数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 137-141

分散型方程式における非線形共鳴の制御

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科* 中西賢次
Graduate School of Mathematics, Nagoya University Kenji Nakanishi

1. 要旨

非線形分散型(波動)方程式についての研究における、ここ20年位の技術的発展は、様々な伝播性の波動成分同士の相殺効果を測り、残りの共鳴相互作用を制御することが中心である。実際、Shatah の normal form, Klainerman の global Sobolev inequality, Bourgain の Fourier restriction norm, I-method, gauge 変換など、ほとんどの手法が共鳴・非共鳴成分の評価に深く関わっている。ここではフーリエ空間での normal form を用いて、初期値問題・特異極限問題におけるそれらの制御について考察したい。

2. 非共鳴成分と NORMAL FORM

まず簡単な例として、周期境界条件の KdV 方程式を考える:

$$u_t + u_{xxx} + (u^2)_x = 0, \tag{2.1}$$

ここで $u(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ が未知関数、$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ である。$\mathbb{T}$ 上のフーリエ級数展開を $\mathcal{F} : \varphi(x) \mapsto \mathcal{F}\varphi(k)$, $\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(k)e^{ikx}$ で表すと、線形化方程式 $u_t + u_{xxx} = 0$ の解は $u = e^{-t\partial_x^3}u(0) := \mathcal{F}^{-1}e^{itk^3}\mathcal{F}u(0)$ と書ける。これを用いて(2.1)の解を $u = \mathcal{F}^{-1}e^{itk^3}\widehat{u}$ とおけば、Duhamel の公式は次のように書ける:

$$\widehat{u}(t,k) = \widehat{u}(0,k) - \int_0^t \sum_{k=k_1+k_2} e^{-isk^3}(ik)\ [e^{isk_1^3}\widehat{u}(s,k_1)]\ [e^{isk_2^3}\widehat{u}(s,k_2)]\ ds, \tag{2.2}$$

ただし上の和は $k = k_1 + k_2$ を満たす全ての整数 k_1, k_2 について取る。phase 部分を合わせると、$-(k_1+k_2)^3 + k_1^3 + k_2^3 = -3(k_1+k_2)k_1k_2$ より、

$$\widehat{u}(t,k) = \widehat{u}(0,k) - \int_0^t \sum e^{-3iskk_1k_2}(ik)\ \widehat{u}(s,k_1)\ \widehat{u}(s,k_2)\ ds. \tag{2.3}$$

非共鳴条件 $kk_1k_2 \neq 0$ が満たされるとき、phase part は部分積分できる。$\widehat{u}$ の時間微分について方程式 $\widehat{u}_t = -e^{-itk^3}\mathcal{F}(u^2)_x$ を適用すると

$$-\left[\frac{e^{-3iskk_1k_2}}{-3k_1k_2}\widehat{u}(s,k_1)\widehat{u}(s,k_2)\right]_0^t + \frac{2}{3}\int_0^t e^{-isk^3}\mathcal{F}(u^2)(s,k_1)\frac{\mathcal{F}u(s,k_2)}{ik_2}ds \tag{2.4}$$

これを u へ戻せば、Fourier multiplier I を $\mathcal{F}I\varphi := \mathcal{F}\varphi/(ik)$ で定義すると

$$u(t) = e^{-t\partial_x^3}\left[u(0) + \frac{1}{3}(Iu(0))^2\right] - \frac{1}{3}(Iu(t))^2 + \frac{2}{3}\int_0^t e^{-(t-s)\partial_x^3}(u^2Iu)(s)ds. \tag{2.5}$$

今、空間平均 0 の初期値 $u(0)$, $\mathcal{F}u(0,0) = 0$ を考えると、方程式より $\mathcal{F}u(t,0) = 0$. 平均 0 の L^2 Sobolev 空間 を $\dot{H}^s(\mathbb{T})$ とおけば $I : \dot{H}^s(\mathbb{T}) \to \dot{H}^{s+1}(\mathbb{T})$ 有界作用素である。$s > 1/2$ のとき、Sobolev 空間の積評価 $H^sH^s \subset H^s$ と $e^{-t\partial_x^3}$ の H^s 有界性を用いれば、上式右辺の H^s ノルムは u の H^s ノルムで容易に評価され、これから初期値 $u(0)$ が H^s で小さい時に、固定点定理で時間局所解を構成することができる。

