数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 106-125

伝播速度の異なる非線形波動方程式系に対する大域解の存在

和歌山大学・教育学部数学教室 片山聡一郎 (Soichiro Katayama)
Department of Mathematics, Wakayama University

1. 序

以下では, $\partial_0=\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}, \partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ という記法を用いる. また, あらわれる関数は全て実数値とする. 定数 $c>0$ に対して

$$\square_c:=\partial_t^2-c^2\Delta_x=\partial_t^2-c^2\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2$$

と定義する. 特に $c=1$ の場合は単に $\square$ と書くことにする (すなわち $\square=\square_1$).

本稿では, 次の形の非線形波動方程式系を考える:

$$\text{(1)}\quad \begin{cases}\square_{c_i}u_i=F_i(u,\partial u) & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\ (i=1,\ldots,N),\\ u_i(0,x)=\varepsilon f_i(x),\ (\partial_t u_i)(0,x)=\varepsilon g_i(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

ここで, $c_i>0$ $(1\le i\le N)$, $u=(u_j)_{1\le j\le N}$, $\partial u=(\partial_a u_j)_{1\le j\le N,0\le a\le n}$ であり, $\varepsilon(>0)$ は十分小さいパラメータとする. 簡単のため, 以下では初期値は滑らかでコンパクト台をもつ, すなわち $f=(f_j)_{1\le j\le N}$, $g=(g_j)_{1\le j\le N}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N)$ と常に仮定する. また, 非線形項 $F(u,v)=(F_j(u,v))_{1\le j\le N}$ は $(u,v)=((u_j)_{1\le j\le N},(v_{j,a})_{1\le j\le N,0\le a\le n})$ の (十分滑らかな) 関数で, $F(0,0)=0$ を満たすものと仮定する. ここで $v_{j,a}$ は (1) において, $\partial_a u_j$ が代入されている変数である.

このような設定の下では, 局所解が存在すること (すなわち, ある $T>0$ が存在して, $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ においては (1) を満たす解 u が存在すること) は古くからよく知られている. したがって, 大域解 (すなわち $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ において (1) を満たす解 u) が存在するかどうかが興味の対象となる.

局所解の存在定理を用いると, 大域解の存在を示すためには, (局所) 解のある種のノルムが有界に留まることを示せばよいことが分かる. 局所解の存在定理にも様々なものがあるが, 例えば, Hörmander [2] の Theorem 6.4.11 では, $\left(u(0,\cdot),\partial_t u(0,\cdot)\right)\in H^{s+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N)\times H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N)$ (ただし $s>n/2+1$) であるときの局所解の存在と, その局所解の存在時間がある有限時間 T^* を超えて延長できないならば

$$\lim_{T\to T^*}\sup_{t\in[0,T)}\sum_{|\alpha|\le 2}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=\infty$$

となることが示されている (ここで, いわゆる多重指標 (multi-index) を用いた; すなわち $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^{n+1}$ に対して, $|\alpha|=\sum_{a=0}^n\alpha_a$, $\partial^\alpha=\partial_0^{\alpha_0}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$). 逆にいえば, 大域解の存在を示すためには, 任意の $T>0$ を固定するごとに, $[0,T)\times\mathbb{R}^3$ における局所解 u に対して, ある正定数 C_T (T に依存してもよい) が存在し,

$$\sup_{t\in[0,T)}\sum_{|\alpha|\le 2}\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\le C_T$$

が成立することを示せばよいことになる．そのためには，解の減衰評価が大きな役割を果たす．表記を簡単にするため，$(t,r)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ に対して，

$$w_+(t,r):=1+t+r, \tag{2}$$

$$w_c(t,r):=1+|ct-r|\ (c\geq 0) \tag{3}$$

という重み関数を導入しておく[1]．このとき，一般に $\square_c\phi=0\ (c>0)$ の解に対し

$$|\phi(t,x)|+w_c(t,|x|)|\partial\phi(t,x)|\leq Cw_+(t,|x|)^{-\frac{n-1}{2}}w_c(t,|x|)^{-\frac{n-1}{2}}$$

となることが知られている．空間の次元 n が大きいほど，この線形波動方程式の解 (自由解) はより早く減衰し，従って，非線形問題における非線形項の影響はより早く小さくなることが期待できる．また，解が "小さい" ときには，非線形項の次数が大きければ大きいほど非線形項の影響は小さくなると考えられる．逆にいえば，空間の次元と非線形項の次数が低ければ低いほど，"小さな" 初期値に対する大域解の存在を示すのは困難になるといえる．

そこで本稿では，考察を $n=3$ の場合のみに限定して，初期値が "小さい" ときの大域解の存在について述べる．以下，任意の $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N)$ に対して，ある $\varepsilon_0>0$ が存在し，$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ ならば (1) の大域解 u が存在するとき，**(SGE) が成立する**ということにする．次節以降で，(SGE) を示すためにどのような評価式が必要であるかの紹介を通して，伝播速度 c_j が j ごとに異なる場合は，伝播速度が全て同じ場合と比べてどのような違いが現れるか，また，非線形項が u のみ，あるいは ∂u のみに依存する場合と比べて，u と ∂u の双方に依存する場合にはどのような困難があらわれるかについて解説する．

表記を簡単にするために，本稿を通じて，次のような記法を用いる．

定義 1. $\phi_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ と ψ に対して，定数 $C_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ が存在して $\psi=\sum_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda\phi_\lambda$ と書けるとき，$\psi=\sum_{\lambda\in\Lambda}{}'\phi_\lambda$ と表す．

また，煩雑さを避けるために本稿を通じて，必要のない限り定数は単に C と書いて，特に区別しないことにする．たとえ同じ式の変形中であっても，各行ごとに C の実際の値は異なる場合もあるので注意されたい．

2. $F=F(u)$ の場合

2.1. 単独方程式の場合． 本小節では，単独方程式 $(N=1)$ で，$F(u)=|u|^p$ (ただし $p>1$) という非線形項を持つ場合について考察する[2]．すなわち，次の初期値問題を考える．

$$\begin{cases}\square u=|u|^p & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\\ u(0,x)=\varepsilon f(x),\ (\partial_t u)(0,x)=\varepsilon g(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{4}$$

---

[1] $w_0(t,r)=1+r$ であることに注意．

[2] $F(u)=|u|^{p-1}u$ の場合も全く同様の結果が知られている．

この半線形波動方程式に対しては, $p > 1+\sqrt{2}$ ならば, (SGE) が成立する (John [3]). 逆に $1 < p \leq 1+\sqrt{2}$ ならば, (SGE) が成立しない (いいかえると, ある f, g が存在して, どのように小さな ε をとっても, (4) の解は有限時間で爆発する) ことも知られている (John [3], Schaeffer [16]).

ここでは, $p > 1+\sqrt{2}$ における (SGE) の証明の概略を述べる. 非線形項の影響を調べるために, 次の減衰評価を用いる.

補題 1. $c > 0$ とし, ϕ を

$$\begin{cases} \Box_c \phi = \Phi & \textit{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ \phi(0,x) = (\partial_t \phi)(0,x) = 0 & \textit{for } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

の解とする. また, $\kappa > 0$, $\delta > 0$, $b \geq 0$ とする. このとき, ある正定数 C が存在して

$$\begin{aligned} &w_+(t,|x|) w_c(t,|x|)^\kappa |\phi(t,x)| \\ &\qquad \leq C \sup_{(\tau,y)\in(0,t)\times\mathbb{R}^3} |y| w_+(\tau,|y|)^{1+\kappa} w_b(\tau,|y|)^{1+\delta} |\Phi(\tau,y)| \end{aligned} \tag{5}$$

が任意の $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ に対して成立する.

