数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 65-74

非線形 Schrödinger 方程式の定在波解の安定性

北海道大学・理　福泉麗佳 (Reika Fukuizumi)
Department of Mathematics, Hokkaido University

1. 序

この講演では，次の非線形 Schrödinger 方程式を考える．

$$i\partial_t u = -\Delta u - V(x)|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

ここで u は (x,t) の複素数値関数, $\Delta = \Sigma_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$, p は $H^1(\mathbb{R}^n)$ の劣 Sobolev 臨界, すなわち $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ で, $n \geq 3$ のときは, $p < 1 + 4/(n-2)$ とする．また，この章では $V(x) \equiv 1$ とする．

$\omega > 0$ に対して、次の半線形楕円型方程式

$$-\Delta\psi + \omega\psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

の非自明解 $\psi_\omega(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ が存在することが知られており ([2, 29]), ここで, $u_\omega(x,t) = e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ とおくと $u_\omega(x,t)$ は (1) を満たす．以後, このような形の解を定在波解と呼ぶ．次が成立するときに定在波解 $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ は安定であるという．

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n} \|u_0 - \psi_\omega(\cdot + y)\|_{H^1} < \delta \Longrightarrow$$
$$\sup_{t>0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n} \|u(t) - e^{i\theta}\psi_\omega(\cdot + y)\|_{H^1} < \varepsilon. \tag{4}$$

定在波解が安定でないとき, 不安定であるという．定在波解のように時間に複雑に依存することなく, 空間に局在的に存在するような形 ((3) の解は空間遠方で指数関数的に減衰する) の解は, 数値実験でも観測がしやすく, 波動現象においても, 同じようなパターンの波のうちで安定なものによって現象を捉えることができるのではないかという考え方があることから, 定在波解の安定性を数学的に解析することは重要である．

定在波解が安定であるというのは, 初期状態 u_0 が $\psi_\omega(x)$ に近ければ, 解 $u(x,t)$ はすべての $t > 0$ において存在し, 同じ距離に関して $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ に近いことを意味するが, (1) は Gauge 変換と平行移動に関して不変なので, 初期データを定在波解の近くから取っても, 位相部分と空間変数の移動分だけ定在波解からずれることが起きる．この場合も波の基本

的形状は変わらないので，安定概念として扱いたいことから上を安定の定義とし，特に軌道安定と呼ぶ．

完全可積分となる $n = 1$ かつ $p = 3$ の場合は，逆散乱法を用いて具体的に調べることが出来る ([17])．これ以外の場合に対して，1980年代前半に，Cazenave and Lions [5], Weinstein [32, 34], Shatah [27], Shatah and Strauss [28] らが，(3) の基底状態解の変分法による特徴付けを用いて安定性・不安定性に関する先駆的な成果を出し，その後 1980 年代後半には，これらの結果は，非線形クライン・ゴルドン方程式などを含む抽象的なハミルトン系に対する孤立波解の安定性に関する一般論として，Grillakis, Shatah and Strauss [14, 15] にまとめられた．しかし，Grillakis, Shatah and Strauss の理論は主に基底状態解に適用されることを想定していることや，彼らの安定性・不安定性に関する十分条件は方程式のスケール不変性に本質的に依存していることから，非線形構造が単独冪 $|u|^{p-1}u$ より少しでも一般化された場合 (例えば $V(x)$ が定数でない場合) や，基底状態解でない定在波解を考えた場合の安定性・不安定性の問題は，個々の方程式に応じて工夫が必要になり，1990 年代に入ってから少しずつ改善されてきたように思われる．

そこで，第 2 章では基本となる Grillakis, Shatah and Strauss [14, 15] の理論について簡単に触れ，第 3 章では具体例を使ってスケール不変性のない方程式に対しての工夫の一端を述べる．また，余裕があれば，この短期共同研究のタイトル「非線形偏微分方程式の境界値問題」に関連させて，Dirichlet 境界条件や Neumann 境界条件下での (1) の定在波解の安定性に関する文献についても紹介したい．

