

## 様々な時間の概念が数理モデルに与える影響<sup>1</sup>

The effect on the several time concepts in mathematical models

\* 吉川満

\* 関西学院大学大学院経済学研究科理論経済学専攻

\*Mitsuru KIKKAWA

\* Department of Economics, Graduate School of Economics,  
Kwansei Gakuin University, Nishinomiya 662-8501 JAPAN  
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

This paper examines the effect of "time concept" in Lotka–Volterra prey–predator model. This paper constructs the basic model, shows the population densities are periodic, the limit cycles at steady state. Next, we introduce "time lag" into this model. This paper shows that the population densities are Hopf bifurcation at steady state. This paper examines this effect with nonlinear coupled oscillator, circle map. This paper explains the periodical cicadas using this result.

### 1 はじめに

数理モデルを作る際に、構成している要素の相互作用や性質に着目し、「時間」の問題を疎かにしていたのではないかと。よってモデルの中の方程式の「ステップ」を現実の時間と考えがちである。またモデルの中の構成要素が生物(人間を含む)の場合、モデルで置かれている状況から変化したり、しようとしたりすることがある。本論文ではモデルの中の時間が平衡状態に大きな役割を果たしているということを確認し、その数理的な構造を明らかにすることを目標とする。

特に本論文では数理生物学でよく用いられる Lotka–Volterra 型の被食者–捕食者系を用いて、この問題を考える。一般にこの被食者–捕食者系では各個体数の動態は振動する、リミットサイクルとなることが知られている。他の分野化学反応系では、BZ 反応、経済学では、景気循環などがこのような周期軌道を持つことが知られている。このリミットサイクルとなるものに、各個体が異なった時間で発展していく、またある一定の時間遅れ (time delay) が存在する場合の個体数の動態を考えた。さらには非線形振動子、特に円写像 (circle map) を用いて、どのように異なったタイムスケールが引き込み・同期するのかを考えた。これと今までのモデルを組み合わせることによって、時間の数理的な構造を考察する。さらにはこの理論を用いて、時間に関係している興味深い生物学の研究としてよく知られている「周期ゼミ」の研究を説明する。

またタイムスケールの問題を扱った研究として、吉川、松岡、登坂 [6] がある。これは捕食者  $Y$  が一度再生産する間に被食者  $X$  は  $n$  度再生産を行う、ということを用いて Nicholson–Bailey モデルやそれから派生したモデルに導入した。そこからタイムスケールが安定性に与える影響、遅い変数が早い変数を支配するという、隸属原理が成り立つ、成り立たない場合の違いを考えた。さらには 3 種系にし、タイムスケールが間接効果に与える影響を考えた。本論文と合わせて読むことによって、よりタイムスケールの問題への理解が深まるであろう。

本論文は次のように構成されている。第 2 節では、Lotka–Volterra 型の被食者–捕食者系を構築し、その平衡点がリミットサイクルとなることを考察する。第 3 節では、第 2 節のモデルに時間遅れを導入する。第 4 節では、円写像を用いて、被食者と捕食者のタイムスケールの同期の問題について考え、周期ゼミの話を説明する。第 5 節では、結論を述べる。

<sup>1</sup>本論文は筆者が「新しい生物数学の研究交流プロジェクト 2006」内で企画された数理モデリングコンテストで発表した内容を契機に研究したものであり、発表した内容の補完的な役割を担った論文である。よってその発表を行った研究の共同研究者である松岡功氏、登坂千尋氏に感謝する。ただし本論文にあるすべての誤りは筆者の責任である。

## 2 基本モデル

捕食者は生きるために餌を必要としている。餌が十分あると捕食者の個体数は増加する。その結果餌生物を消費しすぎるようになり、ついには餌生物が減少して、捕食者自身も減少し始めることになる。捕食者の数が十分小さくなると、餌生物の数が増殖によって回復していく。この考えを最も簡単に表したモデルが、次の Lotka-Volterra 型の被食者 - 捕食者モデルである。

連続時間の Lotka-Volterra 型の被食者 - 捕食者モデルでは次のようになる [10]。

$$(2.1) \quad \frac{dX}{dt} = (\varepsilon_X - b_{XY}Y)X, \quad \frac{dY}{dt} = (-\varepsilon_Y + b_{YX}X)Y$$

ただし  $X$  は被食者の個体数,  $Y$  は捕食者の個体数,  $\varepsilon_i, b_{ij}$  ( $i, j = \{X, Y\}$ ) などすべて非負の定数である。ここで種  $X$  は種  $Y$  にとって不可欠の餌であって、種  $X$  がいないときには種  $Y$  の増殖率が負の値  $(-\varepsilon_Y)$  になって死滅する。また捕食によって摂取される被食者の数に比例して捕食者の増殖率が増加する。

このときの平衡点は  $E_{00} = (0, 0)$ ,  $E_{++} = \left(\frac{\varepsilon_Y}{b_{YX}}, \frac{\varepsilon_X}{b_{XY}}\right)$  であることが分かる。このときの共存平衡点安定性は共存平衡点の Jacobi 行列が次のようになるので、

$$J_{E_{++}} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_Y \frac{b_{XY}}{b_{YX}} \\ \varepsilon_X \frac{b_{YX}}{b_{XY}} & 0 \end{pmatrix}$$

固有値が純虚数となり、リミットサイクルとなる。つまりこのとき各個体数は共存平衡状態にあるか、または周期的に振動するかである。このことは Lyapunov 関数 ( $V$ ) を用いても、 $V = \text{一定}$ ,  $\frac{dV}{dt} = 0$ , となるために同様の結論を得ることができる。また寺本 [10] では、共存平衡点が安定となるために、種内競争や捕食者の飽和効果を考慮に入れている。

また以下のモデルのように被食者と捕食者が異なる時間発展の場合であっても、安定性には影響はしない。

$$(2.2) \quad \frac{dX(\tau t)}{d\tau t} = (\varepsilon_X - b_{XY}Y(t))X(\tau t), \quad \frac{dY(t)}{dt} = (-\varepsilon_Y + b_{YX}X(\tau t))Y(t)$$