補題 1 の証明の概略:
$\Lambda_c(t,r) := \{(\tau,\lambda,\theta); 0 \leq \tau \leq t,\ |r - c(t-\tau)| \leq \lambda \leq r + c(t-\tau),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とおくと, ϕ は

$$\phi(t,x) = \frac{1}{4\pi c r} \iiint_{(\tau,\lambda,\theta)\in\Lambda_c(t,r)} \lambda \Phi\big(\tau, \lambda \Theta_c(t,x,\tau,\lambda,\theta)\big) d\tau d\lambda d\theta \tag{6}$$

と表現されることが知られている (John [4] 参照). ここで $r = |x|$ であり, Θ_c は S^2 値の関数である (Θ_c の具体的な形も分かるが, ここでは省略する). このことを用いると, 目的の評価式を示すためには

$$\int_0^t \int_{|r-c(t-\tau)|}^{r+c(t-\tau)} w_+(\tau,\lambda)^{-(1+\kappa)} w_b(\tau,\lambda)^{-(1+\delta)} d\lambda d\tau \leq C w_+(t,r)^{-1} w_c(t,r)^{-\kappa} \tag{7}$$

という評価式を示せばよいことが分かる. (7) は初等的な積分の計算により示せるが, 詳細は省略する. $\Box$

さて, $u = u(t,x)$ を $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3$ における (4) の局所解とし,

$$E(T) = E[u](T) := \sup_{0\leq t<T} \| w_+(t,|\cdot|) w_1(t,|\cdot|)^\kappa |u(t,\cdot)| \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \tag{8}$$

とおく. ただし $\kappa > 0$ はあとで固定する定数である. このとき $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3$ に対して

$$|F(u)(t,x)| = |u(t,x)|^p \leq w_+(t,|x|)^{-p} w_1(t,|x|)^{-p\kappa} E(T)^p$$

であるから, 非線形項からの寄与を評価するのに補題 1 を $c=b=1$, $\Phi=F(u)$ として用いると

$$
\text{(9)}\qquad \begin{aligned} E(T) &\le C\varepsilon + CE(T)^p \sup_{(\tau,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} |y| w_+^{1+\kappa} w_1^{1+\delta} w_+^{-p} w_1^{-p\kappa} \\ &\le C\varepsilon + CE(T)^p \sup_{(\tau,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_+^{2+\kappa-p} w_1^{1+\delta-p\kappa} \end{aligned}
$$

を得る. ここに C は T, ε とは独立な定数である. もし $2+\kappa-p\le 0$ かつ $1+\delta-p+\kappa\le 0$ となるような $\kappa>0$ と $\delta>0$ が選べれば, 上の評価式から

$$
\text{(10)}\qquad E(T)\le C\varepsilon + CE(T)^p
$$

という評価が得られる (ここでも C は, T と ε とは独立な定数であることに注意). そこで $\kappa=p-2$ と選ぶ. $p>2$ ならば $\kappa>0$ である. このとき $1+\delta-p\kappa\le 0$ を満たす $\delta>0$ が選べるためには $p\kappa=p(p-2)>1$ ならばよい. この 2 次不等式は $p>1+\sqrt{2}$ または $p<1-\sqrt{2}$ ならば成立する. したがって $p>1+\sqrt{2}(>2)$ ならば (10) が得られることになる. (10) を用いると, ある正定数 M が存在して, ε が十分小さいときには

$$
\text{(11)}\qquad E(T)\le M\varepsilon
$$

であるという評価が得られる[3]. u の高階の導関数に関しても全く同様にして評価式が得られ, これにより大域解の存在が示される.

2.2. 連立方程式の場合. (1) において, $F=F(u)$ であり, さらに伝播速度が同じ $(c_1=c_2=\cdots=c_N)$ である場合は, 単独方程式と同様に扱える. 特に $F_i(u)$ $(i=1,\ldots,N)$ が全て p 次の非線形項である場合を考えると, 単独方程式の場合と同様に $p=1+\sqrt{2}$ で (SGE) の成立・不成立が分かれる. しかし, 伝播速度が異なる場合には単独方程式とは異なる現象が見られる. このことを次の簡単な例で見てみよう.

$$
\text{(12)}\qquad \begin{cases} \Box_{c_1} u_1 = u_1 u_2, \\ \Box_{c_2} u_2 = u_1 u_2. \end{cases}
$$

$c_1=c_2$ である場合には $2<1+\sqrt{2}$ だから, 単独方程式の結果から予測されるとおり, (12) に対して (SGE) は成立しない. ところが, $c_1\ne c_2$ の場合には (SGE) が成立する (Kubo Ohta [13]). $c_1\ne c_2$ のとき, (SGE) を示すには次の 2 点に注意すればよい:

---

[3] まず $(1+C)E(0)\le M\varepsilon/4$ が成立するような十分大きな M を選び (M は f と g に依存してよい), $T^* := \sup\{0<t<T; E(T)\le M\varepsilon\}$ とおく. 明らかに $T^*>0$ である. ここで, もし $T^*<T$ と仮定すると, (10) は T を T^* に置き換えても成立するから

$$
E(T^*)\le M\varepsilon/4 + CM^p\varepsilon^p
$$

を得る. ε が $CM^{p-1}\varepsilon^{p-1}<1/4$ を満たすほど小さければ, この式よりさらに $E(T^*)\le M\varepsilon/2$ が得られる. $E(t)$ は t に関して連続だから, この評価により, ある $T^{**}\in(T^*,T)$ が存在して $E(T^{**})\le M\varepsilon$ となることが分かる. これは T^* の定義と矛盾する. よって $T^*=T$, すなわち $E(T)\le M\varepsilon$ が十分小さな ε に対しては成立することが分かる. この論法は bootstrap argument または continuity argument などと呼ばれている.

・$w_-(t,r) := \min\{w_{c_1}(t,r), w_{c_2}(t,r)\}$ とおく．$c_1 \neq c_2$ ならば

$$w_{c_1}(t,r)w_{c_2}(t,r) \geq Cw_+(t,r)w_-(t,r) \tag{13}$$

が成立する．これは $|r-ct| > at$ (a は正定数) ならば $w_c(t,r) \geq Cw_+(t,r)$ であることから得られる．

・補題 1 は，その証明からも分かるように，場所により重み w_b の b の値を取り替えても成立する．したがって (5) の右辺の $w_b(\tau,|y|)^{1+\delta}$ を $w_-(\tau,|y|)^{1+\delta}$ に変えても (5) 式は成立する．

さて，$c_1 \neq c_2$ とする．局所解 $u=(u_1,u_2)$ に対して

$$E(T) = E[u](T) := \sup_{0\leq t<T} \sum_{i=1}^{2} \|w_+(t,|\cdot|)w_{c_i}(t,|\cdot|)^\kappa u_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \tag{14}$$

とおく．先の 2 点の注意を考慮すると，

$$\begin{aligned} |u_1(t,x)u_2(t,x)| &\leq w_+(t,|x|)^{-2}w_{c_1}(t,|x|)^{-\kappa}w_{c_2}(t,|x|)^{-\kappa}E(T)^2 \\ &\leq Cw_+(t,|x|)^{-1-(1+\kappa)}w_-(t,|x|)^{-\kappa}E(T)^2 \end{aligned} \tag{15}$$

となるので，(5) より $\kappa > 1$ と選べば

$$E(T) \leq C\varepsilon + CE(T)^2 \tag{16}$$

を得る．あとは先と同様の議論で (SGE) の成立を示すのに必要な評価式が得られる．

最後に上の非線形項 u_1u_2 は，高次の非線形項による摂動の下で "不安定" であることに注意しておく．たとえば

$$\begin{cases} \Box_{c_1}u_1 = u_1u_2, \\ \Box_{c_2}u_2 = u_1^3 \end{cases} \tag{17}$$

という問題を考える (ただし $c_1 \neq c_2$)．3 次の非線形項を持つ場合には (SGE) の成立は容易に示せる ($3 > 1+\sqrt{2}$ に注意) ことと，上の (SGE) の結果を考え合わせると，この連立方程式に対しても (SGE) が成立すると予想するのは自然であろう．ところが実際には $c_1 > c_2$ ならば (SGE) は成立するが，$c_1 < c_2$ のときには (SGE) が成立しないことが知られている (Kubo – Ohta [13])．なお，(SGE) が成立しないときの (17) の古典解の最大存在時間 (いわゆる lifespan) T_ε は

$$\exp(C_1\varepsilon^{-2}) \leq T_\varepsilon \leq \exp(C_2\varepsilon^{-2}) \tag{18}$$

となることも知られている (Kubo – Ohta [13], Katayama – Matsumura [8])．

3. $F = F(\partial u)$ の場合

より一般的な場合を次節で扱うので，本節では単独方程式 ($N=1$) の場合に限定して，結果および必要な評価式が $F=F(u)$ の場合とどのように異なるかを述べるに留める[4]．

[4]本節の結果は連立方程式の場合にも全く同様に成り立つ．

補題 1 に対応する、解の導関数に対する評価としては以下のものがある.