2. Grillakis, Shatah and Strauss による安定性の十分条件

引き続き，$V(x) \equiv 1$ の場合を扱う．(1) に対する初期値問題は $H^1(\mathbb{R}^n)$ において時間局所的に適切であり，解が存在する限り，エネルギー $E(v)$ と粒子数 $Q(v)$ の保存則が成り立つ ([4] の 4.4 節参照)．

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$
$$Q(v) := \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2.$$

ソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ における劣臨界条件 $p < 1 + 4/(n-2)$ よりエネルギー汎関数 E は $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上定義される．

次に，(3) の基底状態解を定義するために，作用と呼ばれる汎関数 S_ω を

$$S_\omega(v) := E(v) + \omega Q(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad \omega > 0$$

と定義する. S_ω は実ヒルベルト空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上で C^1 級であり, 定常問題 (3) は作用 S_ω のオイラー・ラグランジュ方程式 $S'_\omega(\psi)=0$ と同値であることに注意する.

定義 (3) の非自明解全体の集合 $\{v\in H^1(\mathbb{R}^n):\ S'_\omega(v)=0,\ v\neq 0\}$ を $\mathcal{N}_\omega$ と表すことにする. $\mathcal{G}_\omega:=\{\phi\in\mathcal{N}_\omega:\ S_\omega(\phi)\le S_\omega(v)\ \text{for all}\ v\in\mathcal{N}_\omega\}$ の元を (3) の基底状態解と呼ぶ.

簡単のため, 空間を $H^1_{\mathrm{rad}}:=\{v\in H^1(\mathbb{R}^n):\ v(x)=v(|x|),\ x\in\mathbb{R}^n\}$ に制限し, 考える安定性とは, (4) の代わりに以下の意味での安定性とする.

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0;\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u_0-e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1}<\delta\Longrightarrow\sup_{t>0}\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u(t)-e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1}<\varepsilon. \tag{5}$$

$V(x)\equiv 1$ の場合の (1) に対応する定常問題 (3) について考える. 任意の $\omega>0$ に対して (3) のソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属する正値球対称解 $\psi_\omega(x)$ が一意的に存在し, $\psi_\omega\in\mathcal{G}_\omega$ である (一意性に関しては [20] を参照). 定在波解は $p<1+4/n$ のとき任意の $\omega>0$ に対して 安定 ([5] を参照) であり, $p\ge 1+4/n$ のとき任意の $\omega>0$ に対して不安定である ($p>1+4/n$ の場合は [1], $p=1+4/n$ の場合は [32] を参照). これから, $p=1+4/n$ は $V(x)\equiv 1$ の場合の (1) の定在波解の安定性・不安定性に関する臨界冪であることが分かる.

Grillakis, Shatah and Strauss [14, 15] による一般論 (Shatah [27] も参照) では, 安定性及び不安定性に関する十分条件は (3) の解の L^2 ノルムの ω 微分を用いて与えられる. すなわち, $\partial_\omega\|\psi_\omega\|^2_{L^2}|_{\omega=\omega_1}>0$ であれば $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)|_{\omega=\omega_1}$ は安定であり, 逆に, $\partial_\omega\|\psi_\omega\|^2_{L^2}|_{\omega=\omega_1}<0$ であれば不安定である. $V(x)\equiv 1$ の場合の (1) はスケール変換 $\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x,\lambda^2 t)$, $\lambda>0$, に関して不変であるから, $\psi_\omega(x)=\omega^{1/(p-1)}\psi_1(\sqrt{\omega}x)$ が成り立ち, $\|\psi_\omega\|^2_{L^2}=\omega^{2/(p-1)-n/2}\|\psi_1\|^2_{L^2}$ が成り立つ. これから, $\omega>0$ に依らず, $p=1+4/n$ が臨界冪になることが分かる.