---

*現所属:京都大学 大学院理学研究科

$\mathcal{F}u(0,0) \neq 0$ の場合は以下のような平行移動で 0 の場合に帰着できる：

$$u = u' + \widehat{u}(0) \Rightarrow \dot{u}' + u'_{xxx} + 2\widehat{u}(0)u'_x + 2u'u'_x = 0, \tag{2.6}$$

だから $u''(t,x) = u'(t, x + 2\widehat{u}(0)t)$ は KdV の解で $\mathcal{F}u''(0,0) = 0$. また、初期値が H^s で大きい場合も以下のようなスケール変換で小さい場合に帰着できる：$\lambda > 0$ に対して

$$u_\lambda(t,x) := \lambda^2 u(\lambda^3 t, \lambda x), \tag{2.7}$$

は KdV の解で, $s > -3/2$ ならば $\lambda \to 0$ で $\|u_\lambda(0)\|_{H^s} \to 0$.

上の部分積分の計算を微分形で書けば

$$\mathcal{L}u = vw \Rightarrow \mathcal{L}(u - \frac{I}{3}IvIw) = \frac{I}{3}(\mathcal{L}IvIw + Iv\mathcal{L}Iw). \tag{2.8}$$

これから以下の等式が順次導かれる：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}u = -2uu_x, \\
&\mathcal{L}(u - (Iu)^2/3) = \frac{2}{3}u^2 Iu = \frac{1}{3}u(Iu^2)_x, \\
&\mathcal{L}(2u - (Iu)^2/3) = -(2u - (Iu)^2/3)_x u, \\
&\mathcal{L}(2u - (Iu)^2/3 + I/3(2u - (Iu)^2/3)Iu) = 1/3(u^2 Iu + I(u^3 + u^2(Iu)^2)), \\
&\mathcal{L}(3u + (Iu)^2/3 - 2/9I(Iu)^3) = I/3(u^3 + u^2(Iu)^2).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

最後の方程式は $s > 1/6$ の H^s において上と同様に Sobolev 不等式のみで解ける。さらに $L^2 \to L^4L^4$ の Strichartz 評価を使えば L^2 の初期値でも容易に解くことができる.

3. 共鳴成分の評価

上と同じ事を次の Zakharov 方程式系で考える:

$$\begin{cases} i\dot{u} - \Delta u = nu, \\ \ddot{n} - \Delta n = -\Delta|u|^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで $u : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{C}$, $n : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{R}$ は未知関数。一階方程式に直すため $N_+ := n - i|\nabla|^{-1}\dot{n}$, $N_- := \overline{N_+}$ とおけば $n = (N_+ + N_-)/2$,

$$\pm i\dot{N}_\pm + |\nabla|N = |\nabla||u|^2 \tag{3.2}$$

ただし Fourier multiplier を $\varphi(\nabla) := \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F}$ で表す。線形方程式の解作用素を用いて $u = \mathcal{F}^{-1}e^{i|\xi|^2 t}\widehat{u}$, $N_\pm = \mathcal{F}^{-1}e^{\pm i|\xi|t}\widehat{N}_\pm$ とおけば

