数理解析研究所講究録
第 1555 巻 2007 年 49-56

ベクトル空間のGeneric自己同型

神戸大学・工学研究科・情報知能　桔梗宏孝 (Hirotaka Kikyo)
Dept. of Computer Science and Systems Engineering
Kobe University
kikyo@kobe-u.ac.jp

概要

自己同型写像を1つもつ無限ベクトル空間の理論のモデル随伴理論に対する具体的な公理系を与える．それは量化記号消去を許し，完全で，Morley 階数 ω の ω 安定理論になり，擬極小モデルをもつ．

2000 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C45, 03C50

1 はじめに

板井と若井 [3] は B. Zil'ber の定義した擬極小構造 (quasi-minimal structure) の自然な例を与えた．一階の構造 M が擬極小とは，それが非可算で，M の任意の部分集合 X についてそれがパラメタを使って定義可能ならば X あるいは $M-X$ が高々可算になることである．彼らの考えた構造は加除アーベル群にシフト演算 σ を考えた $(\mathbb{Q}^{\omega}, +, 0, \sigma)$ である．ここで，σ は要素の成分をすべて左に1つシフトする関数である．

彼らの議論は本質的には環 $\mathbb{Q}[X]$ が単項イデアル整域になることに基づいている．したがって，意味をなせば，任意の体 K について $K[X]$ で考えてもうまくいきそうに思えた．また，彼らは $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}^{\omega}, +, 0, \sigma)$ を公理化しているが，それは何らかの存在閉性 (existentially closed であること) を表しているように思えた．

結局，彼らの考えた理論は，本質的には $\mathbb{Q}$ ベクトル空間上の1つの自己同型の公理のモデル随伴理論になることがわかった．シフト関数 σ は $\mathbb{Q}^{\omega}$ 上では自己同型にならないが，$\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbb{Q}^{\mathbf{Z}}$ 上では自己同型になる．

この論文では体 K について，無限 K ベクトル空間上の1つの自己同型の公理のモデル随伴理論を考える．

無限 K ベクトル空間は強極小で DMP(definable multiplicity property) をもつので，それがモデル随伴理論をもつことは一般論からわかる [1, 5]．また，それが量化記号消去を許すことも一般論からわかる [1].

この論文で得られた新しい点は，一般論で与えられる公理系よりも具体的な公理系を与えており，それによって板井・若井のモデルの修正版がこの理論の擬極小モデルになっていることがわかる点である．また，Morley 階数の計算も行う．

2 準備

モデル随伴理論 (model companion)，存在閉モデル (existentially closed model)，Morley 階数 (Morley rank) などに関する基本的な知識を仮定する (たとえば，Hodges の本 [2] を参照).

K を 1 をもつ可換体とする．

$$L_K = \{+, 0, r\}_{r\in K}$$

は K ベクトル空間の言語である．ここで，各 $r \in K$ は単項演算と考える．無限な K ベクトル空間の定義は L_K の文の集合で書けるのでそれを T_K とする．T_K が強極小な完全理論で量化記号消去を許すことはよく知られている．

$$T_\sigma = T_K \cup \{\text{“}\sigma \text{ は正則 } K \text{ 線形写像”}\}$$

とする．T_K が DMP をもつ強極小理論なので，T_σ はモデル随伴理論 TA を言語 $L_K(\sigma) = L_K \cup \{\sigma\}$ 上にもつ．

T_σ は任意存在形の公理系をもつ．したがって，$(M, \sigma^M) \models TA$ の必要十分条件は (M, σ^M) が T_σ の存在閉モデルということである．(M, σ^M) が T_σ の存在閉モデルのとき，(M, σ^M) を T_K の **generic 自己同型**とも呼ぶ．

以下，ベクトル空間上の線形写像 σ と K の要素で生成される自己準同型を考える．$K[X]$ は K 係数の変数 X の多項式全体を表す．$f(X) \in K[X]$ に対し，$\deg f(X)$ で $f(X)$ の次数を表す．$f(X) \in K[X]$ と K ベクトル空間 M 上の線型写像 σ に対し，$f(\sigma)$ で $f(X)$ と σ から定義される M 上の自己準同型を表す．たとえば，$f(X) = X^2+2X+3$ のとき，$f(\sigma) = \sigma^2 + 2\sigma + 3$ で，$x \in M$ に対し，$(\sigma^2 + 2\sigma + 3)x = \sigma(\sigma(x)) + 2\sigma(x) + 3x$ である．