それでは, $\partial_\omega\|\psi_\omega\|^2_{L^2}>0$ という条件はどのようなものを表すのだろうか. まず, 以下の命題に注意する.

命題 1 [14] If there exist $C>0$ and $\varepsilon>0$ such that

$$E(u)-E(\psi_\omega)\ge C\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u-e^{i\theta}\psi_\omega\|^2_{H^1} \tag{6}$$

for any $u\in U_\varepsilon(\psi_\omega)$ satisfying $Q(u)=Q(\psi_\omega)$, then the standing wave solution $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ is stable, where $U_\varepsilon(\psi_\omega)=\{v\in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)\ ;\ \inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u-e^{i\theta}\psi_\omega\|^2_{H^1}<\varepsilon\}$.

証明には背理法を用いる. $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ は安定でないとすると,

$$\exists\{u_{0,n}\}\subset H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n),\ \exists\delta>0;\quad \inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u_{0,n}-e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1}\to 0,\quad (n\to\infty)$$
$$\sup_{t>0}\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u_n(t)-e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1}\ge\delta.$$

ここで，$u_n(t)$ は 初期値 $u_{0,n}$ を持つ (1) の解．$u_n(t)$ の t についての連続性より，

$$\exists t_n > 0; \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|u_n(t_n) - e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1} = \frac{\delta}{2},$$
$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|u_n(t) - e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1} < \frac{\delta}{2}, \quad 0 \le t < t_n.$$

一方，エネルギーの保存と粒子数の保存より，

$$E(u_n(t_n)) = E(u_{0,n}) \to E(\psi_\omega),$$
$$Q(u_n(t_n)) = Q(u_{0,n}) \to Q(\psi_\omega).$$

そこで，$Q(v_n) = Q(\psi_\omega)$, $\|v_n - u_n(t_n)\|_{H^1} \to 0$ を満たすような $\{v_n\} \subset H^1$ を取ると，$E(v_n) \to E(\psi_\omega)$. (6) より，

$$E(v_n) - E(\psi_\omega) \ge C \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|v_n - e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1}^2 \ge \frac{C}{16}\delta^2 \tag{7}$$

となり矛盾． □

このことから，(6) に現れている条件 $Q(u) = Q(\psi_\omega)$ を満たす $u \in U_\varepsilon(\psi_\omega)$ に対する $E(u) - E(\psi_\omega)$ に着目してみる．まず陰関数定理から，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|u - e^{i\theta(u)}\psi_\omega\|_{H^1}^2 = \min_{\theta\in\mathbb{R}} \|u - e^{i\theta}\psi_\omega\|_{H^1}^2. \tag{8}$$

となる $\theta(u) \in \mathbb{R}$ が存在する．ここで，$v := e^{-i\theta(u)}u - \psi_\omega$ とおく．Taylor 展開から，

$$S_\omega(u) = S_\omega(e^{-i\theta(u)}u) = S_\omega(\psi_\omega) + \langle S'_\omega(\psi_\omega), v\rangle + \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\psi_\omega)v, v\rangle + o(\|v\|_{H^1}^2).$$

$S'_\omega(\psi_\omega) = 0$, $Q(\psi_\omega) = Q(u)$ なので，

$$\begin{aligned} E(u) - E(\psi_\omega) &= \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\psi_\omega)v, v\rangle + o(\|v\|_{H^1}^2) \\ &= \frac{1}{2}\langle L_{\omega,+}v_1, v_1\rangle + \frac{1}{2}\langle L_{\omega,-}v_2, v_2\rangle + o(\|v\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

但し，$L_{\omega,+} = -\Delta + \omega - p\psi_\omega^{p-1}$, $L_{\omega,-} = -\Delta + \omega - \psi_\omega^{p-1}$, $v = v_1 + iv_2$ である．したがって，v_1, v_2 に何らかの条件を課して，その下で，

$$\langle L_{\omega,+}v_1, v_1\rangle \ge C_1\|v_1\|_{H^1}^2, \quad \langle L_{\omega,-}v_2, v_2\rangle \ge C_2\|v_2\|_{H^1}^2, \quad \text{for some} \quad C_1, C_2 > 0.$$