ただし  $\tau > 1$  とする。

以上をまとめると、次のような命題となる。

**命題 2.1** 連続時間の Lotka-Volterra 型の被食者 - 捕食者モデル (2.1) の共存平衡点はリミットサイクルになる。またタイムスケールが異なる場合 (2.2) でも、(2.1) と安定性は変わらない。

## 3 時間遅れモデル

過去の履歴に対して、影響がある時間遅れがある Lotka-Volterra 型の被食者 - 捕食者モデルを次のように構築する。特にここでは被食者  $X$ , 捕食者  $Y$  はそれぞれ少し前の  $X$  と  $Y$  の個体数に依存して、繁殖する。これを次のように定式化する。

$$(3.1) \quad \frac{dX(t)}{dt} = (\varepsilon_X - b_{XY}Y(t-r))X(t), \quad \frac{dY(t)}{dt} = (-\varepsilon_Y + b_{YX}X(t-r))Y(t)$$

ただし  $r \geq 0$  である。

まず (3.1) がただ 1 つの正の平衡点 (共存平衡点)  $X = X^*$ ,  $Y = Y^*$  を持つと仮定する。すなわち  $X^* = \frac{\varepsilon_Y}{b_{YX}}$ ,  $Y^* = \frac{\varepsilon_X}{b_{XY}}$  とする。次に方程式系 (3.1) の共存平衡点  $E_{++}$  を原点  $(0, 0)$  に平行移動する。すなわち  $x \rightarrow X - X^*$ ,  $y \rightarrow Y - Y^*$  (ただし  $X, Y$  の許容範囲から、 $x + X^* \geq 0$ ,  $y + Y^* \geq 0$  である) とする変換を行うと次のようになる。

$$(3.2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -b_{XY}(x(t) + X^*)y(t-r), \quad \frac{dy(t)}{dt} = b_{YX}(y(t) + Y^*)x(t-r)$$

このときの特性方程式は、

$$(3.3) \quad \det(\lambda I - Ae^{-\lambda r}) = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_Y \frac{b_{XY}}{b_{YX}} e^{-\lambda r} \\ -\varepsilon_X \frac{b_{YX}}{b_{XY}} e^{-\lambda r} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \varepsilon_X \varepsilon_Y e^{-2\lambda r} = 0.$$

いま (3.3) の解は複素平面上のどこに分布するのかを調べる。(3.3) の両辺を  $r$  で微分すると、

$$2\lambda \frac{d\lambda}{dr} + \varepsilon_X \varepsilon_Y (-2r) e^{-2\lambda r} \frac{d\lambda}{dr} + \varepsilon_X \varepsilon_Y (-2\lambda) e^{-2\lambda r} = 0,$$

より

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{\varepsilon_X \varepsilon_Y \lambda e^{-2\lambda r}}{\lambda - \varepsilon_X \varepsilon_Y r e^{-2\lambda r}},$$

ところで  $r=0$  のとき  $\lambda = \pm i\sqrt{\varepsilon_X \varepsilon_Y}$  である。この解の動きを調べると、

$$\left. \frac{d\lambda}{dr} \right|_{\lambda = \pm i\sqrt{\varepsilon_X \varepsilon_Y}} = \frac{\varepsilon_X \varepsilon_Y (\pm i\sqrt{\varepsilon_X \varepsilon_Y})}{\pm i\sqrt{\varepsilon_X \varepsilon_Y}} = \varepsilon_X \varepsilon_Y > 0.$$

よって  $r$  を 0 から微小に増加させると、特性根  $\lambda = \pm i\sqrt{\varepsilon_X \varepsilon_Y}$  は右半平面に飛び出す。また  $r$  が充分小さな正の数であるとき、(3.1) の解軌道は (2.1) の解軌道から少し変化する。このとき上の議論より (3.3) の特性根の中に実部が正となるものがあるから、(3.1) の解軌道は発散することになる。よってこれは  $r > 0$  のとき分岐し、Hopf 分岐である。

次に大域的な手法 (Lyapunov 関数を用いる) を用いて、共存平衡点が大域に漸近安定であるか確認する。この場合 Lyapunov 関数を  $V = x^2 + y^2$  と置く。よってこの Lyapunov 関数の時間よる 1 階微分は次のようになる。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = 2x(t)(-b_{XY}(x(t) + X^*)y(t-r)) + 2y(t)(b_{YX}(y(t) + Y^*)x(t-r)).$$

ここで Lyapunov 関数の形状から、次のことが分かる。

$$V(x(t+s), y(t+s)) \leq V(x(t), y(t)), \quad s \in [-r, 0]$$

また  $W(t) = \sup V(t)$  と置く。

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= 2x(t)(-b_{XY}(x(t) + X^*)y(t)) + 2y(t)(b_{YX}(y(t) + Y^*)x(t)) \\ &= 2x(t)y(t)\{b_{YX}(y(t) + Y^*) - b_{XY}(x(t) + X^*)\} \end{aligned}$$

共存平衡点  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  が大域漸近安定となるための条件は、 $\frac{dW}{dt} \leq 0$  ときである。つまり次の条件を満たすときである。

$$x(t) > 0, y(t) > 0 \text{ のとき, } b_{XY}(x(t) + X^*) > b_{YX}(y(t) + Y^*),$$

$$x(t) < 0, y(t) < 0 \text{ のとき, } b_{XY}(x(t) + X^*) > b_{YX}(y(t) + Y^*),$$

$$x(t) > 0, y(t) < 0 \text{ のとき, } b_{XY}(x(t) + X^*) < b_{YX}(y(t) + Y^*),$$

$$x(t) < 0, y(t) > 0 \text{ のとき, } b_{XY}(x(t) + X^*) < b_{YX}(y(t) + Y^*).$$

しかしこれらの条件は矛盾する。よって共存平衡点  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  が大域漸近安定とはならない。

以上から時間遅れがある場合の微分方程式系の共存平衡点は漸近安定とはならない、ということが局所、大域的な方法から分かった。

さらに (3.4) のモデルを拡張し、 $X, Y$  が異なった時間遅れが存在する場合、つまり  $r$  をそれぞれ  $r_1, r_2$  とし、同様の分析を行うと、Hopf 分岐は起こらない。