補題 2. $c>0$ とし, ϕ を

$$\begin{cases} \Box_c\phi = \Phi & in\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \\ \phi(0,x) = (\partial_t\phi)(0,x) = 0 & for\ x\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

の解とする. また,

$$\rho>0,\ 0\le b\neq c,\ \delta>0, \tag{19}$$

もしくは

$$\rho>1,\ 0\le b,\ \delta>0 \tag{20}$$

の一方の成立を仮定する. このとき, ある正定数 C が存在して

$$\begin{aligned} &w_0(t,|x|)w_c(t,|x|)^\rho|\phi(t,x)| \\ &\le C \sup_{(\tau,y)\in(0,t)\times\mathbb{R}^3} |y|w_+(\tau,|y|)^\rho w_b(\tau,|y|)^{1+\delta} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 1} |\partial^\alpha\Omega^\beta\Phi(\tau,y)| \end{aligned} \tag{21}$$

が任意の $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ に対して成立する[5]. ただし $\Omega=(\Omega_{jk})_{1\le j<k\le 3}$, $\Omega_{jk}=x_j\partial_k - x_k\partial_j$ である.

この補題は, 解の導関数の表示を用いることにより補題 1 の証明と同様の方針で示すことができる. しかし, 単純な計算ではあるが, かなり長々とした計算が必要になるので詳細は省くことにする. また, 補題 1 と同様に, 場所により重み w_b の b の値を取り替えても (条件 (19) もしくは (20) を満たす限り) 補題 2 は正しいことにも注意しておく.

非線形波動方程式に適用する際に, 補題 1 と補題 2 との間の最も大きな違いは, 補題 2 においては ∂u の評価を得るために $\Box_c u$ に ∂ または Ω をひとつ作用させたものも必要である点である. このことから, $F=F(\partial u)$ という非線形項を考えた場合, ∂u を評価するために $\partial^2 u$ もしくは $\Omega\partial u$ が必要となるので, このままでは評価が閉じない. したがって, 補題 2 を適用するためには微分のロスのない評価式を組み合わせる必要がある[6]. このような評価式としては, 次のよく知られたエネルギー不等式が基本的である.

補題 3 (エネルギー不等式). $c>0$ とする. $\Box_c\phi=\Phi$ とするとき[7], 次の不等式が成立する.

$$\|\partial\phi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\left(\|\partial\phi(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\Phi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau\right). \tag{22}$$

---

[5] $\rho=1+\kappa$ $(\kappa>0)$ のとき, (21) の右辺に現れる重みは, 補題 1 の (5) の右辺に現れる重みと一致することに注意. 大雑把に言えば, 同じ重みを用いたときに, $|r-ct|=0$ の近傍で, 解それ自体よりも解の導関数のほうが $w_c(t,|x|)$ ひとつ分は解の減衰が速いことになる.

[6] 実は球対称解のみを考えれば補題 2 は微分のロスのない形に改良することができる. したがって, 球対称解の解析は $F=F(u)$ の場合と同様の手法で行うことができる.

[7] より一般な変数係数の方程式に対しても (やや複雑にはなるが) 同様のエネルギー不等式が得られる. 準線型方程式を考える場合にはそちらを用いる.

L^∞ 評価と L^2 評価を結びつけるためには Sobolev 不等式を用いるのが一般的であるが, ここでは次の重み付きの Sobolev 型評価を用いる (証明は Klainerman – Sideris [11] を参照).

補題 4 (Sobolev 型不等式). 遠方で十分速く減衰する滑らかな関数 $\psi = \psi(x)$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |x|\,|\psi(x)| \le C \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2} \|\partial^\alpha \Omega^\beta \psi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{23}$$

が成立する.

さて, 次の非線形波動方程式を考えよう.

$$\begin{cases} \Box u = F(\partial u) & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x),\ (\partial_t u)(0,x) = \varepsilon g(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{24}$$

ただし $F = F(v)$ は C^∞ 級の関数であって, $v = 0$ の近傍で

$$F(v) = O(|v|^p) \tag{25}$$

を満たすものとする (ここで p は 2 以上の整数[8]).

初期値問題 (24) に対しては, $p \ge 3$ ならば (SGE) が成立することが知られている. 以下でこのことを証明しよう.

(24) の局所解 u に対して,

(26)

$$E[u](T) = E(T) = \sup_{0\le t<T}\Big\{ \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s-3} \big\| w_0(t,|\cdot|) w_1(t,|\cdot|) \partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)(t,\cdot)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s} \big\|\partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)(t,\cdot)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big\}$$

とおく. ただし $s \ge 3$ とする. また, 本節では $w_-(t,r) := \min\{w_0(t,r), w_1(t,r)\}$ とおく. $w_0(t,r)w_1(t,r) \ge Cw_+(t,r)w_-(t,r)$ が成立することに注意.

[8] F を C^∞ 級と仮定したことから, 必然的に p は整数のみを考えればよいことになる. $F = F(u)$ の場合と同様に, 非線形項に滑らかさをあまり仮定しない問題を考えることもできるが, 本質的に難しくなる場合も多い. 例えば本稿で紹介する方法は非線形項の微分可能性がかなり必要なので, そのような問題への適用は困難である.

さて, $\Box(\partial^\alpha\Omega^\beta u) = \partial^\alpha\Omega^\beta F(\partial u)$ であるから, まずエネルギー不等式 (補題 3) を適用すると

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s} \|\partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)(t,\cdot)\|_{L^2} \le & C\varepsilon + C\int_0^t \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s} \|\partial^\alpha\Omega^\beta F(\partial u)(\tau,\cdot)\|_{L^2} d\tau \\
\le & C\varepsilon + C\int_0^t \Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le s} \|\partial^\alpha\Omega^\beta(\partial u)(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}\Big)^{p-1} \\
& \qquad \times \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s} \|\partial^\alpha\Omega^\beta(\partial u)(\tau,\cdot)\|_{L^2} d\tau \\
\le & C\varepsilon + C\int_0^t (1+\tau)^{-(p-1)} E(T)^p d\tau \le C\varepsilon + CE(T)^p
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $p>2$ ならば $\int_0^\infty (1+\tau)^{-(p-1)}d\tau < \infty$ となることを用いた. また,

$$\begin{aligned}
|x| & \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s-2} |\partial^\alpha\Omega^\beta F(\partial u)| \\
& \le C\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le s-1} |\partial^\alpha\Omega^\beta(\partial u)|\Big)^{p-1} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s-2} |x||\partial^\alpha\Omega^\beta(\partial u)| \\
& \le C\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le s-1} |\partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)|\Big)^{p-1} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s} \|\partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)\|_{L^2} \\
& \le Cw_0^{-(p-1)} w_1^{-(p-1)} E(T)^p \le Cw_+^{-(p-1)} w_-^{-(p-1)} E(T)^p
\end{aligned}$$

であるから (ここで 補題 4 を用いた), 補題 2 を適用すると, $\nu, \delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s-3} w_0 w_1^{1+\nu} |\partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)| \le & C\varepsilon + \sup |y| w_+^{1+\nu} w_-^{1+\delta} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s-2} |\partial^\alpha\Omega^\beta F| \\
\le & C\varepsilon + C\sup w_+^{(1+\nu)-(p-1)} w_-^{(1+\delta)-(p-1)} E(T)^p
\end{aligned}$$

が成立する[9]. $p>2$ ならば $1+\nu-(p-1)\le 0$, $1+\delta-(p-1)\le 0$ となるような $\nu>0$ と $\delta>0$ がとれるので, 結局

$$\sup_{0\le t<T} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2s-3} \|w_0(t,|\cdot|) w_1(t,|\cdot|) \partial(\partial^\alpha\Omega^\beta u)(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \le C\varepsilon + CE(T)^p$$

を得る. 以上の評価をあわせると, $p \ge 3$ ならば

$$E(T) \le C\varepsilon + CE(T)^p \tag{27}$$

が得られるので, (SGE) の成立が示されたことになる.

ここで示したように, $p\ge 3$ ならば 一般に (SGE) が成立するが, $p=2$ の場合はどうであろうか. この場合には, 一般には (SGE) は成立しないことが知られている

[9] ここで $\nu>0$ は条件 (20) を満たすように導入した.

