

ルール番号 40 の基本セルオートマトンと確率測度

大鑄 史男

名古屋工業大学

〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町

E-mail: ohi.fumio@nitech.ac.jp

Abstract:

ルール番号 40 の基本セルオートマトンについて, [12] に従って spreading rate 及び Lyapunov exponent を概観し, その後にこれらの値が, ある区間力学系の不変測度に関する相対頻度の期待値に一致することを示唆する.

1. Introductory Preliminaries

基本セルオートマトン (elementary cellular automaton (ECA)) は, $\{0, 1\}$ と $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ との組 $(\{0, 1\}, g)$ であり, 簡単に ECA g と書かれる. g は local transition function の呼ばれ, 近傍系を意味する.

ECA g によって, $\mathcal{A} \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ から \mathcal{A} への写像 g が

$$x \in \mathcal{A}, \quad (g(x))_i = g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

として定義される. この g を global transition function と呼ぶ.

\mathcal{A} 上の距離 d を次のように定義する.

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}, \quad x, y \in \mathcal{A},$$

これによって位相的な力学系 (\mathcal{A}, g) が得られる.

\mathcal{A} の要素は configuration と呼ばれ, 初期 configuration $x \in \mathcal{A}$ の軌道は, 以下に定義される系列 $\{g^t(x)\}_{t=1}^{\infty}$ である.

$$g^0(x) = x, \quad g^{t+1}(x) = g(g^t(x)), \quad t \geq 0.$$

ECA g のルール番号 $R(g)$ は

$$R(g) = \sum_{(a,b,c)} g(a, b, c) 2^{a*4+b*2+c}.$$

で定義されるが, ルール番号 40 の local transition function g_{40} は次の表によって与えられる.

(a, b, c)	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 1)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
$g_{40}(a, b, c)$	0	0	1	0	1	0	0	0

$$\mathcal{S} = \{ (0, 1_{m_i})_{i=-\infty}^{\infty} \mid m_i = 1 \text{ or } 2, i \in \mathbb{Z} \} \subset \mathcal{A},$$

としたとき,

$$\forall x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g^t(x) = 0,$$

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad g_{40}(x) = \sigma_L(x),$$

であることが [12] で示されている. ここで σ_L は, left-shift transformation である.

本稿では、まず [12] に従い、 g_{40} による $x \in S$ の spreading rate と Lyapunov exponent を眺め、その後

$$S' = \{(0, 1_{m_i}) \mid m_i = 1 \text{ or } 2, i \in \mathbf{N}\}$$

上での $g_{40} = \sigma_L$ の動きをある区間力学系と関係付け、その不変測度に関するあるパターンの相対頻度が、先に求めた spreading rate に一致することを示す。

Notations

(1) $x \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} x_{i,j} &\equiv (x_i, \dots, x_j) \quad (i \leq j), \\ x_{\leftarrow, i} &\equiv (\dots, x_{i-1}, x_i), \\ x_{j, \rightarrow} &\equiv (x_j, x_{j+1}, \dots). \end{aligned}$$

(2) $\alpha_i \in \{0, 1\}^{n_i}$, $\beta_i \in \{0, 1\}^{m_i}$, $n_i \geq 1$, $m_i \geq 1$, $i \in \mathbf{Z}$, に対して、次のように定義する。

$$(\alpha_i, \beta_i)_{i=-\infty}^{+\infty} = (\dots, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_{n-1}^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_{m-1}^{-1}, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{n_0}^0, \beta_1^0, \dots, \beta_{m_0}^0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1}^1, \beta_1^1, \dots, \beta_{m_1}^1, \dots),$$

ここで、 $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{n_i}^i)$, $\beta_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_{m_i}^i)$, $i \in \mathbf{Z}$.