3 T_K の generic 自己同型

この節では，T_K の generic 自己同型の具体的な公理を与える．

言語 $L_K(\sigma)$ で記述した次の 1–3 からなる公理系を TA_K とする:

1. M は無限 K ベクトル空間である．

2. σ は M 上の正則 K 線形写像である．

3. $f(X) \in K[X]$ を定数項が0でない1次以上のモニック多項式, $g_1(X), \ldots, g_n(X) \in K[X]$ を f の次数よ低い次数をもつ多項式とすると, M の任意の要素 $a, a_1, \ldots, a_n$ に対し,

$$\begin{cases} f(\sigma)x &= a \\ g_1(\sigma)x &\neq a_1 \\ &\vdots \\ g_n(\sigma)x &\neq a_n \end{cases}$$

は解 $x \in M$ をもつ.

最終的に, (M,σ) が T_K の generic 自己同型であることと TA_K のモデルになることが同値になることを示す.

まず, 左から右が導かれることを示す.

命題 3.1 (M,σ) が T_K の generic 自己同型ならばそれは TA_K のモデルである.

証明. (M,σ) を T_K の generic 自己同型とする.

$f(X), g_1(X), \ldots, g_n(X)$ を $K[X]$ の要素とし, $f(X)$ は定数項が 0 でない 1 次以上のモニック多項式, 各 i について $\deg g_i < \deg f$ と仮定する. $a, a_1, \ldots, a_n$ を M からとり,

$$\begin{cases} f(\sigma)x &= a \\ g_1(\sigma)x &\neq a_1 \\ &\vdots \\ g_n(\sigma)x &\neq a_n \end{cases}$$

を考える.

$f(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_{m-1}X^{m-1} + X^m$ とする. $M, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ が K 線形独立になるように $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ を M の初等拡大からとる. すると $c_0 \neq 0$ なので $M, x_1, \ldots, x_{m-1}, a - c_0x_0 - c_1x_1 - \cdots - c_{m-1}x_{m-1}$ も K 線形独立になる.

M' を $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, M$ で張られる K 線形空間とする. すると σ を M' 上の正則写像 σ' に拡張して

$$\begin{aligned} \sigma'(x_0) &= x_1, \\ \sigma'(x_1) &= x_2, \\ &\vdots \\ \sigma'(x_{m-1}) &= a - c_0x_0 - c_1x_1 - \cdots - c_{m-1}x_{m-1}. \end{aligned}$$

となるようにできる. $\sigma'(x_0) = x_1, \sigma'^2(x_0) = x_2, \ldots, \sigma'^m(x_0) = a - c_0x_0 - c_1x_1 - \cdots - c_{m-1}x_{m-1}$ なので, $f(\sigma')x_0 = a$ である. また, $M, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ が K 線形独立な

ので，$g_i(\sigma')x_0 - a_i \neq 0$ である．したがって，

$$\begin{cases} f(\sigma')x &= a \\ g_1(\sigma')x &\neq a_1 \\ & \vdots \\ g_n(\sigma')x &\neq a_n \end{cases}$$

は M' で解 x_0 をもつ．(M',σ') が T_σ のモデルで，(M,σ) が存在閉モデルなので，結論を得る． □

逆を示すために，まず，TA_K が量化記号消去を許すことを示す．

補題 3.2 $f(X), g(X) \in K[X]$ がモニックで $h(X) = \gcd(f(X), g(X))$ とし，$f(X) = f_0(X)h(X)$ かつ $g(X) = g_0(X)h(X)$ とする．$p(X), q(X) \in K[X]$ を $p(X)f_0(X) + q(X)g_0(X) = 1$ となるように選ぶ．s, t を変数 x の現れない $L_K(\sigma)$ の項とする．

TA_K の公理 1, 2 のもとで，

$$\begin{cases} f(\sigma)x &= s \\ g(\sigma)x &= t \end{cases}$$

の必要十分条件は

$$\begin{cases} f_0(\sigma)t &= g_0(\sigma)s \\ h(\sigma)x &= p(\sigma)s + q(\sigma)t \end{cases}$$

証明．$(\Rightarrow)$．$f(\sigma)x = s$ かつ $g(\sigma)x = t$ とする．すると

$$f_0(\sigma)t = f_0(\sigma)g(\sigma)x = f_0(\sigma)h(\sigma)g_0(\sigma)x = g_0(\sigma)f(\sigma)x = g_0(\sigma)s.$$