**命題 3.1** 時間遅れがある Lotka-Volterra 型の被食者 - 捕食者モデル (3.1) の共存平衡点は Hopf 分岐する。また各微分方程式に時間遅れが存在する場合、時間遅れが存在しない場合と変化しない。

## 4 タイムスケールの導入

この節では結合振動子を用いて、タイムスケールが異なる被食者 - 捕食者系のタイムスケールの引き込み・同期の問題を考える。数学的には円周  $S^1$  上の離散時間力学系を扱う。詳しくは青木 [2]、矢野 [11]、証明は主に Devaney [4] を参考にした。被食者  $X$  と捕食者  $Y$  はそれぞれ固有のタイムスケールを持ち生きているとする。ある一定の関係で相互作用しているとする。その度合いを結合度で表す。よって結合度が大きい場合その相互関係が密であるとし、小さい場合その相互関係が疎であるとする。

ここで  $\phi$  と  $\psi$  を 2 つの振動子の位相とする。それが結合されていないとき ( $K=0$ ) には、それらの運動はトーラス  $T^2$  上に表される。( $P(\phi), P(\psi)$ ) を結合されていない振動子 ( $\phi, \psi$ ) の周期とする。Poincaré 写像の一連の点は  $\phi_n = \phi(t = nP(\psi))$  である。振動子が結合されていないときには、 $\phi_{n+1} - \phi_n = 2\pi \frac{P(\psi)}{P(\phi)}$  で、Poincaré 写像は

$$T\phi \rightarrow \phi + \Phi$$

つまり

$$(4.1) \quad \phi_{n+1} = \phi_n + \Phi, \quad \Phi = 2\pi \frac{P(\psi)}{P(\phi)}$$

である。振動子の間に結合があれば、この写像は

$$(4.2) \quad \phi_{n+1} = \phi_n + \Phi + F(\phi_n) \equiv \phi_n + t(\phi_n)$$

と修正される。ここで  $F(\phi)$  はすべての  $\phi$  について、 $F(\phi + 2\pi) = F(\phi)$  を満たさなければならない。 $\phi$  と  $\phi + 2\pi$  は同一の位相点であるから、 $\phi_n$  の値は

$$(4.3) \quad T\phi \rightarrow \phi + \Phi + F(\phi) \equiv \phi + t(\phi)$$

によって次々と作られる。

写像 (4.3) のよく用いられる形は上の結合振動子のある近似になるが、

$$(4.4) \quad \phi_{n+1} = \phi_n + \Phi - K \sin(\phi_n)$$

である。次のように式変形すると、

$$(4.5) \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \left(\frac{K}{2\pi}\right) \sin(2\pi\theta_n), \quad \text{ただし } \phi_n = 2\pi\theta_n, \Phi = 2\pi\Omega$$

これは円写像 (circle map) として知られている。この2次元円写像は周期運動をする系の外力下での振る舞いを単純化したモデルとして知られている。

この円写像は振動比  $\Omega$  が有理数か無理数でこの力学系の性質は大きく変化する。 $\Omega = \frac{p}{q}$  (互いに素な整数  $p, q$ ) と表せれば、すべての  $x \in S^1$  は周期  $q$  をもつ周期点である。

$$f^q(\theta) = \theta + 2q\pi \left(\frac{p}{q}\right) = \theta + 2p\pi = \theta \pmod{2\pi}$$

であるから、 $q$  回の写像の後初期点  $\theta$  に戻る。さらに写像を繰り返しても  $q$  回毎に  $\theta$  に戻る。) 一方無理数のとき、任意の  $x \in S^1$  の正の軌道  $\{R_\Omega^n(x); n = 0, 1, 2, \dots\}$  は  $S^1$  で稠密 (dense) であり<sup>2</sup>、また  $R_\Omega: S^1 \rightarrow S^1$  は通常の Lebesgue 測度に関してエルゴード的であることが容易に推測することができる。

向きを保つ同相写像  $f: S^1 \rightarrow S^1$  に対して、以下で回転数  $\rho(f)$  を定義する。そのためには写像の持ち上げの概念が必要となる。まず次の写像を考える。

実数  $x \in \mathbb{R}$  を  $\theta \in S^1$  に移す写像を  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  とする。 $\pi$  は

$$\exp(2\pi ix) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$$

によって写像  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  を定義する。この意味で

$$\theta = \pi(x) = 2\pi x \pmod{2\pi}$$

なる関数  $\pi(x)$  を導入する。

そこでこの写像  $\pi$  を用いて、持ち上げの定義を行う。

**定義 4.1**  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$\pi \circ F = f \circ \pi$$

を満たすとき、 $f: S^1 \rightarrow S^1$  の持ち上げ (lift) と呼ばれる。

$x$  が整数のときには  $\pi(x)$  はすべて  $\theta = 0$  であり、整数だけ異なる  $x$  はすべて同じ  $\theta$  があたえるから、 $\pi(x)$  は1対1写像ではない。すなわち  $\pi$  と  $f$  との対応は多対1である。

直感的には  $f: S^1 \rightarrow S^1$  の持ち上げ  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は次のように与えられる。 $S^1$  を閉区間  $[0, 1]$  の両端を同一視した空間  $[0, 1] \sim$  とみなして  $f$  のグラフを正方形  $[0, 1] \times [0, 1]$  の部分集合として考える。この正方形を平面  $\mathbb{R}^2$  内で  $(n, m)$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$  だけ平行移動したものは全平面  $\mathbb{R}^2$  を埋め尽くす。このとき  $f$  の「グ

<sup>2</sup>Jacobi の定理  $\omega$  が無理数であれば、 $f(\theta) = \theta + 2\pi\omega$  の軌道は、単位円周上  $S^1$  を稠密 (dense) に覆う。  
証明  $\theta \in S^1$  とする。任意の異なる2つの整数  $n, m \in \mathbb{Z}$  に対して、 $f^n(\theta) \neq f^m(\theta)$  である。なぜなら、 $f^n(\theta) = f^m(\theta)$  とすると  $\theta + 2n\pi\omega = \theta + 2m\pi\omega$  より、 $(n - m)\omega \in \mathbb{Z}$  であるから、 $n = m$  でなければならない。

ある  $\varepsilon > 0$  が与えられているとき、無理数  $\omega$  に十分近い有理数  $\frac{m}{n} < 1$  を選べば、 $|f^n(\theta) - f^m(\theta)| < \varepsilon$  とすることができる。したがって、 $k = n - m$  と置くと、 $|f^k(\theta) - \theta| < \varepsilon$  である。また、 $f(\theta) = \theta + 2\pi\omega$  は  $S^1$  において長さを保存する。すなわち、

$$f(\theta + \alpha) - f(\theta) = \alpha$$

こうして  $\theta, f^k(\theta), f^{2k}(\theta), \dots$  は  $S^1$  を  $\varepsilon$  より小さい長さの弧に分割している。 $\varepsilon$  は任意でいくらでも小さくとれるから、軌道は稠密である。(証終)