が成立すれば，(6) につながるだろうと考える．

そこで，Grillakis, Shatah and Strauss は，(3) の 解の ω に関する微分からの情報と保存量である L^2 ノルムに関連させて，$L_{\omega,+}$ の正値性のための十分条件を導出した．

命題 2 [14]　If $\partial_\omega \|\psi_\omega\|_{L^2}^2 > 0$, then there exists $C > 0$ such that

$$\langle L_{\omega,+} w, w \rangle \geq C \|w\|_{H^1}^2$$

for any $w \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ with $(w, \psi_\omega)_2 = 0$.

注 1 実はこの命題に現れる条件のためには，$L_{\omega,+}$ のスペクトル構造が利用されている; $L_{\omega,+}$ は唯一つの単純な負の固有値を持ち，他のスペクトルは正で 0 から離れている．すなわち，

$$\sigma(L_{\omega,+}) \subset \{\lambda_1\} \cup [\lambda_2, \infty), \quad \text{for some} \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$$

となることが知られている ([25, 33, 20, 16] 参照)．ここで，$\partial_\omega \psi_\omega := \dot{\psi}_\omega$ とし，λ_1 に対応する固有関数を χ_ω とする．条件から，

$$\langle L_{\omega,+} \dot{\psi}_\omega, \dot{\psi}_\omega \rangle = -\langle \psi_\omega, \dot{\psi}_\omega \rangle = -\partial_\omega \|\psi_\omega\|_{L^2}^2 < 0. \tag{9}$$

$$\langle L_{\omega,+} \dot{\psi}_\omega, w \rangle = -(w, \psi_\omega)_2 = 0. \tag{10}$$

この関係に，スペクトル分解 $\dot{\psi}_\omega = a_0 \chi_\omega + p_0$, $w = a\chi_\omega + p$, $a_0, a \in \mathbb{R}$, $p_0, p \in P := \{v \in H^1(\mathbb{R}^n) : (v, \chi_\omega)_2 = 0\}$ を用いると，(9) から，$-a_0^2 \lambda_1^2 + \langle L_{\omega,+} p_0, p_0 \rangle < 0$. したがって，$\exists \theta \in (0,1)$; $-\theta a_0^2 \lambda_1^2 + \langle L_{\omega,+} p_0, p_0 \rangle = 0$. (10) から，$-a_0 a \lambda_1^2 + \langle L_{\omega,+} p, p_0 \rangle = 0$. これより，

$$\begin{aligned}
\langle L_{\omega,+} w, w \rangle &= -a^2 \lambda_1^2 + \langle L_{\omega,+} p, p \rangle \\
&\geq -a^2 \lambda_1^2 + \theta \frac{\langle L_{\omega,+} p, p_0 \rangle^2}{\langle L_{\omega,+} p_0, p_0 \rangle} + (1-\theta) \langle L_{\omega,+} p, p \rangle \\
&= (1-\theta) \langle L_{\omega,+} p, p \rangle \\
&\geq C \|p\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

また，$H^1(\mathbb{R}^n)$ で考えると，$L_{\omega,+}$ は 0 固有値を持つ．この 0 固有値に対応する固有関数は，$\partial_j \psi_\omega$ $(j = 1, \cdots, n)$ で，方程式の平行移動不変性に関係している．命題 2 の条件に $(w, \partial_j \psi_\omega)_2 = 0$ を加えることで $H^1(\mathbb{R}^n)$ での正値性も同様に従う．

注 2 $L_{\omega,-} \psi_\omega = 0$, $\psi_\omega > 0$ なので，$(v, \psi_\omega)_2 = 0$ という制限下で $L_{\omega,-}$ は正値になる．この場合，ψ_ω が $L_{\omega,-}$ の 0 固有値に対応する固有関数であり，方程式の Gauge 不変性に関連している．