(例えば $\Box u = (\partial_t u)^2$ に対して (SGE) は成立しない). したがって, (SGE) を得るためには何らかの制限が 2 次の非線形項に必要であることが分かる. このような条件は Null Condition と呼ばれている.

$F = F(\partial u)$ の場合に関しては, 本節ではこれ以上深入りはせずに, より一般の $F = F(u, \partial u)$ に対して, 伝播速度が全て同じ場合と, 異なる場合のそれぞれについて, (SGE) を得るための十分条件 (Null Condition) を次節で紹介する.

4. $F = F(u, \partial u)$ の場合

4.1. L^2 評価. (SGE) を得るための十分条件を紹介する前に, $F = F(u)$ や $F = F(u, \partial u)$ を扱う場合と比べて, $F = F(u, \partial u)$ という非線形項を扱う場合には, どのような困難があるかを最初に述べておきたい.

$F = F(u, \partial u)$ の場合も, 減衰評価に関しては前節までで紹介した補題 1 と 2 を組み合わせて用いるのが基本である. しかし補題 2 を用いるためには, $F = F(\partial u)$ の場合と同様に微分のロスを解消するためにエネルギー評価などを用いる必要がある. ところが今回は非線形項が u それ自身も含んでいるためにエネルギー評価だけでは評価が閉じない. より詳しく言うと, $\|\partial u(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}$ を評価するためには $\|F(u, \partial u)(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}$ の評価が必要であるが, F が例えば u^3 を含んでいれば, $\|u^3\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}$ の評価も必要となる. ところが u と ∂u の L^∞ 評価と, ∂u の L^2 評価 (エネルギー) だけでこの量を評価するのは困難である (もちろん荒っぽい評価を行うのは不可能ではないが, (SGE) を示すためには不十分なことが多い). もっとも自然なのは u それ自身の L^2 評価を得ることであろう. もしも, エネルギー不等式と同様に $\Box_c \phi = \Phi$ を満たす ϕ に対して

$$\|\phi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C \left(\|\phi(0, \cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \|\Phi(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \right)$$

というような評価式が成り立てば話は簡単であるが, 残念ながらこの評価式は正しくない. 実際, 次のことが証明できる.

命題 1. (i) ある定数 C が存在して,

$$\begin{cases} \Box \phi = \Phi & in\ (0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \\ \phi(0, x) = (\partial_t \phi)(0, x) = 0 & for\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{28}$$

が成り立つとき

$$\|\phi(t, \cdot)\|_{L^2} \le C \int_0^t \|\Phi(\tau, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} d\tau \tag{29}$$

が任意の $t > 0$ に対して成立するならば, $p = \dfrac{6}{5}$ である.

(ii) ある定数 C が存在して, (28) が成り立つとき

$$\|\phi(t, \cdot)\|_{L^2} \le C \int_0^t \|(\tau + |\cdot|)^q \Phi(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \tag{30}$$

が任意の $t > 0$ に対して成立するならば, $q = 1$ である.

証明: ここでは (i) のみを示す. (ii) も全く同じ論法で示すことができる. $\phi(\not\equiv 0)$ で $\phi(0,x) = (\partial_t\phi)(0,x) = 0$ を満たすものをひとつ固定し, $\Phi := \Box\phi$ とおく. $\lambda > 0$ に対して,

$$\phi_\lambda(t,x) := \phi(\lambda t, \lambda x),\ \Phi_\lambda(t,x) := \lambda^2\Phi(\lambda t, \lambda x)$$

と定義すると, $\Box\phi_\lambda = \Phi_\lambda$ かつ $\phi_\lambda(0,x) = (\partial_t\phi_\lambda)(0,x) = 0$ であるから, 仮定より

$$\|\phi_\lambda(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\int_0^t \|\Phi_\lambda(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{31}$$

が任意の $t > 0$ と任意の $\lambda > 0$ に対して成立する. ここで

$$\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\phi_\lambda(t/\lambda, x/\lambda)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{3}{2}}\|\phi_\lambda(t/\lambda,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{32}$$

であるから, (31) より

$$\begin{aligned}\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\le C\lambda^{\frac{3}{2}}\int_0^{t/\lambda} \|\Phi_\lambda(\tau,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} d\tau \\ &\le C\lambda^{\frac{3}{2}+2}\int_0^{t/\lambda} \|\Phi(\lambda\tau,\lambda\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} d\tau \\ &= C\lambda^{\frac{3}{2}+2-1-\frac{3}{p}}\int_0^{t} \|\Phi(\tau,\cdot)\|_{L^p} d\tau\end{aligned} \tag{33}$$

を任意の $t > 0$ と $\lambda > 0$ に対して得る. もし $\frac{3}{2} + 2 - 1 - \frac{3}{p} > 0$ ならば $\lambda \to +0$, $\frac{3}{2} + 2 - 1 - \frac{3}{p} < 0$ ならば $\lambda \to \infty$ と (33) で極限移行することにより

$$\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$$

が任意の $t > 0$ に対して成立することが分かる. これは $\phi \not\equiv 0$ と矛盾する. したがって $\frac{3}{2} + 2 - 1 - \frac{3}{p} = 0$, すなわち $p = \frac{6}{5}$ でなければならない.

上の命題で成立が"否定されない"評価式は, エネルギー不等式と比べると (SGE) のためには不利な評価式である. 実際, 先ほどの $F(u,\partial u)$ が u^3 を含んでいる場合, $u \sim (1+t+|x|)^{-1}$ とすると

$$\|u^3(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|u\|_{L^\infty}^2\|u\|_{L^2} \sim (1+t)^{-2}\|u\|_{L^2}, \tag{34}$$

$$\|u^3(t,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}} \le \|u\|_{L^\infty}^{\frac{4}{3}}\|u\|_{L^2}^{\frac{5}{3}} \sim (1+t)^{-\frac{4}{3}}\|u\|_{L^2}^{\frac{5}{3}}, \tag{35}$$

$$\|(t+|\cdot|)u^3\|_{L^2} \sim (1+t)^{-1}\|u\|_{L^2} \tag{36}$$

となり, (35) や (36) で期待できる減衰は (34) と比べると小さくなる. これが $F = F(u,\partial u)$ の場合の取り扱いを困難にしている点である.

なお, 命題 1 で成立が"否定されない"評価式に対応する評価は, 以下で見るように実際に成立することが知られている.

補題 5 (Strauss [18]). $c>0$ とする. $\Box_c\phi=\Phi$ ならば

$$\begin{aligned}&\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\le C\left(\|\phi(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|(\partial_t\phi)(0,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)}+\int_0^t\|\Phi(\tau,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)}d\tau\right)\end{aligned}\tag{37}$$

が成立する.

これはまさに, 命題 1 の (i) であらわれた評価に他ならない. 命題 1 (ii) に対応する評価をより正確に述べるために, いくつか記号を導入する.

$$S:=\partial_t+\sum_{j=1}^{3}x_j\partial_j,\ L_{c,k}:=\frac{x_k}{c}\partial_t+ct\partial_k\ (1\le k\le 3)\tag{38}$$

と定義し, ベクトル場の族 $\widetilde{\Gamma}_c$ を

$$\widetilde{\Gamma}_c=\{\widetilde{\Gamma}_{c,0},\widetilde{\Gamma}_{c,1},\dots,\widetilde{\Gamma}_{c,10}\}:=\{S,(\Omega_{jk})_{1\le j<k\le 3},(\partial_a)_{0\le a\le 3},(L_{c,k})_{1\le k\le 3}\}$$

とおく. また, 多重指標 α を用いて $\widetilde{\Gamma}_c^\alpha=\widetilde{\Gamma}_{c,0}^{\alpha_0}\cdots\widetilde{\Gamma}_{c,10}^{\alpha_{10}}$ のように表す. 交換子 $[\cdot,\cdot]$ を $[A,B]=AB-BA$ と定義すると, 任意の $c>0$ に対し

$$[S,\Box_c]=-2\Box_c,\ [\Omega_{jk},\Box_c]=[\partial_a,\Box_c]=[L_{c,k},\Box_c]=0\tag{39}$$

が成立するので,

$$\Box_c(\widetilde{\Gamma}_c^\alpha u)=\sum_{|\beta|\le|\alpha|}{}'\,\widetilde{\Gamma}_c^\alpha(\Box_c u)\tag{40}$$

が成り立ち, これらのベクトル場は波動方程式と大変相性が良いことが分かる. これらのベクトル場を使う手法を Klainerman の vector field method (または invariant norm method) という. ただし, これらのベクトル場のうち, 定義が c に陽に依存する $L_{c,k}$ は取り扱いに注意が必要である. $b,c>0$ としたとき, $[L_{c,k},\Box_b]=\frac{2}{c}(1-\frac{b^2}{c^2})\partial_t\partial_k$ なので, 伝播速度が異なる成分を含むような波動方程式系に対しては, $L_{c,k}$ はあまり使えそうにないことが分かる. そこでこれらを除いたベクトル場の族

$$\Gamma=\{\Gamma_0,\Gamma_1,\dots,\Gamma_7\}:=\{S,(\Omega_{jk})_{1\le j<k\le 3},(\partial_a)_{0\le a\le 3}\}$$

も導入しておく. やはり多重指標を使って $\Gamma^\alpha=\Gamma_0^{\alpha_0}\cdots\Gamma_7^{\alpha_7}$ などと表すことにする.