(3) 0 は次の三つのうちのいずれかを意味する。いずれが意味されるかは、前後の文脈から理解できる。

$$(\dots, 0, 0, 0, \dots), (\dots, 0, 0,) \text{ or } (0, 0, \dots).$$

(4) ブロック $\alpha \in \{0, 1\}^n$ を i 個並べることで得られるブロックを

$$(\alpha)_i \equiv (\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_i)$$

とする。また、 α の長さを

$$|\alpha| = n$$

と定める。

(5) $x \in A$ と長さが有限であるブロック c に対して

$$N(c \mid x_{i,j}) \equiv \#\{k \mid (x_k, \dots, x_{k+|c|-1}) = c, i \leq k \leq j - |c| + 1\},$$

と定義する。これは、 $x_{i,j}$ に含まれるブロック c の個数を意味する。

2. Spreading Rate and Lyapunov Exponent

Shereshevsky[13] に従い、ECA g の $x \in A$ における Lyapunov exponent は次のように定義される。 $s \in \mathbf{Z}$ として

$$\begin{aligned} W_s^+(x) &\equiv \{y \in A \mid \forall i \geq s, y_i = x_i\}, \quad W_s^-(x) \equiv \{y \in A \mid \forall i \leq s, y_i = x_i\}, \\ \tilde{\Lambda}_t^+(x) &\equiv \min \{s \mid g^t(W_0^+(x)) \subset W_s^+(g^t(x))\}, \quad \Lambda_t^+(x) \equiv \max_{j \in \mathbf{Z}} \{\tilde{\Lambda}_t^+(\sigma_L^j x)\}, \\ \tilde{\Lambda}_t^-(x) &\equiv \max \{s \mid g^t(W_0^-(x)) \subset W_s^-(g^t(x))\}, \quad \Lambda_t^-(x) \equiv \min_{j \in \mathbf{Z}} \{\tilde{\Lambda}_t^-(\sigma_L^j x)\}, \end{aligned}$$

とする。ここで、 $\sigma_L^j = \sigma_R^{-j}$ for $j < 0$ であり、 σ_R は right-shift transformation である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_t^+(x)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_t^-(x)}{t}$$

の極限が存在するとき、それぞれを x における右及び左 Lyapunov exponent と呼ぶ。
 $x, y \in \mathcal{A}$ に対して

$$DFR(x, y) \equiv \sup\{i \mid x_i \neq y_i\}, \quad DFL(x, y) \equiv \inf\{i \mid x_i \neq y_i\},$$

とおく。次の Lemma は spreading rate と Lyapunov exponent を結びつける。

Lemma 2.1 . ECA g において, configuration $x \in \mathcal{A}$ と $t \in \mathbb{N}_+$ に対して, 次の関係が成立する。

$$(1) \quad \max_{y \in W_0^+(x)} DFR(g^t(x), g^t(y)) = \min\{s \mid g^t(W_0^+(x)) \subset W_s^+(g^t(x))\} - 1,$$

$$(2) \quad \min_{y \in W_0^-(x)} DFL(g^t(x), g^t(y)) = \max\{s \mid g^t(W_0^-(x)) \subset W_s^-(g^t(x))\} + 1.$$

$n_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{Z}$) を次のように定義する。

$$x \in \mathcal{A}, \quad (n_j(x))_i = \begin{cases} x_i, & i \neq j, \\ \bar{x}_i, & i = j. \end{cases}$$

n_j は, configuration x の j 番目の状態を逆転させる。

ECA g に対して,

$$\Gamma_t^+(x) \equiv \max_{j \in \mathbb{Z}} \{DFR(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j\}, \quad \Gamma_t^-(x) \equiv \min_{j \in \mathbb{Z}} \{DFL(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j\}.$$

とし,

$$\gamma^+(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t^+(x)/t, \quad \gamma^-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t^-(x)/t$$

の極限が存在するとき、それぞれを x における右および左 left spreading rate と呼ぶ。spreading rate の定義は Ilachinski[5] に従っている。

Theorem 2.2 ECA g において, $x \in \mathcal{A}$ と $t \in \mathbb{N}_+$ に対して次の関係が成立する。

$$(1) \quad \Lambda_t^+(x) = \max_{j \in \mathbb{Z}} \max_{y \in W_j^+(x)} \{DFR(g^t(x), g^t(y)) - j\} + 1, \quad \Gamma_t^+(x) \leq \Lambda_t^+(x).$$

$$(2) \quad \Lambda_t^-(x) = \min_{j \in \mathbb{Z}} \min_{y \in W_j^-(x)} \{DFR(g^t(x), g^t(y)) - j\} - 1, \quad \Lambda_t^-(x) \leq \Gamma_t^-(x).$$