また

$$h(\sigma)x = h(\sigma)(p(\sigma)f_0(\sigma) + q(\sigma)g_0(\sigma))x = p(\sigma)f(\sigma)x + q(\sigma)g(\sigma)x = p(\sigma)s + q(\sigma)t.$$

$(\Leftarrow)$．$f_0(\sigma)t = g_0(\sigma)s$ かつ $h(\sigma)x = p(\sigma)s + q(\sigma)t$ と仮定する．

$f(\sigma)x = f_0(\sigma)h(\sigma)x = f_0(\sigma)(p(\sigma)s + q(\sigma)t) = p(\sigma)f_0(\sigma)s + q(\sigma)f_0(\sigma)t = p(\sigma)f_0(\sigma)s + q(\sigma)g_0(\sigma)s = (p(\sigma)f_0(\sigma) + q(\sigma)g_0(\sigma))s = s$.

同様に $g(\sigma)x = t$ も示せる． □

命題 3.3 TA_K は $L_K(\sigma) = L_K \cup \{\sigma\}$ で量化記号消去を許す．

証明．次の形の論理式から $\exists x$ を消去できることを示せばよい．

$$\exists x \begin{cases} f_1(\sigma)x &= s_1 \\ & \vdots \\ f_m(\sigma)x &= s_m \\ g_1(\sigma)x &\neq t_1 \\ & \vdots \\ g_n(\sigma)x &\neq t_n \end{cases}$$

ここで，右辺の項には変数 x が現れないと仮定してよい．補題 3.2 より，TA_K のもとで，この論理式を次の形に同値変形できる:

$$\exists x \left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 \ (x\text{ は現れない}) \\ & \vdots & \\ u_{m-1} & = & v_{m-1} \ (x\text{ は現れない}) \\ h(\sigma)x & = & s \\ g_1(\sigma)x & \neq & t_1 \\ & \vdots & \\ g_n(\sigma)x & \neq & t_n \end{array} \right.$$

各 $g_i(\sigma)x$ を $h(\sigma)x$ で「割り算」し，$h(\sigma)x$ を s で置き換えると，次の形にできる．ここで，各 $j = i, i+1, \ldots, n$ に対し，$\deg g'_j < \deg h$ である．

$$\exists x \left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 \ (x\text{ は現れない}) \\ & \vdots & \\ u_{m-1} & = & v_{m-1} \ (x\text{ は現れない}) \\ w_1 & \neq & t'_1 \ (x\text{ は現れない}) \\ & \vdots & \\ w_{i-1} & \neq & t'_{i-1} \ (x\text{ は現れない}) \\ h(\sigma)x & = & s \\ g'_i(\sigma)x & \neq & t'_i \\ & \vdots & \\ g'_n(\sigma)x & \neq & t'_n \end{array} \right.$$

σ は自己同型写像なので，σ^{-1} を項の中で使っても問題は起きない．よって，h と g'_j はすべて定数項が 0 でないモニック多項式と仮定してよい．TA_K の公理 3 より，“$\exists x$” をこの式から消去できる． □

命題 3.4 TA_K は完全である．

証明．TA_K が量化記号消去を許すので，すべての閉論理式は量化記号のない閉論理式と同値になる．

TA_K のもとで，σ が線形写像なので，$L_K(\sigma)$ における項において σ を $+$ やスカラー倍の内側に入れて考えてよい．すると，変数のない項において σ は $\sigma^n(0)$ の形でしか現れないと考えてよく，これは 0 に置き換えてよい．すなわち，変数のない項に σ は現れないと考えてよい．

量化記号のない閉論理式は L_K の論理式となり，T_K の完全性より TA_K も完全である． □

定理 3.5 (M,σ) が T_K の generic 自己同型であることの必要十分条件は $(M,\sigma) \models TA_K$. TA_K は T_σ のモデル随伴理論である.

証明. TA_K は T_σ を含むモデル完全理論である. T_σ の任意のモデルは T_σ の存在閉モデルに拡大できる. 命題 3.1 より, それは TA_K のモデルになる. □

4 公理の簡素化

TA_K の公理はもっと簡単にできる.