ラフ」は正方形の境界を越えても隣の正方形内の「グラフ」とつながり途中でとぎれることはない。こうして得られたグラフの和集合の1つの連結成分をグラフとする写像が  $f: S^1 \rightarrow S^1$  の持ち上げ  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  である (図1)。

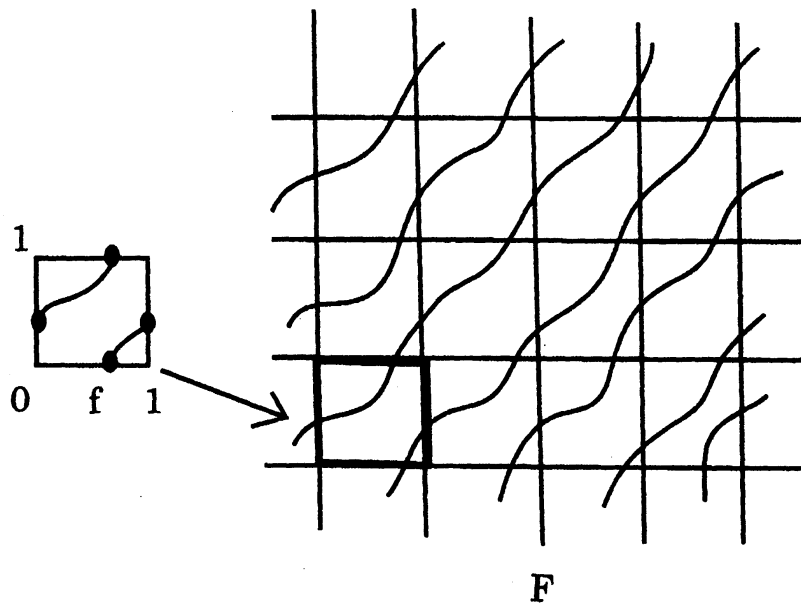


図1: 持ち上げ

ここで円写像 (4.5) が持ち上げとなる写像を考える。

$f(\theta) = \theta + 2\pi\Omega - K \sin \theta$  のとき,  $F(x) = x + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x)$  は持ち上げであることは次のようにして示される:

$$\pi(F(x)) = \pi\left(x + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x)\right) = 2\pi x + 2\pi\Omega - K \sin(2\pi x) = f(2\pi x) = f(\pi(x)).$$

ここで持ち上げの性質を記す。

注意 4.2 与えられた  $f: S^1 \rightarrow S^1$  に対して持ち上げは無数にあるが、違いは整数である。すなわちいま一つの持ち上げを  $F(x)$  とすると,  $F(x) + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) も持ち上げである。すなわち

$$\pi(F(x) + k) = \pi(F(x)) = f(\pi(x))$$

となる。また  $F(x)$  が持ち上げならば,  $F(x+k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) も持ち上げである。すなわち

$$\pi F((x+k)) = f(\pi(x+k)) = f(\pi(x))$$

注意 4.3  $F(x+k)$  は  $k=0$  のとき  $F(x)$  に等しいから,  $F(x+1) = F(x) + 1$  でなければならない (同様に一般に  $F(x+k) = F(x) + k$  である。) したがって  $F(x+1) - (x+1) = F(x) - x$  が成り立つ。すなわち  $F(x) - x$  は周期1の周期関数である, 一方  $F^n(x)$  は  $f^n(\theta)$  の持ち上げだから,  $F^n(x) - x$  は周期1の周期関数である。ただし  $id(x) = x$  は恒等写像である。同様に  $F^n$  は  $f^n$  の持ち上げであるから  $F^n - id$  も周期1の周期関数である。

この持ち上げは同相写像でのみ定義された。よっていま考えている円写像 (4.5) で,  $K=0$  のとき, この写像は回転写像  $T_\Omega$  になる。  $0 \leq K < 1$  のとき,  $f$  は  $S^1$  の微分同相写像である。  $K=1$  のときは, この写像は同相写像でしかない。  $K > 1$  のとき, この写像はもはや1対1でない。よって  $K > 1$  のときはこの持ち上げの概念を利用することができない。

$K > 0$  に対する写像  $f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta)$  の挙動について考える。この写像の不動点  $\theta$  は, 次の関係を満足する。

$$\sin(2\pi\theta) = \frac{2\pi\Omega}{K}$$

したがって区間  $0 \leq 2\pi\theta \leq 2\pi$ , つまり  $0 \leq \theta \leq 1$  のとき  $\sin(2\pi\theta)$  の値域から, 不動点は次の範囲内で次のような個数存在することが分かる.

(i)  $K = 2\pi\Omega$  のとき, 1 個, (ii)  $K > 2\pi\Omega$  のとき, 2 個, (iii)  $K < 2\pi\Omega$  のとき, 0 個.

この不動点の安定性を考える. 不動点の近傍から出発した写像は不動点に近づく場合と遠ざかる場合がある. 近づくような不動点をアトラクタ (attractor), 遠ざかるような不動点をリペラ (repellor) という. 不動点が存在する場合  $\left(\frac{2\pi\Omega}{K} < 1\right)$  から,  $y = f(\theta)$  と  $y = \theta$  との交点 (不動点) における  $f(\theta)$  の勾配によって安定, 不安定が決まることがわかる. すなわち

$$(4.6) \quad f'(\theta) = 1 - K \cos(2\pi\theta)$$

であるから

$|f'(\theta)| < 1$  のとき, アトラクタ,  $|f'(\theta)| > 1$  のとき, リペラ

である.  $|f'(\theta)| \neq 1$  のときを称してこの交点は双曲型 (hyperbolic) であると言う. つまり 2 つの不動点は双曲型であり, 1 つはアトラクタで, もうひとつはリペラである. つまり  $\theta = \frac{1}{4}$  におけるサドルノード分岐 (saddle-node bifurcation) で生じる. この不動点は安定 (アトラクタ), 不安定 (リペラ) な 2 つの不動点に分かれて  $\Omega$  が増加するとともに, 逆方向に単位円をまわる. 最後に 2 つの点は  $\theta = \frac{3}{4}$  におけるもう 1 つのサドルノード分岐で合体し, そして消失するということが分かる.

