注意する．したがって，

(i) ある $\nu \leq n$ に対して $(\nu, n+1) \in \mathrm{dom}(w)$ ならば，$|C(\overline{a})| \leq 1$ である．

(ii) (i) 以外の場合は，$C(\overline{a}) = X^*$ でなければ $U(j\overline{a})$ は有限集合であり，$|C(\overline{a})| \leq |U(j\overline{a})| \cdot |H|$ である．ここで H は群準同型 $i : G^* \to G$ の核であり，$X \simeq X^*/H$ に注意する．

X が既約だから，X^* の位相の定義から X^* も既約である．

(Z3) の確認

証明：(U, w) を正規，$F(U, w)$ を既約とする．また $\Delta^* = \{x^* : x_1^* = x_2^*\}$ とおく．$F(U, w) \cap \Delta^*$ が，それぞれ次元が $\dim(U) - 1$ 以上である，有限個の既約閉集合の和集合であることを示す．

$\Delta = \{x \in X^n : x_1 = x_2\}$ とし，$U' = U \cap \Delta$ とおく．ザリスキー幾何 X における次元定理より U' は，それぞれ次元が $\dim(U) - 1$ 以上である有限個の既約成分 U_i の和集合である．第 3 段階の主張 (3) より，各 $F(U_i, w)$ は有限個の既約成分 $F(U_i, w_{ij})$（ただし (U_i, w_{ij}) は正規）の和集合であり，

$$\dim(F(U_i, w_{ij})) \geq \dim(U) - 1$$

である．ここで各 $U_i \subseteq \Delta$ に注意すると，すべての i, j について $(1, 2) \in \mathrm{dom}(w_{ij})$ である．

- $w_{ij}(1, 2) = 1$ ならば，$F(U_i, w_{ij}) \subseteq F(U, w) \cap \Delta^*$
- $v^* \in F(U, w) \cap \Delta^*$ に対して，$v = jv^*$ とおき，添字 i を $v \in U_i$ となるようにとる．$w_{ij} = w'(v^*)$ と定義すれば，$w_{ij}(1, 2) = 1$ となるような (i, j) に対して $v^* \in F(U_i, w_{ij})$ である．

よって，

$$F(U, w) \cap \Delta^* = \bigcup_{w_{ij}(1,2)=1} F(U_i, w_{ij})$$

である．他の場合も同様に議論すればよい． ■

2 非代数的ザリスキー幾何

定理 9 (Theorem C) 非代数的ザリスキー幾何が存在する．

証明：k を代数的閉体とし X を k 上の楕円曲線とする．X をザリスキー幾何と考える．また楕円曲線 X の j-不変量 $j(X) \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$ とする．点 p を，楕円曲線 X 上群構造に関するゼロ点とし，a, b を X の独立な一般点 (generic point) とする．このとき任意の $q \in X$ に対して，

$$t_a : q \mapsto q + a, \; t_b : q \mapsto q + b$$

によって $t_a, t_b \in \mathrm{Aut}(X)$ をそれぞれ定義する．ここで $+$ は，楕円曲線 X 上の群構造に関するものである．t_a, t_b によって生成される $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を G とおく．a, b のとり方から $G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である．ここで G の X への作用が自由であることに注意する．

次に群 G^* を定義する．まず元 T_a, T_b を考え，G^* は T_a, T_b で生成される自由群で，T_a, T_b は次の規則

$$[T_a, T_b]^2 = [T_a, [T_a, T_b]] = [T_b, [T_a, T_b]] = 1$$

に従うものとする．交換子 $[T_a,T_b]$ によって生成される，G^* の部分群を H とすると H は2個の要素を持つ．

$$i:T_a \mapsto t_a,\ i:T_b \mapsto t_b$$

によって G^* から G への群準同型 i を定義すると，群 H は，i の核になっている．

このような X,G,G^* と準同型 i に対して，前節の命題4を適用してザリスキー幾何 X^* を定義することができる．この新たなザリスキー幾何 X^* が非代数的であること，すなわちどのような代数的閉体上でも定義されないことを，背理法によって示す．

X^* が代数的である，すなわち或る代数的閉体 K 上の代数曲線であると仮定する．ザリスキー幾何 X は豊富 (ample) であるから，或る代数的閉体 k' を翻訳する（ACF は仮想元を消去するから，翻訳することと定義することは同値である）．この k' と，楕円曲線 X が定義されていた k は同型である．よって k がザリスキー幾何 X^* で翻訳可能である．したがって代数的閉体 k は，代数的閉体 K で翻訳可能である．ここで ACF の性質から $k \simeq K$ である．よって楕円曲線 X と代数曲線 X^* はともに代数的閉体 K 上であるとしてよい．また命題4から得られる写像 $j:X^* \to X$ は $|H|=2$ だから，定義可能な2-1写像である．

