

N 人売り出しのサイレント・ゲーム

近畿大学経営学部 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

School of Business Administration, Kinki University

大阪府立大学大学院理学系研究科 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)

Graduate School of Science, Osaka Prefecture University

1. はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする n 人非 0 和ゲームである。

n 人のプレーヤ (Player 1, ..., n) が、小豆や大豆といった生産物の販売権を占有している。各プレーヤの市場占有率は対等であり、互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫があり、各期の初めに生産されると、 n 人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すのが最適なタイミングを考えなければならない。次の期に入ると新しい収穫があるので、全プレーヤはこの生産物を各期の終わりまでに売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、ある時点までは時間の経過に伴って滑らかな上昇し、その時点を過ぎると滑らかに減少し、次の収穫期の前には 0 となってしまう。さらに、 n 人の誰もが売りに出さない限り、評価額の変動は滑らかであるが、誰か一人が自分の持分を売りに出すと急激に (不連続的に) 評価額は下落し、その後はまた時間の経過に伴った滑らかな変動を続ける。このような評価額の滑らかな変動と急激な下落が残り $n-1$ 人全員が売りつくすまで繰り返えされる。 n 人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額の変化と、他の $n-1$ 人の売り出し時刻を考えに入れながら、自分の売り出し時刻を決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買や大形船舶の発注のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。

このような問題にあつては、従来型のタイミング・ゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。 n 人の中の誰か一人のプレーヤが自分の持分を売りに出すとその瞬間、そのことが直ちに残り $n-1$ 人のプレーヤに知られてしまう場合、そのプレーヤはノイジー・プレーヤという。逆に、あるプレーヤが売りに出したとき、情報防護がされており、そのことが残り $n-1$ 人の誰にも知られず、残り $n-1$ 人の誰かが自分の持分を売りに出したとき初めてその時刻までにそのプレーヤが彼の持分を既に売っていたことを知る場合、そのプレーヤはノイジー・プレーヤと呼ばれる。 n 人の全てがサイレント・プレーヤであるようなゲームをサイレント・ゲームといい、 n 人の全てがノイジー・プレーヤであるゲームをノイジー・ゲームと呼ぶことにする。また、 n 人の中の k 人はサイレント・プレーヤであり、残り $n-k$ 人はノイジー・プレーヤとなっているゲームをサイレント・ノイジー・ゲームと呼ぶことにする。本報告では、このクラスのモデルの第一歩として、サイレント・ゲームに関する定式化と主要結果を取り扱う。ノイジー・ゲームとサイレント・ノイジーに関しては、今後の課題として残しておく。

2. 記号と仮定

問題を見やすくするため、収穫してから評価額が0になるまでの期間を単位区間 $[0, 1]$ で表現する。また、以下のような記号を導入し、後の議論のため、それらに付随した仮定を以下のように設定する。

$v(t)$: n 人のどのプレーヤもまだ売りに出していないときの、時刻 $t \in [0, 1]$ における生産物の価値。

微分可能であり

$$v'(t) \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ for } \begin{cases} 0 \leq t \leq m \\ m < t \leq 1 \end{cases}$$

を仮定する。

r : n 人の誰か1人が売り出したとき、売り出す度に生産物の価値が下落する割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定する。すなわち、誰か1人のプレーヤが売りに出すと、 $t \in [0, 1]$ での評価額は $v(t)$

から $rv(t)$ へ減少する。また、 k 人のプレーヤが売りに出した後は $r^k v(t)$ へ減少する。

ここで、もし k 人のプレーヤが同時に売り出したときは、各プレーヤは、その時点 $t \in [0, 1]$ における生産物の評価額 $\hat{v}(t)$ ではなく、減少後の評価額は $r^k \hat{v}(t)$ を受け取るものとする。

3. 定式化と主要結果

本報告では、 n 人のプレーヤ全員がサイレント・プレーヤである場合を扱う。すなわち n 人のどのプレーヤも情報防護がしっかりしており、お互いに各時点でそれまでに何人が売りに出したのか全くわからず、自分が売りに出したとき、その時点の評価額から初めて知ることが出来る。このような状況にあつては、Player i の純戦略は $x_i \in [0, 1]$ と定義するのが自然である。また、このゲームにあつては、どのプレーヤにとっても条件は同じであるから、各プレーヤにとっては自分の設定時点より誰が先に行動したのかは問題でなく、それまでに何人が行動したのかが問題となってくる。しかしその人数を学習できない。そうすると、Player 1 が純戦略 $x_1 \in [0, 1]$ を取ったときのプレーヤ 1 への期待利得に注目し、他の $n-1$ 人の行動時刻を小さい方から順に並べたものを $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(n-1)}$ とおくと、Player 1 にとっての期待利得 $M_1(x_1, \dots, x_n)$ は

$$(1) \quad M_1(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} v(x_1), & 0 \leq x_1 < y_{(1)} \\ rv(x_1), & y_{(1)} \leq x_1 < y_{(2)} \\ \dots, & \dots \\ r^{n-1}v(x_1), & y_{(n-1)} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