次に向きを保つ同相写像  $f: S^1 \rightarrow S^1$  に対して,  $S^1$  上の点が  $f$  によって移動した円周に沿った距離の平均値を表す量として,  $f$  の回転数 (rotation number) が定義される. 回転数とは 0 と 1 の間に値をとり, その数が有理数であるか否かによって, 同相写像の振る舞いを特徴付けている.

定義 4.4  $f: S^1 \rightarrow S^1$  は向き保存の同相写像であって,  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $f$  の持ち上げとして,

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x) - x|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n}$$

と定める. また  $f$  の回転数 (rotation number)  $\rho(f)$  は  $f$  の任意の持ち上げに対する  $\rho_0(F)$  の小数部分である. すなわち  $\rho(f)$  は  $\rho_0(F) - \rho(f)$  が整数となるように  $[0, 1)$  内に一意的に定まる数である.

この回転数の定義の整合性をいうには, 次を確かめる必要がある.

#### 系 4.5

- (i)  $\rho_0(F)$  の定義における極限が存在する.
- (ii)  $\rho_0(F)$  が点  $x \in \mathbb{R}$  の取り方によらない.
- (iii)  $\mathbb{Z}$  による法をとった  $\rho(F)$  が持ち上げ  $F$  の取り方によらない.

証明 付録.

例 4.6 系 4.5 について, 明示的にその例を示す.

系 4.5 (ii) について, 例えば  $K = 0$  のとき,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + n\Omega}{n} = \Omega$$

となるので, 点  $x$  の取り方によらない.

系 4.5 (iii) について,  $f(\theta)$  の持ち上げを  $F(x)$  とすれば,  $F(x+k) = F(x) + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (注意 4.3) も持ち上げであるから,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x+k)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) + nk}{n} = \Omega + k$$

となる.

この性質を用いることによって, 次の命題を証明する.

命題 4.7 写像  $f$  が周期点をもてば、 $\rho(f)$  は有理数であり、周期点をもたないときは無理数である。

証明 付録.

今までが円写像を分析するための準備であった。ここで円写像:  $F_{\Omega, K}(x) = x + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x)$  を取り上げる。

$\Omega_1 > \Omega_2$  ならば、すべての  $x \in \mathbb{R}$  について

$$F_{\Omega_1, K}(x) > F_{\Omega_2, K}(x)$$

となることがわかる。これより

$$F_{\Omega_1, K}^n(x) > F_{\Omega_2, K}^n(x)$$

を得る。したがって  $\rho_0(F_{\Omega_1, K}) \geq \rho_0(F_{\Omega_2, K})$  となる。ゆえに  $\rho_0$  は  $K$  を固定することに  $\Omega$  の非減少関数である。さらに  $\rho$  は  $\Omega$  に関して連続的に変化する。  $K \neq 0$  を固定し、 $f_\Omega = f_{\Omega, K}$  を考える。

$\rho(f_{\Omega_0}) = \frac{p}{q}$  が有理数であるとする。命題 4.7 より  $f_{\Omega_0}$  は周期  $q$  の周期点をもつことになる。ゆえにある整数  $k$  について

$$F_{\Omega_0}^q(x_0) = x_0 + k$$

となるような  $x_0 \in \mathbb{R}$  が存在する。

実際  $k = p$  である。  $f_\Omega$  の回転数が  $\frac{p}{q}$  となるような、 $\Omega_0$  を含む  $\Omega$  の区間が存在することを示そう。これを見るために  $F_{\Omega_0}^q$  のグラフを考える。これは直線  $y = x + k$  と点  $(x_0, x_0 + k)$  で交わる。

$$(F_{\Omega_0}^q)'(x_0) \neq 1$$

であれば陰関数定理より、 $\Omega$  を含む開区間  $W$  が存在し、 $\Omega \in W$  であれば各  $F_\Omega^q$  は直線  $y = x + k$  を貫通することが分かる<sup>3</sup>。よって  $F^q(g(\Omega)) = g(\Omega) + k$ 、 $\Omega \in W$  となり、区間が存在することが分かった。

一方  $(F_{\Omega_0}^q)'(x_0) = 1$  ならば、 $F_{\Omega_0}$  は解析的であるから、任意の  $x$  に対して

$$\begin{aligned} F_{\Omega_0}^q(x_0 + x) &= F_{\Omega_0}^q(x_0) + (F_{\Omega_0}^q)'(x_0)x + \frac{(F_{\Omega_0}^q)''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{(F_{\Omega_0}^q)^{(j)}(x_0)}{j!}x^j + \dots \\ &= x_0 + k + x + \frac{(F_{\Omega_0}^q)''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{(F_{\Omega_0}^q)^{(j)}(x_0)}{j!}x^j + \dots \end{aligned}$$

と Taylor 展開することができる。これから  $F_{\Omega_0}^q$  は恒等的に  $y = x + k$  に等しくないことが分かる。よってある  $j \geq 2$  があって  $(F_{\Omega_0}^q)^{(j)}(x_0) \neq 0$  である<sup>4</sup>。

接し方が奇数次の接し方と偶数次の接し方が存在する。  $j$  が奇数であれば、 $F_{\Omega_0}^q(x_0 + x)$  のグラフは  $x = 0$  において直線  $y = x + k$  を  $(0, k)$  で通過する。したがって  $\Omega_0$  の近くのすべての  $\Omega$  に対して、 $(F_{\Omega_0}^q)^{(j)}(x_0) \neq 0$  であるから、 $F_\Omega^q(x_0 + x)$  のグラフは  $x = 0$  の近くで  $y = x + k$  のグラフを通過する。  $j$  が偶数ならば、 $x_0$  で  $F_{\Omega_0}^q(x_0 + x)$  は  $y = x + k$  と点  $(0, k)$  で交わり、 $F_{\Omega_0}^q(x_0 + x)$  のグラフは上に凸であるか、または下に凸である。よって  $F_\Omega^q(x_0 + x)$  のグラフは  $\Omega_0$  に十分近い  $\Omega < \Omega_0$ 、または  $\Omega > \Omega_0$  に対して  $y = x + k$  と交わる。このようにしてなる有理数  $\frac{p}{q}$  に対して、 $\rho(f_\Omega) = \frac{p}{q}$  を満たす  $\Omega$  の全体は空でない開区間を含む。