また, $\psi=\psi(t,x)$, $s\ge 0$ と $1\le p\le\infty$ に対して

$$|\psi(t,x)|_{\widetilde{\Gamma}_c,s}:=\sum_{|\alpha|\le s}|\widetilde{\Gamma}_c^\alpha\psi(t,x)|,$$

$$|\psi(t,x)|_{\Gamma,s}:=\sum_{|\alpha|\le s}|\Gamma^\alpha\psi(t,x)|,$$

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{\widetilde{\Gamma}_c,s,p}:=\sum_{|\alpha|\le s}\|\widetilde{\Gamma}_c^\alpha\psi(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{\Gamma,s,p}:=\sum_{|\alpha|\le s}\|\Gamma^\alpha\psi(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

と書くことにする. $\|\psi(t,\cdot)\|_{\Gamma,s,p} \le \|\psi(t,\cdot)\|_{\tilde{\Gamma}_c,s,p}$ であることに注意.

$\tilde{\Gamma}_c$ は大変有用なベクトル場で, 例えば Klainerman の不等式

$$w_+(t,|x|)w_c(t,|x|)^{\frac{1}{2}}|\psi(t,x)| \le C\|\psi(t,\cdot)\|_{\tilde{\Gamma}_c,2,2} \tag{41}$$

などを示すことができる (なお, この不等式において, ψ は特に波動方程式の解である必要はないことに注意). これを用いると補題 2 を使わずとも, 例えばエネルギーが有界であることが分かれば, ∂u の減衰評価も自動的に得られる. しかし残念ながら Klainerman の不等式は, $\tilde{\Gamma}_c$ を Γ に変えた場合には成立しない. このように $L_{k,c}$ を使えないことにより, 使える道具が制限されることが, 伝播速度が全て同じ場合と比べて, 異なる場合の解析を難しくする理由のひとつである.

さて, 話を元に戻そう. 以上で導入した記号を用いると命題 1 (ii) に対応する評価式は次のようになる.

補題 6 (Klainerman [10]; Conformal Energy). $c>0$ とする. $\Box_c\phi=\Phi$ とするとき, 次の評価式が成立する.

$$\|\phi(t,\cdot)\|_{\tilde{\Gamma}_c,1,2} \le C\left(\|\phi(0,\cdot)\|_{\tilde{\Gamma}_c,1,2} + \int_0^t \|w_+(\tau,|\cdot|)\Phi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau\right). \tag{42}$$

重みが $\tau+|\cdot|$ から $w_+(\tau,|\cdot|)$ へと少し重くなってはいるものの, $\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|\phi(t,\cdot)\|_{\tilde{\Gamma}_c,1,2}$ であるから, 補題 6 は, 実際には 命題 1 (ii) で示唆された以上のことを主張しているのに注意されたい.

4.2. **伝播速度が同じ場合.** ここから, (SGE) の成立のための十分条件の紹介に移ろう.

$n=3$ で 2 次の非線形項を持ち, 伝播速度が同じ場合には, Klainerman [10] による結果が有名である. 結果を紹介する前に, まず null form を導入しておく.

定義 2 (Null Form). (t,x) の関数 ϕ, ψ に対して

$$Q_0(\phi,\psi;c) := (\partial_t\phi)(\partial_t\psi) - c^2\sum_{j=1}^{3}(\partial_j\phi)(\partial_j\psi) \quad (\text{ただし } c>0), \tag{43}$$

$$Q_{ab}(\phi,\psi) := (\partial_a\phi)(\partial_b\psi) - (\partial_b\phi)(\partial_a\psi) \quad (0\le a<b\le 3) \tag{44}$$

と定義する. これらは *null form* と呼ばれている.

定理 1 (Klainerman [10]). $n=3$ とし, $c_1=c_2=\cdots=c_N=1$ と仮定する. 次の条件 (*Null Condition*) を仮定する:

(H0) 各 $i=1,\ldots,N$ に対して, F_i は

$$F_i(u,\partial u) = N_i(\partial u) + H_i(u,\partial u) \tag{45}$$

の形に書ける. ここで

$$N_i(\partial u) = {\sum_{1\le j,k\le N}}' Q_0(u_j,u_k;1) + \sum_{1\le j,k\le N}\ {\sum_{0\le a<b\le 3}}' Q_{ab}(u_j,u_k) \tag{46}$$

であり, H_i は $(u,\partial u)=(0,0)$ の近傍で

$$(47)\qquad H_i(u,\partial u)=O(|u|^3+|\partial u|^3)$$

である.

このとき, 初期値問題 (1) に対して (SGE) が成立する.

注 1. 準線形のときにも同様の結果が成り立つ. $m=1$ で半線形の場合には null form のうち意味があるものは $N_1(\partial u)=\alpha_1 Q_0(u_1,u_1;1)$ のみになる (α_1 は定数).

Klainerman の Null Condition では, 要するに 2 次の非線形項が全て Null Form を用いて書かれるものに制限されていることになる. Null Form で書かれた項が良い振る舞いをすることは次の補題で分かる. Klaineman [10] ではベクトル場 $L_{c,k}$ も用いた評価式が使われているが, ここでは, 伝播速度が異なる場合にも通用する Yokoyama [19] による評価式を紹介しておく (Kubota – Yokoyama [14] も参照のこと).

補題 7. $\delta>0,\ c>0$ とする. このとき

$$\begin{aligned}
w_+(t,|x|)|Q_0(\phi,\psi;c)(t,x)| \le& Cw_c(t,|x|)|\partial\phi(t,x)|\,|\partial\psi(t,x)|\\
&+C(|\partial\phi(t,x)|\,|\psi(t,x)|_{\Gamma,1}+|\phi(t,x)|_{\Gamma,1}|\partial\psi(t,x)|),\\
w_+(t,|x|)|Q_{ab}(\phi,\psi)(t,x)| \le& C(|\partial\phi(t,x)|\,|\psi(t,x)|_{\Gamma,1}+|\phi(t,x)|_{\Gamma,1}|\partial\psi(t,x)|)
\end{aligned}$$

が $|x|\ge\max\{\delta t,1\}$ を満たす任意の (t,x) に対して成立する.

証明. ここでは Q_{12} に対する評価のみ証明する. 他の評価式も同様の方針で証明できる. $1\le i\le 3$ に対して

$$\partial_i=\omega_i\partial_r-\frac{1}{r}\Omega_i$$

が成立することは容易に確かめられる. ここで

$$r=|x|,\ \partial_r=\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j}{r}\partial_j,\ \omega_i=\frac{x_i}{r},\ \Omega_i=\sum_{j\ne i}\frac{x_j}{r}\Omega_{ij}$$

である (ただし $i>j$ のとき $\Omega_{ij}=-\Omega_{ji}$ とした). これを用いて ∂_1, ∂_2 を書き換えると

$$\begin{aligned}
(48)\qquad rQ_{12}(\phi,\psi)=&-(\omega_1\partial_r\phi)(\Omega_2\psi)-(\Omega_1\phi)(\omega_2\partial_r\psi)+\frac{1}{r}(\Omega_1\phi)(\Omega_2\psi)\\
&+(\Omega_2\phi)(\omega_1\partial_r\psi)+(\omega_2\partial_r\phi)(\Omega_1\psi)-\frac{1}{r}(\Omega_2\phi)(\Omega_1\psi)
\end{aligned}$$

を得る. $r\ge\max\{\delta t,1\}$ ならば $r\ge Cw_+(t,r)$ であるから, あとは $|\omega_i|\le 1$, $|\Omega_i\phi|\le C|\phi|_{\Gamma,1}$, $\frac{1}{r}|\Omega_i\phi|\le|\partial\phi|$ などの関係に注意すれば, (48) より結果は容易に得られる.