で与えられる。

上記の利得関数を観察し、 $v(x_1)$ が単峰関数であり $x_1 = m$ (ただし、 $0 < m \leq 1$) で最大値を取ることから、次のような混合戦略 (cdf) $F(x)$ を考える：区間 $[0, m]$ 内に点 a を選び

$$(2) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \int_a^x f(t) dt, & a \leq x < m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と置く。すなわち、区間 (a, m) 上の pdf $f(x) > 0$ のみで構成される cdf とする。そこで、今 Player 1 は純戦略 x を、他の $n-1$ 人のプレーヤは(2)で与えられる混合戦略 $F(x_i)$ を選んだときの Player 1 への期待利得 $M_1(x, F, \dots, F)$ を計算すると

$$M_1(x, F, \dots, F) = \begin{cases} v(x), & 0 \leq x < a \\ v(x) \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \{rF(x)\}^k \{1-F(x)\}^{n-k-1} \right], & a \leq x < m \\ r^{n-1}v(x), & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

が得られる。整理すると

$$(3) \quad M_1(x, F, \dots, F) = \begin{cases} v(x), & 0 \leq x < a \\ v(x)[1 - (1-r)F(x)]^{n-1}, & a \leq x < m \\ r^{n-1}v(x), & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

とまとめられる。ここで

$$M_1(x, F, \dots, F) = \text{const for } x \in (a, m)$$

と置くと

$$v'(x)[1 - (1-r)F(x)] = (n-1)(1-r)f(x)v(x) > 0, \quad a < x < m$$

が得られ、従って

$$(4) \quad F(x) = \{1/(1-r)\} [1 - \{c/v(x)\}^{1/(n-1)}], \quad a < x < m$$

が得られる。ここに c は積分定数である。境界条件

$$F(a) = 0 \quad \text{かつ} \quad F(m) = 1$$

を代入すると

$$c = r^{n-1}v(m) \quad ; \quad v(a) = r^{n-1}v(m)$$

とならなければならないが、この条件は $v(0) \leq r^{n-1}v(m)$ が成立する時に限り満足される。

そこで、 $v(0) \leq r^{n-1}v(m)$ が成立する場合を最初に考察する。この時、方程式 $v(a) = r^{n-1}v(m)$ を満足する根 a は 区間 $[0, m]$ において唯一つ存在する。そこで、この根を a^0 と置くと、次のような関係が成立する：

$$(5) \quad M_1(x, F, \dots, F) = \begin{cases} v(x) < v(a) = r^{n-1}v(m), & 0 \leq x < a \\ v(a) = r^{n-1}v(m), & a \leq x \leq m \\ r^{n-1}v(x) < r^{n-1}v(m), & m < x \leq 1 \end{cases}$$

以上より、定理1を得る。

定理1. いま $v(0) \leq r^{n-1}v(m)$ と仮定し、 a^0 を方程式 $v(a) = r^{n-1}v(m)$ の区間 $[0, m]$ における唯一つの根とする。そこで、次のようなcdf で与えられる混合戦略を考える：

$$F^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \{1/(1-r)\}[1 - \{v(a^0)/v(x)\}^{1/(n-1)}] & a \leq x < m. \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

そうすると n 個の混合戦略の組 (F^0, \dots, F^0) は (1)式で与えられる n 人非0和サイレント・ゲームの Nash 点を構成する。この時、この戦略に基づく Player i にとっての期待利得は

$$v_i = M_i(F^0, \dots, F^0) = r^{n-1}v(m), \quad i = 1, \dots, n$$

で与えられる。

この定理は、 n 人のプレーヤが平衡戦略を用いるとするならば、どのプレーヤも、 $v(t)$ がどのような関数であるかに関係なく、生産物の評価額が上昇している間に行動を集中させざるを得なくなることを意味している。

次に、 $v(0) > r^{n-1}v(m)$ が成立する場合を考察しよう。我々は、もし k 人のプレーヤが同時刻 $t \in [0, 1]$ に行動したとすると、 k 人の各々はその時点の評価額 $\hat{v}(t)$ ではなく、減少後の評価額 $r^k \hat{v}(t)$ を得ることになると、仮定した。そうすると

$$M_1(x, 0, \dots, 0) = r^{n-1}v(x) \leq r^{n-1}v(m) < v(0), \quad 0 \leq x \leq m$$

が成立することになる。また、さらに

$$M_1(0, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} v(0) > r^{n-1}v(m), \\ r^k v(0), \end{cases} \quad \text{for } \begin{cases} 0 < y_{(1)} \leq \dots \leq y_{(n-1)} \leq 1 \\ 0 = y_{(k-1)} < y_{(k)} \leq \dots \leq y_{(n-1)} \leq 1 \end{cases}$$