一方  $\rho(f_\Omega)$  が与えられた無理数であれば、 $\Omega$  は一意的に存在する。このことは  $f_\Omega$  が  $C^2$  級であることから、 $f_\Omega$  は無理数回転の写像と位相共役である<sup>5</sup>。よって  $\rho(f_\Omega)$  が無理数であれば、 $\Omega$  は一意的に定まる。

以上をまとめると、次のような命題となる。

<sup>3</sup>実際  $H(\Omega, x) = F_\Omega^q - (x + k)$  とおくと、 $H(\Omega_0, x) = 0$  であって、 $\Omega_0$  を固定して  $H(\Omega_0, x)$  を  $x$  の関数として、 $x$  の微分を計算すると

$$\frac{d}{dx} H(\Omega_0, x_0) = \frac{d}{dx} F_{\Omega_0}^q(x_0) - 1 \neq 0$$

ゆえに  $\Omega \in W$  に対して  $C^1$  級関数  $g: W \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して、すべての  $\Omega \in W$  に対して、 $H(\Omega, g(\Omega)) = 0$  が成り立つ。

<sup>4</sup>そうでないとすると、 $F_{\Omega_0}^q(x_0 + x) = x_0 + x + k$ 、 $x \in \mathbb{R}$  となり矛盾を得る。

<sup>5</sup>Denjoy の定理  $f: S^1 \rightarrow S^1$  は周期点をもたない  $C^1$  微分同相写像であり、 $f$  の微分が有界変動であるとする。このとき  $f$  の回転数  $\alpha = \rho(f)$  は無理数であり、同相写像  $h: S^1 \rightarrow S^1$  が存在して  $h \circ f = R_\alpha \circ h$  を満たす。すなわち  $f$  と  $R_\alpha$  は位相共役である。ここに  $R_\alpha$  は  $S^1$  の  $\alpha$  回転写像  $R_\alpha(x) = e^{2\pi i \alpha x}$  である。

命題 4.8 このように各有理数  $\frac{p}{q}$  に対して内点をもつ区間  $W$  (等位集合 (level set)) が存在し,  $\Omega \in W$  に対して  $\rho(f_\Omega) = \frac{p}{q}$  が成り立つ. 一方  $\rho(f_\Omega)$  が与えられた無理数になるような  $\Omega$  がただ 1 つ存在する. またこの  $\Omega$  領域は  $(f_{\Omega_0, K}^q)'(\theta_0) \neq 1$  (横切る) ならば,  $\Omega_0$  より大きい方 ( $\Omega > \Omega_0$ ) と小さい方 ( $\Omega < \Omega_0$ ) の両側にある.  $(f_{\Omega_0, K}^q)'(\theta_0) = 1$  のときは  $\theta_0$  での  $y = \theta + 2\pi\Omega_0$  との接し方により両側または片方にある. すなわち交点  $f_{\Omega_0, K}^q(\theta)$  が奇数次の接し方をすれば両側, 偶数次で上から凸に接すれば大きい方, 下から凸に接すれば小さい方である.

この  $\rho(f_\Omega)$  は Cantor-Lebesgue 関数として知られている関数の一例である. これは有理数の回転数に対応する区間では定数であるが至るところ連続である. このグラフは「悪魔の階段」(devil staircase)として知られている. 平らに見える部分が引き込み・同期していることに対応した周期点アトラクタの平均回転数であり, これはまた Farey 数列<sup>6</sup> とみることもできる.

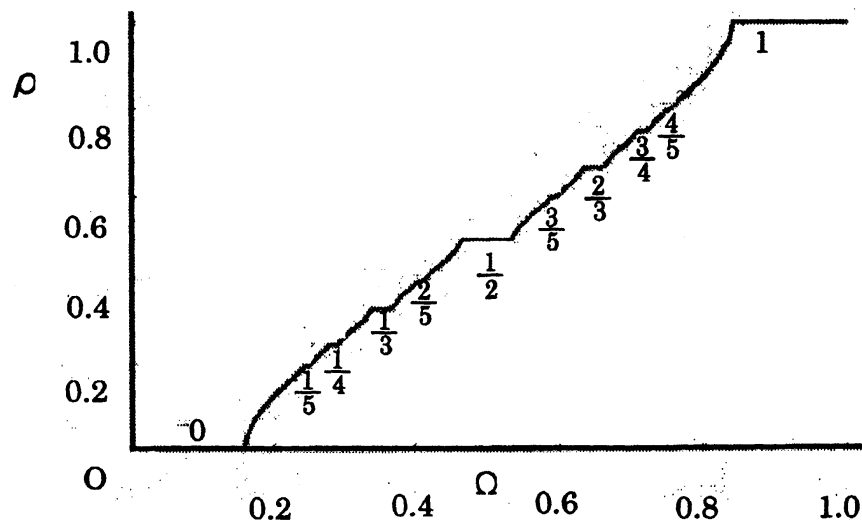


図 2: 悪魔の階段

ここで具体的に  $\rho = \frac{1}{2}$  について, これらの等位集合を図示するために, (4.4) と (4.6) から

$$2\pi = 2\Phi - K \sin \phi - K \sin(\phi + \Phi - K \sin \phi)$$

$$1 = (1 - K \cos \phi)(1 - K \cos(\phi + \Phi - K \sin \phi))$$

を得る.  $\Phi$  と  $(\sin \phi, \cos \phi)$  を  $K$  のべきに展開してすこし計算をすれば, 関係式

$$(4.7) \quad \Phi = \pi \pm \left(\frac{K^2}{4}\right) + O(K^4)$$

を得る.  $K = 1$  について, 実際の境界値は  $\Phi = \pi \pm 0.23237 \dots$  (Arnold [3]) であるが, 上の結果では  $\pi \pm 0.25$  である. Arnold は同様の計算により, 等位集合  $\rho = \frac{1}{3}$  の境界値は

$$(4.8) \quad \Phi = \frac{2\pi}{3} + \frac{3^{1/2}}{12} K^2 \pm \frac{7^{1/2}}{24} K^3 + O(K^4)$$

であることを報告している. 一般に  $\rho = \frac{p}{q}$  については

<sup>6</sup>Farey 数列  $F_n$  は  $0 \leq a < b \leq n$  で  $a$  と  $b$  が互いに素な分数  $a/b$  からなり, これを大きき順に並べたものである. 例えば  $F_1 \sim F_5$  は次のようになる.