したがって，本質的には $L_{\omega,+}$ の正値性を示すことが安定性のための主要課題であることがわかる．

3. スケール不変でない場合に対するアプローチ

$V(x)$ は定数でない場合の (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ について考える. 具体的には, $n \geq 3$, $0 < b < 2$, $1 < p < 1 + (4-2b)/(n-2)$ とし, $V(x)$ は次の仮定 (V1), (V2) を満たすものとする.

(V1) $V(x) \geq 0$, $V(x) \not\equiv 0$, $V(x) \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, $V(x) \in L^{\theta^*}(|x| \leq 1)$, where $\theta^* = 2n/\{(n+2)-(n-2)p\}$.

(V2) There exist $C > 0$ and $a > \{(n+2)-(n-2)p\}/2 > b$ such that

$$\left|\left(V(x) - \frac{1}{|x|^b}\right)\right| \leq \frac{C}{|x|^a}$$

for all $x \in \mathbb{R}^n$ with $|x| \geq 1$.

例えば, $V(x) = (1+|x|^2)^{-b/2}$ は (V1), (V2) を満たしている. 今回はこのような $V(x)$ の付いた方程式 (1) に関しての Anne de Bouard 氏との安定性の結果 [3] について説明する. (不安定性については [11] を参照). 対応する定常問題は,

$$-\Delta\phi + \omega\phi - V(x)|\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{11}$$

である. この方程式の基底状態解の存在は, $V(x)$ が遠方で消えることによる compactness を用いて示されている ([11, 30]).

さて, $V(x) \equiv 1$ の場合のようなスケール不変性は存在しないので, Grillakis, Shatah and Strauss による十分条件 $\partial_\omega \|\phi_\omega\|_{L^2}^2 > 0$ を直接確かめるのは容易ではない. したがって, 線形化作用素 $L_\omega = -\Delta + \omega - pV(x)\phi_\omega^{p-1}$ の正値性を確かめようと考える. そのために以下のようなアイデアを用いる.

$\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$ を

$$\phi_\omega(x) = \omega^{(2-b)/2(p-1)}\tilde{\phi_\omega}(\sqrt{\omega}x), \quad \omega > 0$$

とスケール変換する. このとき, スケール変換された関数 $\tilde{\phi_\omega}(x)$ は以下の方程式を満たす.

$$-\Delta\tilde{\phi_\omega} + \tilde{\phi_\omega} - \omega^{-b/2}V\left(\frac{x}{\sqrt{\omega}}\right)|\tilde{\phi_\omega}|^{p-1}\tilde{\phi_\omega} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(V2) の仮定により, $V(x) \to |x|^{-b}$ ($|x| \to \infty$) に注意する. $\omega \to 0$ のとき, 形式的には, $\omega^{-b/2}V(x/\sqrt{\omega}) \to \omega^{-b/2}|x/\sqrt{\omega}|^{-b} = |x|^{-b}$ となるように思える. この考察から, $\omega \to 0$ のとき $\tilde{\phi_\omega}$ は $\omega = 1$ の場合の

$$-\Delta\psi + \omega\psi - \frac{1}{|x|^b}|\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

の基底状態解 $\psi_{1,b}(x)$ に何らかの意味で収束するのではないかと予想できる．そして，ω が十分小さいとき，定在波解は $e^{it}\psi_{1,b}(x)$ の性質に似てくるのではないかと予想できる．実際，$\tilde{\phi_\omega}(x)$ から $\psi_{1,b}(x)$ への収束は，以下の補題により証明される．