補題 4.1 (B.H. Neumann) H_i たちをアーベル群とする. $H_0 + a_0 \subset \bigcup_{i=1}^n H_i + a_i$ で $H_0/(H_0 \cap H_i)$ が各 $i > k$ について無限ならば $H_0 + a_0 \subset \bigcup_{i=1}^k H_i + a_i$ となる.

定理 4.2 理論 TA_K は次の 1–3 からなる公理系と同値である:

1. M は無限 K ベクトル空間.
2. σ は M 上の正則写像である.
3. $f(X) \in K[X]$ を定数項が 0 でない 1 次以上のモニック多項式とすると, $\{x \in M : f(\sigma)x = a\}$ は任意の $a \in M$ に対し無限集合である.

証明. 上の公理 3 から TA_K の公理 3 を導けばよい.

$f(X), g_1(X), \ldots, g_n(X)$ を $K[X]$ の要素とし, $f(X)$ は定数項が 0 でない 1 次以上のモニック多項式で, 各 i について $\deg g_i < \deg f$ と仮定する. $a, a_1, \ldots, a_n$ を M の任意の要素とする.

$$\begin{cases} f(\sigma)x &= a \\ g_1(\sigma)x &\neq a_1 \\ &\vdots \\ g_n(\sigma)x &\neq a_n \end{cases}$$

が解 $x \in M$ をもつとする.

各 i について, $f(\sigma)x = a$ と $g_i(\sigma)x = a_i$ は共通解を M でもつと仮定してよい. 補題 3.2 より, 各 i について, g_i を $\gcd(f, g_i)$ で置き換えてよい. したがって, 多項式として $g_i | f$ と仮定してよい.

部分空間 $\mathrm{Ker}\, f(\sigma) \subset M$ の剰余類が $\mathrm{Ker}\, g_i(\sigma)$ たちの有限個の剰余類で覆われていることになる. しかし, 補題 4.1 と次の主張からこれは不可能である.

主張 1 $\mathrm{Ker}\, f(\sigma)/\mathrm{Ker}\, g_i(\sigma)$ は各 i について無限である.

各 i について, $\deg g_i < \deg f$ なので, $f = f_i g_i$ とすると f_i は定数項が 0 でない 1 次以上のモニック多項式になる. 上の公理 3 より, $f_i(\sigma)b = 0$ となる $b \in M$ は無限個ある. そのような b について, $\{x \in M : g_i(\sigma)x = b\}$ は $\mathrm{Ker}\, g_i(\sigma)$ の剰余類で $\mathrm{Ker}\, f(\sigma)$ に含まれるものである. したがって, 主張を得る. □

5 擬極小モデル

この節では TA_K の擬極小モデルを構成する．ここでは体 K は高々可算であると仮定する．

V を可算無限な K ベクトル空間とし，$V^{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Z}$ から V への関数全体とする．$V^{\mathbb{Z}}$ も自然に K ベクトル空間になる．**シフト関数** $\sigma : V^{\mathbb{Z}} \to V^{\mathbb{Z}}$ を $v \in V^{\mathbb{Z}}$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$\sigma(v)(m) = v(m+1)$ で定義する．

定理 5.1 V を可算無限な K ベクトル空間とし，$\sigma : V^{\mathbb{Z}} \to V^{\mathbb{Z}}$ を上で定義したシフト関数とする．すると $(V^{\mathbb{Z}}, +, 0, \sigma)$ は TA_K の擬極小モデルになる．

証明．シフト関数 σ は K ベクトル空間 $(V^{\mathbb{Z}}, +, 0)$ の自己同型写像である．

$\{x \in V^{\mathbb{Z}} : f(\sigma)x = a\}$ が任意の $a \in V^{\mathbb{Z}}$ に対して可算無限になることを示す．すると $(V^{\mathbb{Z}}, +, 0, \sigma)$ は定理 4.2 により TA_K のモデルになり，また，TA_K が量化記号消去を許すことにより，擬極小構造になることもわかる．

$f(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + X^n$ で，$c_0 \neq 0$ と仮定する．