$F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ ,  $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ ,  $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$ ,  $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ ,  $F_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$



$$\Phi = \frac{2\pi p}{q} + O(K^{n-1})$$

であるが, (4.7) のように主要項が消えることがある. ともかく等位集合は大きな  $q$  の値においては非常に狭い.  $\rho$  の無理数値については 0 でない測度が残るのは  $q$  の増加につれ等位集合の範囲が急激に縮小するからである. これらの構造は Arnold の舌 (Arnold Tongue) と呼ばれている.

2つの連成振動子の振動数比が有理数ならば, 駆動力と「隷属している」振動子の結合は共鳴の一種のためにとりわけ効率的である. すなわち駆動体の  $q$  サイクル毎に同じ物理的状況が支配するので, エネルギー伝達効果が共鳴的仕方で強まる機会を持つ.  $q$  が小さな整数ならば, 当然この共鳴効果は強くなる. 大きな分母  $q$  を持つ有理数の振動数比では当然このような共鳴効果は相対的に弱いことが分かる. つまり被食者のタイムスケールが早いとき, より同期しやすく, 捕食されやすい. 被食者のそれが遅いとき, 同期しにくく, 捕食されにくくなることが分かる.

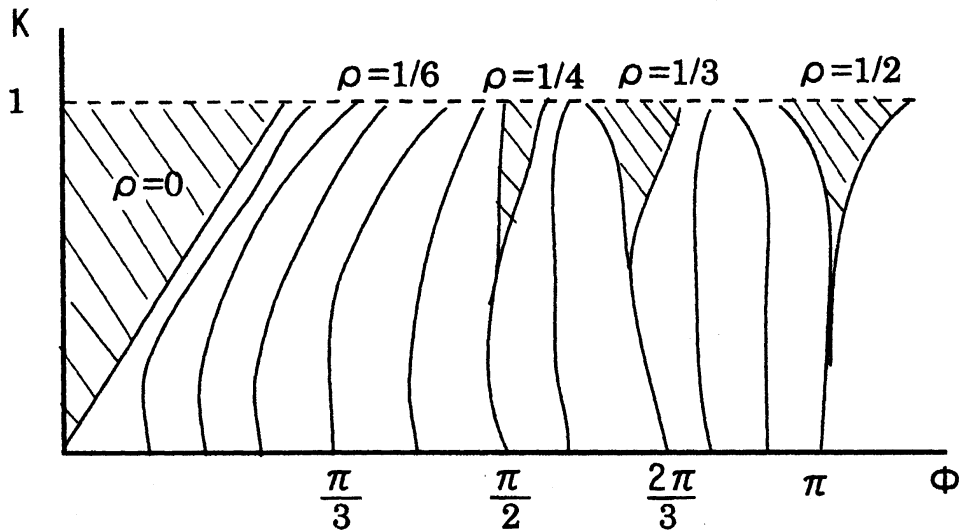


図 3: Arnold の舌, 斜線部が同期を示している.

$K > 1$  の場合のとき, この場合は同相写像ではない. 周期倍加分岐列が他の多くの分岐とともに生じる. この場合解析的に分析することは困難であり, また考察の対象と異なる本論文ではでは省略する. このときの研究は蔵本, 森 [7] を参照されたい.

#### 4.1 周期ゼミとの関係

周期数の比は Farey 数列で表された. Farey 数列で「最小公倍数」が大きいのは, 連分数ですべてが 1 の場合である. 仮に連分数ですべてが 1 の場合, 黄金比 (Golden Mean) の逆数  $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\dots$  に近づく.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 \dots}}}}$$

この黄金比の逆数は黄金トーラス (golden torus) と呼ばれ, 最も頑健さ (robustness) を持っていることやカオスが発生する臨界状態であることで知られている [7]. しかし前節の議論から無理数の場合は排除され, 有理数でなければならない. よって Farey 数列において最小公倍数が最も大きい関係, 連分数ですべてが 1 に近い場合, 結合振動子系において最も頑健さを持っていると分かる.

このことを生物学の例で考えると、周期ゼミ (periodical cicadas) [8] の繁殖周期の話の説明していると考えられる。周期ゼミの繁殖周期は主に 13 年ないし 17 年であり、12, 14, 15, 16, 18 年とは決してならない。その理由として興味深い推測が多々なされている。13 と 17 とは素数だが、それ以外は素数ではない。仮に捕食者のライフサイクルが 2 から 5 年だとすると、両周期の最小公倍数を考えると、ゼミと捕食者の周期が一致することはほとんどない [5]。このように被食者であるゼミは自らの種を守るために、捕食者のタイムスケールと一致しないようなタイムスケールで生きていると考えられる<sup>7</sup>。我々のモデルはこのことを説明していると言えるであろう。

## 5 結論

ここで第 4 節との関係で第 2 節、第 3 節を振り返ると、第 2 節では、結合度が一定の結合度  $K_0$  を持っており、同じタイムスケール ( $\Omega = 1$  か  $\frac{1}{T}$ ) であった。このときの個体群動態はリミットサイクルであった。第 3 節では、結合度が一定の結合度  $K_0$  を持っており、異なるタイムスケール ( $\Omega \neq 1$ ) の場合、第 2 節と同じ結果となった。第 4 節では、個体群動態は考えず、それぞれが持っている固有の時間がどのような場合に同期するのか、どのような周期解となるのかを考えていたが、第 2 節、第 3 節から個体群動態はリミットサイクルであることが分かる。ただしタイムスケールは同期する場合や周期比が 1 対 2 となるなどしている。

以上より被食者 - 捕食者のモデルで、様々な時間の概念を取り上げたが、結局はリミットサイクル、周期軌道となった。しかしそのリミットサイクルになるが、被食者、捕食者は自らタイムスケールを変更させる、その中で被食者が最も捕食されにくい関係、最小公倍数が最大となる関係は、黄金比に最も近い関係であることが分かった。