Corollary to Theorem 2.2 ECA g と configuration $x \in \mathcal{A}$ に対して, 次の不等号関係が成立する。

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Gamma_t^+(x) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_t^+(x), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Gamma_t^+(x) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_t^+(x).$$

よって極限が存在するとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Gamma_t^+(x) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_t^+(x).$$

同様に

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_t^-(x) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Gamma_t^-(x), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_t^-(x) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Gamma_t^-(x),$$

であり, 極限が存在するとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_t^-(x) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Gamma_t^-(x).$$

一般的に spreading rate と Lyapunov exponent は一致しないが, ECA が left most permutive または right most permutive であれば一致することが分かる [12].

3. Spreading Rate and Lyapunovs Exponent of Rule 40

ルール 40 において $x \in \mathcal{S}$ の spreading rate と Lyapunov exponent が一致することは [12] で示されている. $x \in \mathcal{S}$ における spreading rate は, 次のようにして定められる.

次の Lemma 3.1 は本稿では用いないが, ルール 40 の性質を示すものであり, ここに掲げておく.

本節以降ではルール 40 のみを扱うため, 煩雑さを避け簡単のために g および g と書き, ルール番号 40 は明記しない.

Lemma 3.1

$\alpha \in \{01, 011\}^{\mathbb{N}^+} \cup_{n \in \mathbb{N}} \{01, 011\}^n \times \{0\}$, $\beta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^-}$, $x = (\beta, \overset{0}{0}, \alpha)$, に対して,

$$T \equiv \sup\{t \mid \{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = t\} \neq \emptyset\},$$

$$0 \leq t \leq T, \quad n_t \equiv \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = t\}.$$

とすれば, 次のことが成立する.

- (1) $N(011|x_{1,n}) \leq N(01|x_{1,n})$.
- (2) $t \leq T$, $x_{n_t} = 1$, $n_t = 2N(01|x_{1,n_t}) + N(011|x_{1,n_t})$.
- (3) $1 \leq t < T$, $(g^t(x))_{0, \rightarrow} = (0, 0_{N(01|x_{1,n_t})}, x_{n_t+1, \rightarrow})$, $t \geq T$, $(g^t(x))_{0, \rightarrow} = 0$.

Example 3.2 Lemma 3.1 を説明するために以下の x に対して, n_t , $N(01|x_{1,n_t})$ と $N(011|x_{1,n_t})$, $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ を示す.

$$(x)_{0, \rightarrow} = (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \overset{5}{0}, \overset{6}{1}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{1}, \overset{11}{0}, \overset{12}{1}, \overset{13}{0}, \overset{14}{1}, \overset{15}{1}, \overset{16}{0}, \overset{17}{1}, \overset{18}{0}, \overset{19}{1}, \overset{20}{1}, \dots)$$

$$n_1 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 1\} = 1,$$

$$N(01|x_{1,n_1}) = 1, \quad N(011|x_{1,n_1}) = 0,$$

$$n_2 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 2\} = 4,$$

$$N(01|x_{1,n_2}) = 2, \quad N(011|x_{1,n_2}) = 0,$$

$$n_3 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 3\} = 6,$$

$$N(01|x_{1,n_3}) = 3, \quad N(011|x_{1,n_3}) = 0,$$

$$n_4 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 4\} = 7,$$

$$N(01|x_{1,n_4}) = 3, \quad N(011|x_{1,n_4}) = 1,$$

$$n_5 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 5\} = 9,$$

$$N(01|x_{1,n_5}) = 4, \quad N(011|x_{1,n_5}) = 1,$$

$$n_6 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 6\} = 10,$$

$$N(01|x_{1,n_6}) = 4, \quad N(011|x_{1,n_6}) = 2,$$

$$n_7 = \min\{n \mid N(01|x_{1,n}) + N(011|x_{1,n}) = 7\} = 12,$$

$$N(01|x_{1,n_7}) = 5, \quad N(011|x_{1,n_7}) = 2,$$

また, x の時間発展は次のようである.