定理 1 の証明の概略: ここでは Klainerman [10] の証明から離れて, $L_{c,j}$ を用いない方法を簡単に紹介しておこう. (1) の局所解 u に対して,

$$
\begin{aligned}
E(T) = E[u](T) := \sup_{0\le t<T} \Big\{ &\big\| w_+(t,|\cdot|) w_1(t,|\cdot|) |u(t,\cdot)|_{\Gamma,s+1} \big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\
&+ \big\| w_0(t,|\cdot|) w_1(t,|\cdot|)^{1+\mu} |\partial u(t,\cdot)|_{\Gamma,s+2} \big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\
&+ (1+t)^{-\nu} \big(\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} + \|\partial u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} \big) \Big\}
\end{aligned} \tag{49}
$$

とする. ただし s は十分大きい整数, $0<\mu<1$, $0<\nu\ll 1$ である. 減衰評価としては, 補題 1 と 2 を用い (補題 4 も高次の導関数の評価と結びつけるために用いる), L^2 評価としては補題 3 と 6 を用いれば, 2 次の項の評価には補題 7 を組み合わせることによって, $E[u](T) \le C\varepsilon + CE[u](T)^2$ という評価式が得られ, これにより (SGE) が証明できる. ここでは, $\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ の評価のみを紹介して, 他の項の評価は省略させてもらうことにする.

$\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,1,2} \le \|u(t,\cdot)\|_{\tilde\Gamma_c,1,2}$ であることに注意して補題 6 を用いると

$$
\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} \le C\varepsilon + \int_0^t \| w_+(\tau,|\cdot|) |F(\tau,\cdot)|_{\Gamma,2s-1} \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \tag{50}
$$

を得る. まず, 3 次以上の項に関しては

$$
\begin{aligned}
|H_i(u,\partial u)|_{\Gamma,2s-1} \le& C\big(|u|_{\Gamma,s-1} + |\partial u|_{\Gamma,s-1}\big)^2 \big(|u|_{\Gamma,2s-1} + |\partial u|_{\Gamma,2s-1}\big) \\
\le& C|u|^2_{\Gamma,s} |u|_{\Gamma,2s} \\
\le& C w_+^{-2} w_1^{-2} E(T)^2 |u|_{\Gamma,2s} \le C w_+^{-2} E(T)^2 |u|_{\Gamma,2s}
\end{aligned} \tag{51}
$$

である ($|\partial u|_{\Gamma,2s-1} \le C|u|_{\Gamma,2s}$ 等を用いた). 次に 2 次の項 N_i について考える. $0<\delta\ll 1$ をとり $A := \{(\tau,y); |y| \ge \max\{1,\delta\tau\}\}$ とおくと, 補題 7から A の内部では

$$
\begin{aligned}
w_+|N_i(u,\partial u)|_{\Gamma,2s-1} \le& C w_1 |\partial u|_{\Gamma,s-1} |\partial u|_{\Gamma,2s-1} + C|u|_{\Gamma,s}|u|_{\Gamma,2s} \\
\le& C w_+^{-1} E(T) |u|_{\Gamma,2s}
\end{aligned} \tag{52}
$$

を得る. 他方, A の外では $w_1 \ge w_+$ であるから, 特別な構造を使わなくても

$$
\begin{aligned}
|N_i(u,\partial u)|_{\Gamma,2s-1} \le& C|\partial u|_{\Gamma,s-1}|\partial u|_{\Gamma,2s-1} \le C|u|_{\Gamma,s}|u|_{\Gamma,2s} \\
\le& C w_+^{-1} w_1^{-1} E(T) |u|_{\Gamma,2s} \le C w_+^{-2} E(T) |u|_{\Gamma,2s}
\end{aligned} \tag{53}
$$

が得られる. 以上をまとめると

$$
\| w_+ |F|_{\Gamma,2s-1} \|_{L^2} \le C \| w_+^{-1} E(T) |u|_{\Gamma,2s} \|_{L^2} \le C(1+\tau)^{\lambda-1} E(T)^2 \tag{54}
$$

であるから, (50) より

$$
\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,1,2} \le C\varepsilon + C(1+t)^{\lambda} E(T)^2 \tag{55}
$$

となり, 目的の評価が得られた.

4.3. **伝播速度が異なる場合**. 各成分の伝播速度 c_i が必ずしも一致しない場合は Agemi – Yokoyama [1], Katayama [5], [6], [7], Katayama-Yokoyama [9], Kovalyov [12], Kubota – Yokoyama [14], Sideris – Tu [17], Yokoyama [19] などの研究があるが, ここでは [6] と [9] の結果を紹介する. 伝播速度の違いにより, null form 以外にも (SGE) が成立するような非線形項が現れる点に注意されたい.

定理 2 (Katayama [6], Katayama–Yokoyama [9]). $n=3$ とし, $0<c_1<c_2<\cdots<c_N$ とする. 次の条件 (H1), または (H2) の成立を仮定する:

(H1) 各 $i=1,\ldots,N$ に対して F_i は

$$F_i(u,\partial u)=N_i(\partial u)+R_{i,11}(\partial u)+R_{i,12}(\partial u)+H_i(u,\partial u) \tag{56}$$

の形で書ける. ここに

$$N_i(\partial u)=\alpha_i Q_0(u_i,u_i;c_i) \quad (\alpha_i\in\mathbb{R}), \tag{57}$$

$$R_{i,11}(\partial u)=\sum_{j\neq i}\sum_{0\le a,b\le 3}{}' (\partial_a u_j)(\partial_b u_j), \tag{58}$$

$$R_{i,12}(\partial u)=\sum_{j\neq k}\sum_{0\le a,b\le 3}{}' (\partial_a u_j)(\partial_b u_k), \tag{59}$$

$$(u,\partial u)=(0,0) \text{ の近傍で } H_i(u,\partial u)=O(|u|^3+|\partial u|^3), \tag{60}$$

(H2) 各 $i=1,\ldots,N$ に対して F_i は

$$\begin{aligned}F_i(u,\partial u)=&N_i(\partial u)+\widetilde{R}_{i,11}(\partial u)+R_{i,12}(\partial u)\\ &+R_{i,21}(u,\partial u)+R_{i,22}(u,\partial u)+H_i(u,\partial u)\end{aligned} \tag{61}$$

の形で書ける. ここに

$$\widetilde{R}_{i,11}(\partial u)=\sum_{j\neq i}{}' Q_0(u_j,u_j;c_j), \tag{62}$$

$$R_{i,21}(u,\partial u)=\sum_{j\neq i}\sum_{0\le a\le 3}{}' u_j(\partial_a u_j), \tag{63}$$

$$R_{i,22}(u,\partial u)=\sum_{j\neq k}\sum_{0\le a\le 3}{}' u_j(\partial_a u_k) \tag{64}$$

であり, N_i, $R_{i,12}$ と H_i は (H1) と同様.

このとき, 初期値問題 (1) に対して (SGE) が成立する[10].

[10]上の定理で N_i や $\widetilde{R}_{i,11}$ が Q_0 のみで書かれているのは, 他の null form が今回の枠組みでは意味をもたないからに過ぎず, 実際には Q_{ab} も全く同様に扱えることに注意. ここでは簡単のため, 半線形かつ全ての速度が違う場合について述べたが, 準線形であっても, また, 同じ伝播速度をもつ成分がいくつかある場合であっても同様の結果が得られる. その際には N_i や $\widetilde{R}_{i,11}$ には Q_{ab} の形で表される null form もあらわれる.