$x, a \in V^{\mathbb{Z}}$ とする．$i \in \mathbb{Z}$ に対し，$x(i)$, $a(i)$ をそれぞれ x_i, a_i と書く．すると，$f(\sigma)x = a$ の必要十分条件は

$$c_0x_m + c_1x_{m+1} + c_2x_{m+2} + \cdots + x_{m+n} = a_m \qquad (*)$$

が各 $m \in \mathbb{Z}$ について成り立つことである．

x_m, x_{m+1}, $\ldots$, $x_{m+n-1} \in V$ が与えられれば，上の式から x_{m+n} が定まる．また，x_{m+1}, $\ldots$, $x_{m+n-1}, x_{m+n} \in V$ が与えられれば，x_m も同じ式から定まる．初期値 x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in V$ を与えれば，$m = 1, 2, 3, \ldots,$ に対して $(*)$ を使って帰納的に x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots$ を定めることができ，同様に $m = 0, -1, -2, \ldots$ に対して $(*)$ を使って帰納的に x_0, x_{-1}, $x_{-2}, \ldots$ を定めることができる．

したがって，$f(\sigma)x = a$ を満たす $x \in V^{\mathbb{Z}}$ は x_1, $\ldots$, x_n に依存して一意に定まる．x_1, x_2, $\ldots$, x_n の値の可能性はちょうど可算無限通りある．したがって，$\{x \in V^{\mathbb{Z}} : f(\sigma)x = a\}$ は可算無限になる．□

6 Morley 階数

この節では，1変数論理式の Morley 階数を計算する．これにより，TA_K の Morley 階数が ω になることがわかる．

定理 6.1 $f(X) \in K[X]$ を定数項が 0 でない 1 次以上のモニック多項式とする．以下，TA_K の巨大モデルの中で考える．

(1) $f(X)$ が $K[X]$ で既約ならば $f(\sigma)x = a$ は強極小である．

(2) $f(X)$ が重複度もこめて k 個の既約因子をもつならば $f(\sigma)x = a$ は Morley 階数 k と Morley 次数 1 をもつ.

(3) TA_K の Morley 階数は ω である.

証明. TA_K が量化記号消去を許し，$g(\sigma)x = b$ の形の論理式が線形部分空間の剰余類を表すので，$g(\sigma)x = b$ の形の式で定義された集合が $f(\sigma)x = a$ で定義される集合をどのように分割するかを調べればよい.

$f(X) \in K[X]$ を 1 次以上の既約なモニック多項式とする．すると定数項は 0 でない．$f(\sigma)x = a \wedge g(\sigma)x = b$ が $f(\sigma)x = a$ で定義される集合の真部分集合を定義するとすると補題 3.2 よりそれは 1 点集合になる．したがって，$f(\sigma)x = a$ は強極小である．これで (1) が示せた.

(2) は $f(X) \in K[X]$ の既約因子の個数に関する帰納法で示す.

$f(X)$ が k 個の既約因子をもち，$k > 1$ とする．$f(X) = f_0(X)f_1(X)$ で $f_0(X)$ が 1 つの既約因子とする．すると $f_1(X)$ の既約因子は $k-1$ 個である.

$f_0(\sigma)x = a$ は強極小である．b_i $(i < \omega)$ を互いに異なる $f_0(\sigma)x = a$ の解とする．$f_1(\sigma)x = b_i$ を $i < \omega$ について考えると，どの 2 つも共通解をもたず，また，帰納法の仮定から Morley 階数が $k-1$ になる．$f_1(\sigma)x = b_i$ ならば $f(\sigma)x = f_0(\sigma)b_i = a$ である．よって，$f(\sigma)x = a$ の Morley 階数は k 以上である.

もし $f(\sigma)x = a$ の定義する集合が定義可能な真部分集合をもてば，補題 3.2 より，それは $f(X)$ の真の因子 $g(X)$ に対する $g(\sigma)x = b$ の形の式のブール結合で定義できる．帰納法の仮定より，$g(\sigma)x = b$ の Morley 階数は k より真に小さい．したがって，$f(\sigma)x = a$ は Morley 階数 k と Morley 次数 1 をもつ. □

参考文献

[1] Z. Chatzidakis, and A. Pillay, Generic structures and simple theories, Annals of Pure and Applied Logic **95** (1998), 71–92.

[2] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, 1993.

[3] M. Itai, and K. Wakai, ω-saturated quasi-minimal models of $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma, 0)$, Math. Log. Quart. **51** (2005), 258–262.

[4] M. Itai, A. Tsuboi and K. Wakai, Construction of saturated quasi-minimal structure, J. Symbolic Logic **69** (2004), 9–22.

[5] H. Kikyo, and A. Pillay, The definable multiplicity property and generic automorphisms, Annals of Pure and Applied Logic **106** (2000), 263–273.