$$\begin{aligned} (x)_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \overset{5}{0}, \overset{6}{1}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{1}, \overset{11}{0}, \overset{12}{1}, \overset{13}{0}, \overset{14}{1}, \overset{15}{1}, \overset{16}{0}, \overset{17}{1}, \dots) \\ (g(x))_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{1}, \overset{4}{0}, \overset{5}{1}, \overset{6}{1}, \overset{7}{0}, \overset{8}{1}, \overset{9}{1}, \overset{10}{0}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \overset{13}{1}, \overset{14}{1}, \overset{15}{0}, \overset{16}{1}, \dots) \\ (g^2(x))_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \overset{5}{1}, \overset{6}{0}, \overset{7}{1}, \overset{8}{1}, \overset{9}{0}, \overset{10}{1}, \overset{11}{0}, \overset{12}{1}, \overset{13}{1}, \overset{14}{0}, \overset{15}{1}, \dots) \\ (g^3(x))_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \overset{5}{0}, \overset{6}{1}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{0}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \overset{13}{1}, \overset{14}{1}, \dots) \\ (g^4(x))_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{0}, \overset{5}{1}, \overset{6}{1}, \overset{7}{0}, \overset{8}{1}, \overset{9}{0}, \overset{10}{1}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \overset{13}{1}, \dots) \\ (g^5(x))_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{0}, \overset{5}{0}, \overset{6}{1}, \overset{7}{0}, \overset{8}{1}, \overset{9}{0}, \overset{10}{1}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \dots) \\ (g^6(x))_{0,\rightarrow} &= (\overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{0}, \overset{5}{0}, \overset{6}{0}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{1}, \overset{11}{0}, \dots) \end{aligned}$$

一般性を失うことなく,

$$x = (\dots, \overset{j}{1}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, \dots), \quad (1)$$

$$n_j(x) = (\dots, \overset{j}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, \dots), \quad (2)$$

であるような x に対して, $DFR(g^t(x), g^t(n_j(x)))$, $DFL(g^t(x), g^t(n_j(x)))$ を考えればよく, 次の定理が成立する.

Theorem 3.2 (i) $x = (\dots, 0, \overset{j}{1}_{m_0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, \dots)$, $\forall i, 1 \leq m_i \leq 2$, の x に対して,

$$\begin{aligned} n_j(x) &= (\dots, \overset{j}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, \dots), \\ DFR(g_{40}^t(x), g_{40}^t(n_j(x))) - j &= N(01|x_{j+1, n_t}). \end{aligned}$$

(ii) $\forall x \in S, \forall j \in \mathbf{Z}, DFL(g_{40}^t(x), g_{40}^t(n_j(x))) = j - t$ or $j - t + 1$.

(1) の形の $x \in S$ における右および左 spreading rate は, それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{DFR(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j}{t} &= \frac{N(01|x_{j+1, n_t})}{t}, \\ \frac{DFL(g^t(x), g^t(n_j(x)))}{t} &= \frac{j - t}{t} \end{aligned}$$

の $t \rightarrow \infty$ における極限を調べればよく, 左 spreading rate は -1 である. 右 spreading rate は, $x_{j,\rightarrow}$ におけるブロック 01 と 011 のあり方で変わってくる.