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u}(0,\xi) - i\sum_{\pm}\int_0^t \int_{\xi=\xi_1+\xi_2} e^{i(-|\xi|^2 \pm |\xi_1| + |\xi_2|^2)s}\widehat{N}_\pm(s,\xi_1)\widehat{u}(s,\xi_2)ds, \\
&\widehat{N}_\pm(t,\xi_1) = \widehat{N}_\pm(0,\xi_1) \mp i\int_0^t \int_{\xi=\xi_1+\xi_2} e^{i(-|\xi|^2 \mp |\xi_1| + |\xi_2|^2)s}|\xi_1|\widehat{u}(s,\xi_2)\overline{\widehat{u}}(s,\xi)ds,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし $\xi = \xi_1 + \xi_2$ 上の積分は変数 ξ_1, ξ_2 に関する合成積である。非共鳴領域を $NR_\pm := \{\xi = \xi_1 + \xi_2,\ |-|\xi|^2 \pm |\xi_1| + |\xi_2|^2| \geq \varepsilon|\xi_1|(|\xi| + |\xi_2|)\}$ として、ここでのみ

部分積分すれば、その結果は

$$
(3.4)\qquad \begin{aligned}
&\int_0^t e^{i|\xi|^2 s}\left(B_\pm[|\nabla||u(s)|^2,u(s)]+B_\pm[N_\pm(s),n(s)u(s)]\right)ds,\\
&\int_0^t e^{\pm i|\xi_1|s}|\nabla|B_\pm^*[n(s)u(s),\overline{u}(s)]ds,
\end{aligned}
$$

ただし双線形作用素 $B_\pm$ は次で定義され、$B_\pm^*$ は ξ_1 に関する双対である。

$$
(3.5)\qquad B_\pm[\varphi,\psi](\xi)=\int_{NR_\pm}\frac{\varphi(\xi_1)\psi(\xi_2)}{-|\xi|^2\pm|\xi_1|+|\xi_2|^2}d\xi_2.
$$

$u\in H^{1/2}$, $n\in L^2$ の場合、上の３次項は H^s の積で評価できて、(3.4) の被積分関数はそれぞれ次のように評価できる。

$$
(3.6)\qquad \begin{aligned}
\|\cdot\|_{L^2H^{1/2}} &\lesssim \||u|^2\|_{L^2H^{1/2}}\|u\|_{L^\infty H^{1/2}}+\|N_\pm\|_{L^\infty L^2}\|nu\|_{L^2L^2}\\
&\lesssim(\|u\|_{L^\infty H^{1/2}}+\|N_\pm\|_{L^\infty L^2})^2\|u\|_{L^2B_6^{1/2}},\\
\|\cdot\|_{L^2L^2} &\lesssim \|nu\|_{L^2L^2}\|u\|_{L^\infty H^{1/2}}\lesssim\|n\|_{L^\infty L^2}(\|u\|_{L^\infty H^{1/2}}+\|u\|_{L^2B_6^{1/2}})
\end{aligned}
$$

ここで $\|u\|_{L^2B_6^{1/2}}$ ノルムは Schrödinger 方程式の Strichartz 評価から得られる。

共鳴領域 $R:=(NR)^c$ は $|-|\xi|^2\pm|\xi_1|+|\xi_2|^2|\le\varepsilon|\xi_1|(|\xi|+|\xi_2|)$ より、$||\xi|-|\xi_2||\le\langle\varepsilon\xi_1\rangle$ だから $|\xi_1|\lesssim\langle\xi\rangle\sim\langle\xi_2\rangle$. この領域では例えば $u\in H^{1/2}$, $N\in L^2$ のとき、Strichartz 評価を用いれば、それぞれ次で評価される：

$$
(3.7)\qquad \|(nu)_R\|_{L^2H^{1/2}_{6/5}}\lesssim T^{1/4}\|n\|_{L^\infty L^2}\|u\|_{L^4H_3^{1/2}},\qquad \||\nabla||u|_R^2\|_{L^1L^2}\lesssim T^{1/4}\|u\|^2_{L^{8/3}H_4^{1/2}}
$$

これらを合わせる事で $(u,N_\pm)\in H^{1/2}\times L^2$ で時間局所解を構成できる。

4. 特異極限における共鳴

Zakharov 方程式系

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} i\dot{u}-\Delta u=nu,\\ \pm i\dot{N}+|\alpha\nabla|N=|\alpha\nabla||u|^2.\end{cases}
$$