代数曲線として $X^* \simeq C_1 \cup \cdots C_m \cup$(有限個の点)，と考える．ただし各 C_k は代数曲線．一般点 $x \in X$ に対して，$j^{-1}(x)$ は各 C_k と交わっているので j が2-1写像であることから $m \le 2$ でなければならない．

もし $m=2$ とすると j^{-1} は，曲線 C_1，C_2 とそれぞれ1点で交わる．交換子 $[T_a,T_b]$ は $j^{-1}(x)$ の2点を入れ替えるから，交換子 $[T_a,T_b]$ は曲線 C_1 と C_2 を入れ替える．

一方 T_a,T_b のそれぞれは

- C_1,C_2 を保存する
- C_1,C_2 を入れ替える

のいずれかである．したがって T_a,T_b に関しては全部で4つの可能性があるが，いずれの場合でも交換子 $[T_a,T_b]$ は曲線 C_1,C_2 を動かさないから矛盾してしまう．よって $m=1$ でなければならない．

X^* はしたがって，既約成分が1つの代数曲線である．この曲線を C とする．C は，命題4より完備であり，代数曲線についての特異点消去から非特異な曲線であるとしてよい．群 G^* はザリスキー幾何 X^* に作用しているから，G^* を $\mathrm{Aut}_K(C)$ へ埋め込むことが出来る．群 G^* は無限だから $\mathrm{Aut}_K(C)$ も無限であり，代数曲線の一般論から曲線 C の種数は1以下である．一方，曲線 C から楕円曲線 X への有理写像があるから曲線 C の種数は1以上である．したがって曲線 C の種数は1であり，楕円曲線である．C と X は isogeneous だから楕円曲線 C の j-不変量に着目すると $j(C) \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$ である．

したがって楕円曲線の一般論（[Ha], p.321, Cor. 4.7）より，$\mathrm{Aut}_K(C)$ の部分群で，楕円曲線 C のゼロ点 p を固定するものは2つの要素，すなわち *id* と *inversion* $(x \mapsto -x)$ を持つ有限群である（$j(C) \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$ より $j(C) \neq 0, 1728$ に注意する）．

$\mathrm{Aut}_K(C) = W \rtimes A$ である．ここで W は $x \in C$ を $-x \in C$ へ移す写像であり，A は C の点の平行移動からなる群である．W は $g \in A$ を $-g$ へ移すことによる作用を群 A に行っている．したがって，$g_1,g_2 \in \mathrm{Aut}_K(C)$ とし，g_1,g_2 のどちらも位数が2でないならば $g_1,g_2 \in A$ でなければならないから，$g_1g_2 = g_2g_1$ である．

一方，群 G^* のなかで，T_a,T_b はどちらも位数は2でないにも拘わらず，$T_aT_b \neq T_bT_a$ である．これは $G^* \hookrightarrow \mathrm{Aut}_K(C)$ であることに反する．したがってザリスキー幾何 X^* は代数的ではない． ■

3 非可換幾何との関連

さて前節で，非代数的なザリスキー幾何を構成したが，このザリスキー幾何は，もとは曲線 C であり，$\mathrm{Aut}(C)$ の中にある群 G^* のせいで代数的にならないのであった．G^* の性質をまとめると，

$$G^* = \langle T_a, T_b \rangle,\ T_aT_b = T_bT_a[T_a,T_b],\ [T_a,T_b]^2 = 1$$

である．このような C と G^* の関係から，Zilber は，非代数的ザリスキー幾何が非可換幾何のモデル理論を構築するための道具になるのではないかと示唆している．

実際 [Z3] において Zilber は，ある種の典型的な量子代数に対応する幾何的対象を構成する方法を示し，そのモデル理論的性質も研究しているが，その詳細の紹介は別稿にて行う．

参考文献

[Bo] Elisabeth Bouscaren (Ed.), Model Theory and Algebraic Geometry, LNM 1696, Springer, 1998

[LD] Lou van den Dries, Tame Topology and O-minimal Structures, Cambridge UP, 1998

[FJ] Michael D. Fried, Moshe Jarden, Field Arithmetic 2nd Ed, Springer, 2005

[Ha] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry, GTM 52, Springer, 1977

[Ho] Wilfrid Hodges, Model Theory, Cambridge UP, 1993

[HZ] Ehud Hrushovski, Boris Zilber, Zariski geometries, J of the AMS, 1996

[Ma] David Marker, Model Theory: An Introduction, GTM 217, Springer, 2002

[Z1] Boris Zilber, 1991 example by Hrushovski

[Z2] Boris Zilber, Non-commutative geometry and Zariski geometry

[Z3] Boris Zilber, A class of quantum Zariski geometries

[Na] 永田　雅宜,『可換体論』(新版), 裳華房, 1985

[It] 板井　昌典,『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002