$x \in S$ は一般的に次のように書ける.

$$x = ((01)_{p_i}, (011)_{q_i})_{i=-\infty}^{\infty}, \quad p_i \geq 1, q_i \geq 1.$$

一般性を失うことなく

$$\begin{aligned} x &= (\dots, \overset{j}{1}, (01)_{p_1}, (011)_{q_1}, (01)_{p_2}, (011)_{q_2}, \dots), \\ n_j(x) &= (\dots, \overset{j}{0}, (01)_{p_1}, (011)_{q_1}, (01)_{p_2}, (011)_{q_2}, \dots), \end{aligned}$$

とすれば,

(i) for $\sum_{i=1}^k (p_i + 2q_i) \leq t < \sum_{i=1}^k (p_i + 2q_i) + p_{k+1}$,

$$DFR(g_{40}^t(x), g_{40}^t(n_j(x))) - j = \sum_{i=1}^k (p_i + q_i) + t - \sum_{i=1}^k (p_i + 2q_i) = t - \sum_{i=1}^k q_i,$$

(ii) for $\sum_{i=1}^k (p_i + 2q_i) + p_{k+1} \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} (p_i + 2q_i)$,

$$DFR(g_{40}^t(x), g_{40}^t(n_j(x))) - j = \sum_{i=1}^k (p_i + q_i) + p_{k+1} + \left[\frac{t - \sum_{i=1}^k (p_i + 2q_i) - p_{k+1}}{2} \right] > \frac{t}{2} - 1.$$

上の (ii) から、ルール 40 の右 spreading rate が $1/2$ 以上であることが分かる。次の例は $[1/2, 1]$ 内任意の有理数 r に対して、その r を右 spreading rate とする configuration $x \in S$ が存在することを示している。

Example 3.3

$p_i = p$ and $q_i = q$ ($i = 1, 2, \dots$) である時、上の (i) と (ii) から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_t^+(x)}{t} = \frac{p+q}{p+2q},$$

であり、従って $1/2 \leq t/s \leq 1$ であるような正の整数 t と s に対して、 $p = 2t - s$, $q = s - t$ とおいて

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_t^+(x)}{t} = \frac{t}{s}$$

である。

4 区間力学系と不変測度

S 上で $g_{40} = \sigma_L$ であったこと、 $x \in S$ の右 spreading rate (Lyapunov exponent) を求めるためには、 $x_{0,\rightarrow}$ における 010 と 0110 の個数を数えればよいことに注意する。 $S_+ \equiv \{x_{0,\rightarrow} | x \in S\}$ とし、 S_+ 上で σ_L を考える。

Fig.1 で与えられる区間力学系 $(f, [0, 1])$ を考える。この f は不変測度 μ_d を持ち、その密度関数 $d(x)$ は次のように与えられる。Fig.2 を参照すること。 α は、 $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ を満たすものであればよい。

$$d(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 \leq x \leq a \cdot \frac{1-\alpha}{2}, \\ \frac{a}{b}, & a \cdot \frac{1-\alpha}{2} < x \leq a \cdot \frac{1-\alpha}{2} + b, \\ \frac{1}{c}, & a \cdot \frac{1-\alpha}{2} + b < x \leq a \cdot \frac{1-\alpha}{2} + b + c \cdot \frac{1-\alpha}{2}, \end{cases}$$

ここで a, b, c は、次の条件を満たすものである。

$$0 < a < \frac{2}{1-\alpha}, \quad 0 < b < \alpha, \quad 0 < c < \frac{2}{1-\alpha}, \quad a \cdot \frac{1-\alpha}{2} + b + c \cdot \frac{1-\alpha}{2} = 1.$$

この力学系 f の Lyapunov exponent は、不変測度 μ_d を用いて次のように与えられる。

$$\frac{1-\alpha}{2} \log(1-\alpha) - \frac{1-3\alpha}{2} \log(1-3\alpha) - \alpha \log \alpha - \alpha \log 2.$$

$\psi: [0, 1] \rightarrow S_+$ を次のように定義する。

$$x \in [0, 1], \quad (\psi(x))_n = \begin{cases} 0, & f^n(x) \in [0, a \cdot \frac{1-\alpha}{2}), \\ 1, & f^n(x) \in [a \cdot \frac{1-\alpha}{2}, 1]. \end{cases}$$