も成立するので、全プレーヤは点0に十分近い時点で売り出したいが、他のプレーヤとは同時に売り出すのは避けようとする。

また、

$$F(x) = \begin{cases} \{1/(1-r)\}[1 - \{v(0)/v(x)\}^{1/(n-1)}] & 0 \leq x < m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

を考えると

$$F(0) = (1/(1-r))[1 - \{v(0)/v(0)\}] = 0,$$

であり

$$F(m) = (1/(1-r))[1 - \{v(0)/v(m)\}^{1/(n-1)}] < (1/(1-r))[1 - \{r^{n-1}v(m)/v(m)\}^{1/(n-1)}] = 1.$$

いま

$$(6) \quad \alpha = 1 - \{1/(1-r)\}[1 - \{v(0)/v(m)\}^{1/(n-1)}]$$

と置くと

$$(7) \quad M_i(x, F, \dots, F) = \begin{cases} v(0) & 0 \leq x < m \\ v(x) = r^{n-1}v(m), & x = m \\ r^{n-1}v(x) < r^{n-1}v(m) < v(0), & m < x \leq 1 \end{cases}$$

を得る。そこで

$$(8) \quad F^*(x) = \begin{cases} \{1/(1-\alpha)\} \{1/(1-r)\} [1 - \{v(0)/v(x)\}^{1/(n-1)}], & 0 \leq x < m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と置くと

$$(9) \quad F^*(0) = 0 \quad : \quad F^*(m) = 1$$

を満足し、

$$(10) \quad \begin{aligned} v(x)[1 - (1-r)F^*(x)]^{n-1} \\ = v(x)\{1/(1-\alpha)\}[\{v(0)/v(x)\}^{1/(n-1)}]^{n-1} \\ = \{1/(1-\alpha)\}v(0), \end{aligned} \quad 0 \leq x < m$$

となるから

$$(11) \quad M_i(x, F, \dots, F) = \begin{cases} \{1/(1-\alpha)\}v(0), & 0 \leq x < m \\ r^{n-1}v(m), & x = m \\ r^{n-1}v(x) < r^{n-1}v(m) < v(0), & m < x \leq 1 \end{cases}$$

が成立する。

以上より次の定理を得る。

定理 2. いま、 $v(0) > r^{n-1}v(m)$ とする。このとき α を

$$\alpha = 1 - \{1/(1-r)\}[1 - \{v(0)/v(m)\}^{1/(n-1)}] > 0$$

とおき、次のような cdf を考える：

$$F^*(x) = \begin{cases} \{1/(1-\alpha)\} \{1/(1-r)\} [1 - \{v(0)/v(x)\}^{1/(n-1)}], & 0 \leq x < m \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

そうすると n 個の混合戦略の組 (F^*, \dots, F^*) は (1)式で与えられる n 人非 0 和サイレント・ゲームの Nash 点を構成する。この時、この戦略に基づく Player i にとっての期待利得は

$$v_i = M_i(F^*, \dots, F^*) = \{1/(1-\alpha)\}v(0), \quad i = 1, \dots, n$$

で与えられる。

この定理によると、時点 m における生産物の評価額がそれほど大きくないか、プレーヤの数が多きときは $v(0) > r^{n-1}v(m)$ と考えてよい。このような時も、区間 $(0, m)$ にその微小部分の密度に比例して確率を集中させることが、平衡戦略となることを示している。

更に、定理 1 と定理 2 に基づけば、 $v(x)$ がどのような関数であっても、区間 $(0, m) \subset [0, 1]$ の中に確率を密度関数の形で分布させ、 $[m, 1]$ の上には全く確率を与えないことが平衡に繋がることとなる。

4. 今後へ残された問題

ここでは割引率 r は全区間を通じて一定と仮定した。しかし、現実のこの種の問題にあつては、時間の経過や $v(x)$ の変化に伴って変化すると考えた方が自然かもしれない。

また、本報告では、サイレント・ゲームを扱ったが、ノイジー・ゲームの方がより現実的であろう。しかしながら、どのプレーヤも残り $n-1$ 人の行動時刻が学習できるため、純戦略の設定でさえ難しい。

参考文献

- 1 M. Dresher, *Games of Strategy : Theory and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
- 2 S. Karlin, *Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics*, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
- 3 Y. Teraoka and Y. Yamada, *Games of production development in manufacturing*, Lecture Note in Economic and Mathematical Systems 445, *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing*, Springer, Berlin, 58-67, 1997.
- 4 Y. Teraoka and H. Hohjo, *N-person games on territory*, *Game Theory and Applications*, Vol. V, Nova Science Publishers, Inc., New York, 134-141, 2000.
- 5 Y. Teraoka and H. Hohjo, *Two person games of timing on sale*, *Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research*, Nanzan University, Nagoya, 281-289, 2005.
- 6 Y. Teraoka and H. Hohjo, *N-person silent game on sale*, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, Vol.63, 237-240, 2006.