## 付録

系 4.5 の証明 まず (iii) について  $\tilde{F}$  を  $f$  のもう 1 つの持ち上げとすると、適当な整数  $k$  をとれば  $\tilde{F}(\tilde{x}) = F(\tilde{x}) + k$  が成立する。 $f$  は向きを保つ同相写像であるから  $F(\tilde{x}+1) = F(\tilde{x}) + 1$ ,  $\tilde{F}(\tilde{x}+1) = \tilde{F}(\tilde{x}) + 1$  が成り立ち、これより  $(\tilde{F})^2(\tilde{x}) = \tilde{F}(F(\tilde{x}) + k) = \tilde{F}(F(\tilde{x})) + k = (F)^2(\tilde{x}) + 2k$ 。同様にして、自然数  $n$  に対して  $(\tilde{F})^n(\tilde{x}) = (F)^n(\tilde{x}) + nk$  であり、 $\rho_0(\tilde{F}) = \rho_0(F) + k$  が成立する。よって  $\rho_0(\tilde{F}) = \rho_0(F) \pmod{Z}$ 。

次に (ii) について、 $F$  の  $n$  回の繰り返し  $F^n$  も  $F^n(\tilde{x}+1) = F^n(\tilde{x}) + 1$  を満たすから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\tilde{x}+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\tilde{x})+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\tilde{x})}{n}$$

であり、極限値は初期値  $\tilde{x}$  を整数分平行移動しても変わらない。よって  $|\tilde{x} - \tilde{y}| < 1$  なる  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$  について極限の一致をいえばよい。ここで  $\tilde{x} < \tilde{y} < \tilde{x} + 1$  とすると、 $F^n$  が狭義単調増加であることから  $F^n(\tilde{x}) < F^n(\tilde{y}) < F^n(\tilde{x}+1) = F^n(\tilde{x}) + 1$ 。したがって  $|(F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}) - (F^n(\tilde{y}) - \tilde{y})| \leq |\tilde{\psi}^n(\tilde{x}) - \tilde{\psi}^n(\tilde{y})| + |\tilde{x} - \tilde{y}| < 2$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\tilde{y}) - \tilde{y}}{n}.$$

最後に (i) について、持ち上げ  $\tilde{F}$  と初期値  $\tilde{x}$  を決め、 $a_n = F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}$  とおく。このとき  $a_{n+m} = F^{n+m}(\tilde{x}) - \tilde{x} = (F^{n+m}(\tilde{x}) - F^m(\tilde{x})) + (F^m(\tilde{x}) - \tilde{x})$  である。第 1 項  $F^{n+m}(\tilde{x}) - F^m(\tilde{x})$  は初期値  $F^m(\tilde{x})$  に対する " $a_n$ " に他ならないから、(ii) の証明から  $F^{n+m}(\tilde{x}) - F^m(\tilde{x})$  と  $a_n$  との差は 2 より小さい。すなわち  $a_{n+m} \approx a_n + a_m$  と書いたときの誤差は 2 未満。したがって  $a_{nm} \approx a_{(n-1)m} + a_m \approx \dots \approx na_m$  の誤差は  $2n$  未満。これより  $\left| \frac{a_m}{m} - \frac{a_n}{n} \right| < 2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$  を得る。したがって数列  $\frac{a_n}{n} = \frac{\tilde{\psi}^n(\tilde{x} - \tilde{x})}{n}$  は Cauchy 列であり、収束を持つ。(証終)

命題 4.7 の証明  $f$  が周期  $q$  の周期点をもてば、その持ち上げ  $F$  の回転変換  $\rho(F)$  は有理数である。なぜ

<sup>7</sup>なぜ素数の繁殖周期となるのかという理由について、種内競争を避けるための戦略という意見もある。ここではタイムスケールの観点のみで議論するためにこの説を排除した。

なら,

$$F^q(x) = x + p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

したがって

$$F^{jq}(x) = x + jp, \quad j \in \mathbb{Z}$$

回転変換は

$$\rho(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{jq}}{jq} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x + jp}{jq} = \frac{p}{q}$$

ここで  $0 \leq \rho < 1$  より  $0 \leq p < q$  である. したがって,  $\rho(F)$  が無理数ならば,  $f$  は周期点を持たない.

逆に  $f$  が周期点を持たなければ,  $\rho(F)$  は無理数である. 例えば無理数  $\omega$  をもつ推移写像  $f(\theta) = \theta + 2\pi\omega$  は周期点を持たないし,  $\rho = \omega$  は無理数である. いま  $f$  が周期点を持たず,  $\rho(F)$  が有理数であったと仮定する. すなわち  $\rho(F) = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ). 故に,  $\rho(F^q) = q\rho(F) = p < 1$  より,  $\rho(F^q) = 0$ . これは  $F^q$  が無理数であるのは  $f$  が周期点を持たないときに限る. (証終)

## 参考文献

- [1] Abraham, Ralph H. and Christher D. Shaw: *Dynamics – The Geometry of Behavior Part I, II, III*, (邦訳) 東保光彦 (訳) 「図解カオス入門 準備編, 展開編」現代数学社, 1995 年.
- [2] 青木統夫: 「力学系・カオス – 非線形現象の幾何学的構成」共立出版, 1996 年.
- [3] Arnold, V. I.: "Small Denominators I: Mappings of the Circumference to Itself," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 25, No. i, pp. 21-86 (1961), *American Mathematical Society translations Series*, 2, 46(1965), pp.213-284.
- [4] Devaney, Robert, L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, Addison Wesley, 1989, (邦訳) 後藤憲一, 石井豊, 木坂正史, 国府寛司, 新居俊作 (共訳) 「カオス力学系入門 第2版」共立出版, 2003 年.
- [5] Gould, Stephen Jay: *Ever Since Darwin: Reflections in Natural History*, Penguin Books, 1977, (邦訳) 浦本昌紀, 寺田鴻 (共訳) 「ダーウィン以来 – 進化論への招待」早川書房, 1995 年.
- [6] 吉川満, 松岡功, 登坂千尋: 「タイムスケールの違いが個体群動態に及ぼす影響」京都大学数理解析研究所講究録, 本書所収.
- [7] 蔵本由紀, 森肇: 「散逸構造とカオス」岩波書店, 2000 年.
- [8] May, Robert, M.: "Periodical cicadas," *Nature*, Vol. 277(1, February 1979) pp. 347-349.
- [9] 内藤敏機, 日野義之, 原惟行, 宮崎倫子: 「タイムラグをもつ微分方程式」牧野書店, 2002 年.
- [10] 寺本英: 「数理生態学」朝倉書店, 1997 年.
- [11] 矢野公一: 「岩波講座現代数学の基礎 力学系 2」岩波書店, 1998 年.