この ψ は、 $([0, 1], f)$ と (S_+, σ_L) との間の topological conjugacy である。

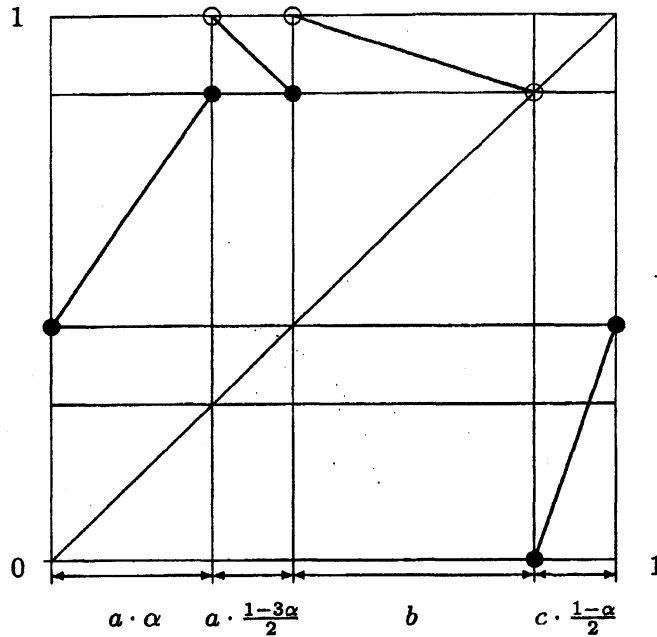


Fig.1 区間力学系 f

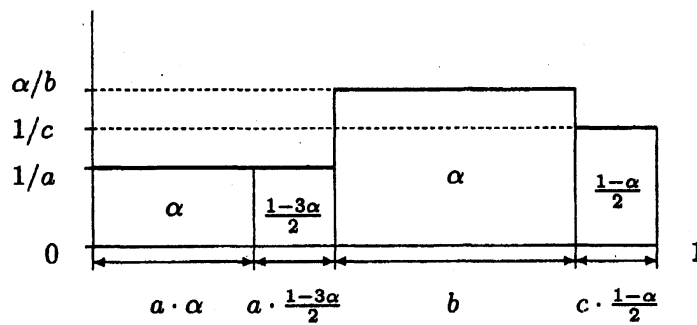


Fig.2 f の不変測度の密度関数 d

密度関数 d によって定まっている $[0, 1]$ 上の測度を μ_d とし, S_+ 上の測度 μ_{σ_L} を,

$$B \in \mathcal{B}_{S_+}, \quad \mu_{\sigma}(B) \equiv \mu_d(\psi^{-1}(B))$$

と定義する. ここで \mathcal{B}_{S_+} は, 筒集合全体が生成される σ 集合体である. μ_d が f -不変であることから, μ_{σ} は σ_L -不変である.

$x \in S$ の spreading rate は, $x_{0,\rightarrow}$ における 010 と 0110 の個数によって定まり,

$$x_{0,\rightarrow} = ((01)_{p_1}, (011)_{q_1}, (01)_{p_2}, (011)_{q_2}, \dots)$$

であるとき,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)}{\sum_{i=1}^n (p_i + 2q_i)}$$

の $n \rightarrow \infty$ の時の極限が存在すれば, その極限が右 spreading rate である. 先に定義した σ_L -不変測度 μ_{σ} について確率 1 で右 spreading rate は次のように定まる.

区間力学系 $([0, 1], f)$ において f -不変測度 μ_d を考えれば十分である.

$$\begin{aligned}
 1_0(\omega) &= \begin{cases} 0, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega = 0, \end{cases} \\
 1_1(\omega) &= \begin{cases} 0, & \omega \neq 1, \\ 1, & \omega = 1, \end{cases} \\
 1_{010}(a, b, c) &= \begin{cases} 1, & a = 0, b = 1, c = 0, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases} \\
 1_{0110}(a, b, c, d) &= \begin{cases} 1, & a = 0, b = 1, c = 1, d = 0, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned}
 0(f^n(x)) &\equiv 1_0(\psi(f^n(x))), \\
 1(f^n(x)) &\equiv 1_1(\phi(f^n(x))), \\
 010(f^n(x)) &\equiv 1_{010}(\psi(f^n(x)), \psi(f^{n+1}(x)), \psi(f^{n+2}(x))), \\
 0110(f^n(x)) &\equiv 1_{0110}(\psi(f^n(x)), \psi(f^{n+1}(x)), \psi(f^{n+2}(x)), \psi(f^{n+3}(x))),
 \end{aligned}$$