の亜音速極限 $\alpha\to\infty$ は、非線形 Schrödinger 方程式

$$
(4.2)\qquad i\dot{u}-\Delta u=|u|^2u,\quad N=|u|^2
$$

で与えられる。このとき非線形項の phase は $-|\xi|^2\pm\alpha|\xi_1|+|\xi_2|^2$ で与えられ、共鳴領域 $R_\alpha:|-|\xi|^2\pm\alpha|\xi_1|+|\xi_2|^2|\ll1\ll|\xi_1|\sim|\xi|\sim\alpha$ では上の議論は適用できない。実際、２次非線形項を外力として逐次近似

$$
(4.3)\qquad i\dot{u}_k-\Delta u_k=n_{k-1}u_{k-1},\ \pm i\dot{N}_k+|\alpha\nabla|N_k=|\alpha\nabla||u_{k-1}|^2,
$$

を行うと第２近似 E_2 が $\alpha\to\infty$ の時に上の共鳴領域で (H^s の意味で) 発散する初期値が構成できる。[7] では, (u,n) の $|\xi|\sim|\xi_1|\sim\alpha$ 成分をフーリエ空間で分離し、局在化した非線形エネルギーの有界性を用いて共鳴成分を評価した。他方、一般に共鳴成分の影響は空間的に局在化した解を考えることで相当弱めることができる。今の問題では [5] において、十分な空間減衰と滑らかさを持つ Sobolev 空間では逐次近似法によって α に一様な評価を得られることが示された。フーリエ局在化した

非線形エネルギーによる方法は更に複雑な極限に対しても適用できる。Zakharov 方程式は本来ベクトル値で $u:\mathbb{R}^{1+3}\to\mathbb{C}^3$, Δ は $grad, curl$ で異なる係数を持つ：

$$i\dot{u}-\nabla\nabla\cdot u+\beta\nabla\times\nabla\times u=nu, \tag{4.4}$$

ここで $\nabla\nabla\cdot u$ は熱力学的、$\nabla\times\nabla\times$ は電磁力による効果であり、物理的には $\beta\gg 1$ となる。この方程式は β が固定されている限り、*grad-curl* に分解することで $\beta=1$ の場合と全く同じ扱いができるが、$\beta\to\infty$ の極限を考えると、*grad* と *curl* で二つの異なる共鳴周波数 $\alpha, \alpha/\beta$ が現れ、それらの相互作用を制御する必要が生じる。この場合、α と β の大小関係に応じて α でのエネルギー評価、α と α/β の共鳴成分を合わせたエネルギー評価、及び $\alpha/\beta\sim\alpha$ の間を全て含めたエネルギー評価を組み合わせることで一様有界な評価を得ることができる [9]。これから次の方程式の解への収束が示される：

$$i\dot{u}-\Delta u=P(|u|^2u),\ \nabla\times u=0. \tag{4.5}$$

ただし P は curl-free subspace への射影である。

5. 共鳴成分による非線形消散効果

非線形共鳴が非自明な結果をもたらす例として、Nader Masmoudi との共同研究により最近発見した興味深い現象について報告する [8]。次の Klein-Gordon-Zakharov 方程式系の特異極限を考える：

$$\begin{cases} c^{-2}\ddot{E}-\Delta E+c^2E=nE,\\ \alpha^{-2}\ddot{n}-\Delta n=-\Delta|E|^2. \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで $E:\mathbb{R}^{1+3}\to\mathbb{R}^3, n:\mathbb{R}^{1+3}\to\mathbb{R}$ が未知関数、c, α は正定数である。$(c,\alpha)\to\infty$ の近似により（少なくとも形式的に）非線形 Schrödinger 方程式

$$2i\dot{u}-\Delta u=|u|^2u,\quad E\sim\Re(e^{ic^2t}u),\ n\sim|u|^2. \tag{5.2}$$

が得られる。この時、物理的には $c\gg\alpha$ を仮定するのが自然だが [7]、これを仮定しない場合は様々な非線形共鳴が生じ、上の極限方程式は必ずしも正しいとは限らない。特に、α と c^2 が同程度の大きさの場合（c^2 はプラズマ振動数、α はイオン音速にあたる）には、非線形共鳴は極限においても無視できず、L^2 ノルムを減衰させるような消散性の項として残る：$\alpha\gamma=2c^2\to\infty$ (γ 固定) のとき $E\sim\Re(e^{ic^2t}u)$,