上の定理で二つの条件が併記されているのはすこし奇妙に見えるかもしれない. 例えば, 条件 (H2) の $\widetilde{R}_{i,11}$ を $R_{i,11}$ に置き換えた条件の下で (SGE) が示せれば, (H1) と (H2) に分ける必要はなくなる. しかし, これは一般に不可能であることが分かっている[11]. 実際, Ohta [15] は $c_1 < c_2$ であるとき,

$$\Box_{c_1} u_1 = u_2(\partial_t u_1),\ \Box_{c_2} u_2 = (\partial_t u_1)^2 \tag{65}$$

に対して (SGE) は成立しないことを示した ($u_2(\partial_t u_1)$ は (H2) で扱われている $R_{1,22}$ に含まれ, $(\partial_t u_1)^2$ は (H1) で扱われている $R_{2,11}$ に含まれている項であることに注意せよ).

なお, (H1), (H2) ともに伝播速度が同じ場合の Klainerman の結果は含んでいることにも注意しておく.

定理 2 の証明の概略: まず, 定理 1 では現れなかった $R_{i,11}$, $R_{i,12}$, $R_{i,21}$, $R_{i,22}$ の L^∞ 評価における取り扱いの方針について大雑把に説明しておこう (Null Form で書かれている N_i や $\widetilde{R}_{i,11}$ は基本的には定理 7 を使って処理すればよい). $R_{i,12}$ や $R_{i,22}$ の処理においては, 各項が伝播速度が異なる成分の積であることを用いて, 2.2 節で述べたのと同様に (13) 式によって減衰が稼げることを利用する. 他方, $R_{i,11}$ や $R_{i,21}$ に含まれる項は同じ速度の成分どうしの積であるので, 単純に減衰が稼げることは期待できない. これらの項の処理においては, 非線形項の伝播速度が c_i と異なることを利用して補題 2 の (19) の条件を満たす重みを用いることが本質的である ($R_{i,21}$ においては各項が発散形式 $\partial_a(u_j^2)$ の和であることも用いる). これらは (H1), (H2) どちらの条件を課している場合であっても基本方針は同じである.

それでは, それぞれの条件の下での (SGE) の証明の方針について述べよう.

(H1) について: 局所解 u に対して次の量の評価を行う:

$$\begin{aligned} E(T) = E[u](T) = \sup_{0\le t<T} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{N} \| w_+(t,|\cdot|)^{1-\delta} w_{c_i}(t,|\cdot|)^{\delta} |u_i(t,\cdot)|_{\Gamma,s+1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\ & + \sum_{i=1}^{N} \| w_0(t,|\cdot|) w_{c_i}(t,|\cdot|) |\partial u_i(t,\cdot)|_{\Gamma,s} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\ & + \sum_{i=1}^{N} \| w_0(t,|\cdot|) w_{c_i}(t,|\cdot|)^{\rho} |\partial u_i(t,\cdot)|_{\Gamma,s+2} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\ & + (1+t)^{-\nu_1} \|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} + (1+t)^{-\nu_2} \|\partial u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} \Bigg\}. \end{aligned}$$

ここで s は十分大きな自然数, $0<\delta \ll 1$, $0<\rho\ll 1$, $0<\nu_2\ll 1$, $\nu_1 = \frac{2}{3}+\frac{5}{3}\nu_2$ である.

定理 1 の証明と比べて大きく違う点は, $R_{i,11}$ という項が存在するためににあまり u に良い減衰が期待できない点にある (実際, w_+^{-1} に少し足りない). このため $\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ を評価するのに補題 6 を用いることができない. 代わりに補題 5 を用いて $\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ を評価し, $\|\partial u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ の評価には補題 3 を用いる. また, その

[11] もちろん 条件 (H1), (H2) ともに, さらに何らかの項を付け加えて, それぞれに拡張できる可能性は残っている.

ために $\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ と $\|\partial u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ の増加のオーダーに差をつけているのも工夫している点である (なお, これは 2 次の項が ∂u のみを含み u を含まないので可能である; したがって (H2) の場合には利用できない).

また, 補題 5 を用いるとき, 例えば u_i^3 という非線形項からの寄与を評価する際に

$$\begin{aligned}\left\| |(u_i)^3|_{\Gamma,2s} \right\|_{L^{\frac{6}{5}}} &\leq C \left\| |u_i|^2_{\Gamma,s} |u_i|_{\Gamma,2s} \right\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq C \|u_i\|^2_{\Gamma,s,6} \|u_i\|_{\Gamma,2s,2} \\ &\leq C(1+\tau)^{\nu_2} \|u_i\|^2_{\Gamma,s,6} E(T)\end{aligned} \tag{66}$$

となるので, $\|u_i\|_{\Gamma,s,6}$ の評価が必要となる. ここで単純に

$$\|u_i\|_{\Gamma,s,6} \leq \|u\|^{\frac{2}{3}}_{\Gamma,s,\infty} \|u\|^{\frac{1}{3}}_{\Gamma,s,2} \leq (1+\tau)^{\frac{-2+2\delta}{3}+\frac{\nu_2}{3}} E(T)$$

と評価を進めると減衰が足りず評価が閉じない. 代わりに

$$\|u_i\|_{\Gamma,s,6} \leq \|w_+(\tau,|\cdot|)^{-1+\delta} w_{c_i}(t,|\cdot|)^{-\delta}\|_{L^6(\mathbf{R}^3)} E(T) \leq C(1+\tau)^{-\frac{1}{2}} E(T)$$

という風に, 各点評価を用いて積分計算を直接おこなって L^6 ノルムの評価を行うとよりよい評価が得られる. これがもう一点の工夫である.

(H2) について: 局所解 u に対して次の量を評価する:

$$\begin{aligned}E(T) = E[u](T) = \sup_{0\leq t<T} \Bigg\{ &\sum_{i=1}^{N} \|w_0(t,|\cdot|) w_{c_i}(t,|\cdot|) |u_i(t,\cdot)|_{\Gamma,s+1}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \|w_0(t,|\cdot|) w_{c_i}(t,|\cdot|) w_-(t,|\cdot|)^{\mu} |\partial u_i(t,\cdot)|_{\Gamma,s+2}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \|w_0(t,|\cdot|) w_{c_i}(t,|\cdot|)^{\rho} |\partial u_i(t,\cdot)|_{\Gamma,s+3}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \\ &+ (1+t)^{-\nu} \big(\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} + \|\partial u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2} \big) \\ &+ (1+t)^{-\nu} \sum_{i=1}^{N} \|w_{c_i}(t,\cdot) |\partial u(t,\cdot)|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \Bigg\}.\end{aligned}$$

ここで s は十分大きな自然数, $0<\mu<1$, $0<\rho<1$, $0<\nu\ll 1$ である. また,

$$w_-(t,r) := \min\{w_0(t,r), w_{c_1}(t,r), \ldots, w_{c_N}(t,r)\}$$

である.

今度は $\|u(t,\cdot)\|_{\Gamma,2s,2}$ を評価するのに補題 6 を用いる. そこで問題になるのがまず $R_{i,12}$ や $R_{i,22}$ の処理である. 例えば $(\partial_a u_j)(\partial_b u_k)$ (ただし $c_j \neq c_k$) のような項の処理を考えてみよう. 補題 6 を用いるには

$$\begin{aligned}&\|w_+ |(\partial_a u_j)(\partial_b u_k)|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2} \\ &\quad \leq C \left(\|w_+ |\partial_a u_j|_{\Gamma,s-1} |\partial_b u_k|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2} + \|w_+ |\partial_b u_k|_{\Gamma,s-1} |\partial_a u_j|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2} \right)\end{aligned}$$

の評価が必要になる. 同様に扱えるので $\|w_+ |\partial_a u_j|_{\Gamma,s-1} |\partial_b u_k|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2}$ の方に集中しよう. 単純に Hölder の不等式を使って

$$\|w_+ |\partial_a u_j|_{\Gamma,s-1} |\partial_b u_k|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2} \leq \|w_+ |\partial_a u_j|_{\Gamma,s-1}\|_{L^\infty} \|\partial_b u_k\|_{\Gamma,2s-1,2}$$

としただけでは伝播速度が違うことが全く利用できず減衰を稼げない. これを解決するために $E[u](T)$ に導入されたのが $\|w_{c_i}|\partial u_i|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2}$ である. これを用いると,

$$
\begin{aligned}
\|w_+|\partial_a u_j|_{\Gamma,s-1}|\partial_b u_k|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2} \le& \|w_+ w_{c_k}^{-1}|\partial_a u_j|_{\Gamma,s-1}\|_{L^\infty}\|w_{c_k}\partial_b u_k\|_{\Gamma,2s-1,2}\\
\le& \|w_+ w_0^{-1} w_{c_j}^{-1} w_{c_k}^{-1}\|_{L^\infty}(1+\tau)^\nu E(T)^2\\
\le& (1+\tau)^{\nu-1}E(T)^2
\end{aligned}
\tag{67}
$$