補題 1 [11] Let $n \geq 3$, $0 < b < 2$ and $1 < p < 1 + (4-2b)/(n-2)$. Assume $(V1)$ and $(V2)$. Let $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$. Then, we have

$$\lim_{\omega \to 0} \|\tilde{\phi_\omega} - \psi_{1,b}\|_{H^1} = 0.$$

注 3 $p < 1 + (4-2b)/(n-2)$, $\omega > 0$ に対して，(12) の正値球対称解 $\psi_{\omega,b}(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ が一意的に存在することは知られている ([21, 35])．この $V(x) = |x|^{-b}$ の場合の (1) はスケール不変なので，$\psi_{\omega,b}(x) = \omega^{(2-b)/2(p-1)}\psi_{1,b}(\sqrt{\omega}x)$ によって，$\|\psi_{\omega,b}\|_{L^2}^2 = \omega^{(2-b)/2(p-1)-n/2}\|\psi_{1,b}\|_{L^2}^2$ と L^2 ノルムが計算できて，$p < 1 + (4-2b)/n$ では安定，$p \geq 1 + (4-2b)/n$ では不安定となる ($p = 1 + (4-2b)/n$ の場合は [32, 1] を参照)．また，Kabeya and Tanaka [16] の方法を使って，$p < 1 + (4-2b)/n$ ならば線形化作用素の正値性も確かめることができる ([3])．

注 4 補題 1 は, $\tilde{\phi_\omega}(x)$ が制約条件付きの最小化問題

$$\inf\{\|v\|_{H^1}^2 : v \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\},\ \tilde{I_\omega}(v) \leq 0\}$$

の最小化元であること, 及び $\psi_{1,b}(x)$ が

$$\inf\{\|v\|_{H^1}^2 : v \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\},\ I_{1,b}(v) \leq 0\}$$

の最小化元であることを用いて, $\tilde{\phi_\omega}(x)$ と $\psi_{1,b}(x)$ のノルムをお互いに比較することで証明される．ここで,

$$I_{1,b}(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^b}|v(x)|^{p+1}dx,$$

$$\tilde{I_\omega}(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - \omega^{-b/2}\int_{\mathbb{R}^n} V\left(\frac{x}{\sqrt{\omega}}\right)|v(x)|^{p+1}dx.$$

こうして，極限において線形化作用素の正値性を得ることができる．

補題 2 Let $n \geq 3$, $0 < b < 2$ and $1 < p < 1 + (4-2b)/n$. Assume $(V1)$ and $(V2)$. Let $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$. There exists $\omega_1 > 0$ with the following property: for any $\omega \in (0, \omega_1)$, there exists $\delta_1 > 0$ such that

$$\langle L_\omega v, v\rangle \geq \delta_1 \|v\|_{H^1}^2$$

for any $v \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ satisfying $(v, \phi_\omega) = 0$, where $\langle L_\omega v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla v(x)|^2 + \omega|v(x)|^2 - pV(x)\phi_\omega^{p-1}(x)|v(x)|^2)dx$.

定理 1 [3] Let $n \geq 3$, $0 < b < 2$ and $1 < p < 1 + (4-2b)/n$. Assume $(V1)$ and $(V2)$. Let $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$. Then, there exists $\omega_* > 0$ such that $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (1) is stable for any $\omega \in (0, \omega_*)$ in the sense of (5).

4. 応用例

各問題に対応して，補題 1 のような収束を考えることで，同様にして以下のような結果も得られる．

1 NLS with double power nonlinearity [12, 23]

2 Davey-Stewartson system [22, 24, 12]

3 Neumann 境界条件下での外部境界値問題 [6, 31]

4 Dirichlet 境界条件下での内部境界値問題 [7]

5 線形のポテンシャル付き NLS [8, 9, 10, 13, 18, 19, 26]

6 磁場作用下での NLS [9]

参考文献

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, "Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires," C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.

[2] H. Berestycki and P. L. Lions, "Nonlinear scalar field equations, I-Existence of a ground state," Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983) 313–346.

[3] A. de Bouard and R. Fukuizumi, "Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities," to appear in Annales Henri Poincaré.