$$2i\dot{u}-\Delta u=|u|^2u+PV\Big(\frac{|\nabla|^2}{|\nabla|^2-\gamma^2}\Big)(u^2)\overline{u}-\frac{i\gamma\pi}{2}\delta_{|\nabla|=\gamma}(u^2)\overline{u}, \tag{5.3}$$

ただし、$PV\cdots$ はコーシーの主値、$\delta_{|\nabla|=\gamma}$ は球面上のデルタ関数による Fourier multipliers. この方程式の L^2 ノルムは次のように共鳴周波数 $(|\xi|=\gamma)$ に集約した減衰項を持つ。

$$\partial_t\|u\|_2^2=-\frac{\gamma\pi}{2}\big\langle\delta_{|\nabla|=\gamma}(u^2)\,\big|\,u^2\big\rangle_x\leq 0. \tag{5.4}$$

ただし、プラズマのモデルにおいて (5.1) の形で特異極限を考えるには適当なスケール変換を行う必要があり、物理量や物理定数は全てスケール変換後のものと考えると、α/c は粗く言って電子とイオンの質量比の平方根となる [7]。従ってこの極限はプラズマの記述には合わないと考えられるが、非線形共鳴が特異極限に散逸項をもたらす例として興味深いと思われる。

さらに $\gamma\to+0$ の極限を取ると非線形 Schrödinger 方程式が得られるが、その非線形項の係数は通常の Zakharov 空の極限とは異なり、非線形 Klein-Gordon 方程

式の非相対論極限として得られるものと同じものである。他方、$\gamma \to \infty$ では少なくとも形式的に通常の非線形項が得られる。しかしこの極限では (5.3) の非線形項の特異性が強いため、解の収束レベルで正当化できるかどうかは今のところ不明である。

今後の課題として、ここまで考えてきた共鳴現象は分散性がかなり強いものだが、非線形性の強いものとしては、孤立波解も一種の共鳴現象と言える。これらの共鳴現象が全く（かなり）性質の異なるものか、あるいは互いに遷移し得るものか、という疑問は一般解の大域挙動を調べようとすると重大な問題になると思われる。例えば、$t \to -\infty$ で分散性（散乱性）の波だけからなる解が、$t \to \infty$ において（安定な）孤立波解（+分散波）を生じることがあるだろうか？

References

[1] J. Bourgain, *A remark on normal forms and the "I-method" for periodic NLS*, J. Anal. Math. **94** (2004), 125–157.

[2] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 705–749.

[3] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system.* J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 384–436.

[4] N. Hayashi, T. Mizumachi and P. I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations **16** (2003), no. 2, 159–179.

[5] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the Zakharov and Zakharov-Schulman systems.* J. Funct. Anal. **127** (1995), no. 1, 204–234.

[6] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 3, 321–332.

[7] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *From the Klein-Gordon-Zakharov system to the nonlinear Schrödinger equation*, to appear in JHDE.

[8] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *Nonlinear dissipation created by resonance in the singular limit of the Klein-Gordon-Zakharov system*, in preparation.

[9] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *Various singular limits for the Zakharov systems*, in preparation.

[10] J. Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 5, 685–696.

[11] A. Shimomura, *Modified wave operators for the coupled wave-Schrödinger equations in three space dimensions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), no. 6, 1571–1586.

[12] H. Takaoka and Y. Tsutsumi, *Well-posedness of the Cauchy problem for the modified KdV equation with periodic boundary condition*, Int. Math. Res. Not. **2004**, no. 56, 3009–3040.

[13] T. Tao, *Global regularity of wave maps. I. Small critical Sobolev norm in high dimension*, Internat. Math. Res. Notices **2001**, no. 6, 299–328.