のように必要な減衰が得られる. 上記の計算がうまくいくためには $\|w_{c_i}|\partial u_i|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2}$ の (よい) 評価式が必要であるが, 実はこれは補題 6 の系として得られる:

補題 8 (Katayama [7]). $c > 0$ とする. $\Box_c\phi = \Phi$ とするとき, 次の評価式が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\|\phi(t,\cdot)\|_{\Gamma,1,2} + \|w_c(t,|\cdot|)\partial\phi(t,\cdot)\|_{L^2}\\
&\le C\left(\|\phi(0,\cdot)\|_{\tilde{\Gamma}_c,1,2} + \int_0^t \|w_+(\tau,|\cdot|)\Phi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}d\tau\right).
\end{aligned}
\tag{68}
$$

証明. $\tilde{\Gamma}_c$ に属するベクトル場を用いると, 例えば

$$
(ct-|x|)\partial_t\phi = \frac{c}{ct+|x|}\left(tS\phi - \sum_{k=1}^{3} x_k L_{c,k}\phi\right)
\tag{69}
$$

のように書き換えることができる. これらの書き換えを用いると $w_c(t,|x|)|\partial\phi| \le C|\phi|_{\tilde{\Gamma}_c,1}$ を得る. したがって

$$
\|\phi\|_{\Gamma,1,2} + \|w_c\partial\phi\|_{L^2} \le C\|\phi\|_{\tilde{\Gamma}_c,1,2}
$$

となるので, 補題 6 より直ちに結果を得る.

$R_{i,21}$ からの u や ∂u の L^2 ノルムへの寄与を計るには, 各項が発散形式で書かれていることが重要な点のひとつである. より詳しく言うと,

$$
\Box_c\phi = \partial_a\Psi,\ \phi(0,x) = (\partial_t\phi)(0,x) = 0,
\tag{70}
$$

$$
\Box_c\psi = \Psi,\ \psi(0,x) = (\partial_t\psi)(0,x) = 0
\tag{71}
$$

とし, ϕ_0 を $\Box_c\phi_0 = 0$, $\phi_0(0,x) = 0$, $(\partial_t\phi_0)(0,x) = \Psi(0,x)$ の解とおくと

$$
\phi = \partial_a\psi - \delta_{a0}\phi_0
\tag{72}
$$

を得る (ただし $\delta_{00} = 1$, $a \ne 0$ のとき $\delta_{a0} = 0$). 斉次方程式の解の評価は容易であるから, 本質的に ϕ の評価を得るためには $\partial\psi$ を, $\partial\phi$ の評価を得るためには $\partial^2\psi$ を評価すればよいことになる. 例えば $\|w_{c_i}|\partial u_i|_{\Gamma,2s-1}\|_{L^2}$ への寄与を計るには次の評価を用いる.

補題 9 (Klainerman – Sideris [11]). $c > 0$ とする.

$$
\Box_c\psi = \Psi,\ \psi(0,x) = (\partial_t\psi)(0,x) = 0
$$

とするとき, 次の評価式が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\|w_c(t,|\cdot|)\partial^2\psi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad \le C\left(\int_0^t \|\Psi(\tau,\cdot)\|_{\Gamma,1,2}d\tau + \|w_+(t,|\cdot|)\Psi(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right).
\end{aligned} \tag{73}
$$

証明. $\nabla_x\partial\psi$ と $\Delta\psi$ は, Γ に属するベクトル場と $\Box_c$ を用いて各点的に (69) のように書き換えることができる. これを用いると

$$
|w_c\nabla_x\partial\psi| + |w_c\Delta\psi| \le C\sum_{|\alpha|\le 1}|\partial\Gamma^\alpha\psi| + w_+|\Psi| \tag{74}
$$

を示すことができる. 右辺第一項の L^2 ノルムはエネルギー不等式から容易に評価できるので, 両辺の L^2 ノルムをとると, $\nabla_x\partial\psi$ と $\Delta\psi$ に関しては結果を得る. その他の2階微分の L^2 ノルムは, 部分積分を用いて $\Delta\psi$ の評価に帰着させることにより評価する.

最後に L^∞ 評価に際して必要な工夫について述べて, 本稿を終えたい. (H2) 条件の下での (SGE) の証明では, $|u|$ よりも $|\partial u|$ の方が少しだけ減衰が良いことを本質的に用いている. $R_{i,21}$ 以外の項からの寄与については, 補題 1 と 補題 2 の比較から分かるとおり, このことは比較的自然に分かる. しかし, $R_{i,21}$ からの寄与に関しては, 発散形式であることを用いて評価を行うため, 上記のことは1階微分よりも2階微分の方が減衰が良いという話に帰着される. これを見るためには次の補題を用いる.

補題 10. $i=1,\dots,N$ とする. $\Box_{c_i}\psi=\Psi$, $\psi(0,x)=(\partial_t\psi)(0,x)=0$ とするとき,

$$
|\partial^2\psi(t,x)| \le Cw_-(t,|x|)^{-1}\sum_{|\alpha|\le 1}|\partial\Gamma^\alpha\psi(t,x)| + \frac{w_+(t,|\cdot|)}{w_{c_i}(t,|\cdot|)}|\Psi(t,x)| \tag{75}
$$

が成立する. ただし $w_-(t,r):=\min\{w_0(t,r),w_{c_1}(t,r),\dots w_{c_N}(t,r)\}$ である.

証明: Ω を用いた書き換えにより

$$
|\nabla_x^2\phi(t,x)| \le Cw_0(t,|x|)^{-1}\sum_{|\alpha|\le 1}|\partial\Omega^\alpha\psi(t,x)| + C|\Delta\psi(t,x)| \tag{76}
$$

を得る. これと (74) 式を組み合わせることにより結果を得る.

(75) の右辺第2項は処理が容易であるので無視すると, $|\partial^2\psi|$ は $|\partial\Gamma\psi|$ よりも減衰が, 少なくとも w_- だけは速くなることが (75) 式から分かる.

References

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, *The null condition and global existence of solutions to systems of wave equations with different speeds*, in Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics, edited by S.Kawahara and T.Yanagisawa, Series on Adv. Math. for Appl. Sci., Vol. 48, World Scientific, 1998, 43–86.

[2] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer – Verlag, 1997.

[3] F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235 – 268.
[4] F. John, *Lower bounds for the life span of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 1 – 35.
[5] S. Katayama, *Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Chinese Ann. Math. **25B** (2004), 463 – 482.
[6] S. Katayama, *Global and almost-global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, Diff. Integral Eqs. **17** (2004), 1043 – 1078.
[7] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, J. Differential Equations **209** (2005), 140 – 171.
[8] S. Katayama and A. Matsumura, *Sharp lower bound for the lifespan of systems of semilinear wave equations with multiple speeds*, J. Math. Kyoto Univ., to appear.
[9] S. Katayama and K. Yokoyama, *Global small amplitude solutions to systems of nonlinear wave equations with multiple speeds*, Osaka J. Math., to appear.
[10] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Applied Math. **23** (1986), 293 – 326.
[11] S. Klainerman and T. C. Sideris, *On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 307 – 321.
[12] M. Kovalyov, *Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations*, J. Differential Equations **77** (1989), 73 – 83.
[13] H. Kubo and M. Ohta, *On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions*, Funkcial Ekvac. **48** (2005), 65–98.
[14] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japanese J. Math. **27** (2001), 113-202.
[15] M. Ohta, *Counterexample to global existence for system of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, Funkcialaj Ekvacioj, **46** (2003), 471 – 477.
[16] J. Schaeffer, *The equation* $\Box u = |u|^p$ *for the critical value of* p, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **101A** (1985), 31 – 44.
[17] T. C. Sideris and Shun-Yi Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 477 –488.
[18] W. A. Strauss, *Decay and asymptotics for* $\Box u = F(u)$, J. Funct. Anal. **2** (1968), 409 – 457.
[19] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609 – 632.