[4] T. Cazenave, "Semilinear Schrödinger equations," Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003.

[5] T. Cazenave and P. L. Lions, "Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations," Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.

[6] M. Esteban and W.Strauss, Nonlinear bound states outside an insulated sphere, Comm. Partial Differential Equations. **19** (1994) 177–197.

[7] G. Fibich and F. Merle, "Self-focusing on bounded domains," Physica D. **155** (2001) 132–158.

[8] R. Fukuizumi, "Stability and instability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential", Discrete Contin. Dynam. Systems. Vol. 7 (2001), 525–544.

[9] R. Fukuizumi and M. Ohta, "Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials", Differential and Integral Eqs. Vol. 16 (2003), 691–706.

[10] R. Fukuizumi and M. Ohta, "Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials", Differential and Integral Eqs. Vol. 16 (2003), 111–128.

[11] R. Fukuizumi and M. Ohta, "Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities," to appear in J. Math. Kyoto. Univ.

[12] R. Fukuizumi, "Remarks on the stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity," Advances in Mathematical Sciences and Applications. Vol. 13 (2003), 549–564.

[13] R. Fukuizumi, "Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with critical power nonlinearity and potentials," Adv. Differential Equations. **10** (2005) 259–276.

[14] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, "Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I," J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[15] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, "Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II," J. Funct. Anal. **94** (1990) 308–348.

[16] Y. Kabeya and K. Tanaka, "Uniqueness of positive radial solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ and Séré's non-degeneracy condition", Commun. Partial. Differential. Eqs. Vol. 24 (1999), 563–598.

[17] 川原琢治, "ソリトンからカオスへ–非線形発展方程式の世界", 朝倉書店 (1993).

[18] M. Kunze, T. Küpper, V. K. Mezentsev, E. G. Shapiro and S. Turitsyn, "Nonlinear solitary waves with Gaussian tails", Physica D. Vol. 128 (1999), 273–295.

[19] M. Kurth, "On the existence of infinitely many modes of a nonlocal nonlinear Schrödinger equation related to dispersion-managed solitons," SIAM. J. Math. Anal. **36** (2004/05) 967–985.

[20] M. K. Kwong, "Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, " Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), 234–266.

[21] Y. Li and W. N. Ni, "Radial symmetry of positive solutions nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$", Commun. Partial Differential. Eqs. Vol. 18 (1993), 1043–1054.

[22] M. Ohta, "Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system," Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **62** (1995) 69–80.

[23] M. Ohta, "Stability and instability of standing waves for one dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity", Kodai. Math. J. **18** (1995) 68–74.

[24] M. Ohta, "Stability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system", J. Dyn. Diff. Eqs. **6** (1994) 325–334.

[25] M. Reed and B. Simon, "Methods of modern mathematical physics IV," Academic Press (1978).

[26] H. A. Rose and M. I. Weinstein, "On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential," Phyica D **30** (1988) 207–218.

[27] J. Shatah, "Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations", Comm. Math. Phys. Vol. 91 (1983), 313–327.

[28] J. Shatah and W. Strauss, "Instability of nonlinear bound states," Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.

[29] W. Strauss, "Existence of solitary waves in higher dimensions," Comm. Math. Phys. **55** (1977) 149–162.

[30] C. A. Stuart, "Bifurcation for Dirichlet problems without eigenvalues," Proc. London Math. Soc. **45** (1982) 169–192.

[31] X. Wang and J. Wei, "Shift and stability of ground states of a nonlinear Schrödinger equation outside a small insulated domain," J. Diff. Equations. **154** (1999) 73–95.

[32] M. I. Weinstein, "Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates," Comm. Math. Phys. **87** (1983) 567–576.

[33] M. I. Weinstein, "Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations," Siam. J. Math. Anal. **16** (1985) 472–491.

[34] M. I. Weinstein, "Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations," Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 51–68.

[35] E. Yanagida, "Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$," Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991) 257–274.