とおくと, エルゴード定理より

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n 0(f^j(x)) &\rightarrow \alpha + \frac{1-3\alpha}{2}, \quad \mu_d - \text{a.s.}, \\
 \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n 1(f^j(x)) &\rightarrow \alpha + \frac{1-\alpha}{2}, \quad \mu_d - \text{a.s.}, \\
 \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^n 010(f^j(x)) &\rightarrow \frac{1-3\alpha}{2}, \quad \mu_d - \text{a.s.}, \\
 \frac{1}{n-2} \sum_{j=0}^n 0110(f^j(x)) &\rightarrow \alpha, \quad \mu_d - \text{a.s.}
 \end{aligned}$$

となる. 従って spreading rate は,

$$\frac{\sum_{j=2}^n 010(f^{j-2}(x)) + \sum_{j=3}^n 0110(f^{j-3}(x))}{\sum_{j=2}^n 010(f^{j-2}(x)) + 2 \sum_{j=3}^n 0110(f^{j-3}(x))} \rightarrow \frac{\frac{1-3\alpha}{2} + \alpha}{\frac{1-3\alpha}{2} + 2\alpha} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad \mu_d - \text{a.s.}$$

であり, これは

$$\frac{\sum_{j=0}^n 0(f^j(x))}{\sum_{j=0}^n 1(f^j(x))} \rightarrow \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad \mu_d - \text{a.s.}$$

でもある. $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ であるから, spreading rate は, $1/2$ より大で 1 より小であり, 第 3 節の最後に述べたことを合わせて次の定理が得られる.

定理 4.1 $[1/2, 1]$ 内の任意の実数値を右 spreading rate とする configuration が S 内に存在する.

ルール番号 40 のセルオートマトンで定義されている Lyapunov exponent は、区間力学系でのそれと関連したものではなく、ある特定のパターンの相対頻度の期待値に等しいことがわかる。区間力学系の Lyapunov exponent は、その軌道が定義域内で描く軌道の様子をある程度規定し、従って軌道の複雑さを反映したものであるといえる。これに対し、セルオートマトンでの Lyapunov exponent は、二つのパターンの違いの境界の進展度を示したものであり、必ずしも生成される時空間パターンの複雑さを反映したものになっていない。これらのことは、ルール番号 40 に特定のことなのか一般的にいえることなのかは、さらに調べる必要がある。しかし、ルール番号 40 が Wolfram の分類クラス I に属することから言われる「さほど興味深いものではない」とは、少なくとも言い切れないように思える。

References

- [1] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, *Theoretical Computer Science*, **145**(1995), 1-26.
- [2] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, *Theoretical Computer Science*, **201**(1998), 171-187.
- [3] G. Cattaneo, E.Formenti and L.Margara, Topological Definitions of Deterministic Chaos, in *Cellular Automata*, eds. M Delorme and J. Mazoyer, Kluwer Academic Publishers(1999), 213-259.
- [4] M.Gardner, *Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"*, *Scientific American*, **223**(1970), 120-123.
- [5] A. Ilachinski, *Cellular Automata - A Discrete Universe*, World Scientific, (2001).
- [6] C. G. Langton, *STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA*, *Physica* **22D**(1986), 120-149.
- [7] C. G. Langton, *Life at the Edge of Chaos*, *ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO*, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyne Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.
- [8] J. von Neumann, *Theory of Self - Reproducing Automata*, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, (1966).
- [9] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **18**(2001), 59-73.
- [10] 大鑄 史男, 基本セルオートマトンが生成する時空間パターン - Sierpinski Gasket -, 京都大学数理解析研究所講究録 1306 「不確実性の下での意志決定の数理」 2003.2, 142-151
- [11] F. Ohi and K. Mabuchi, Time-Space Pattern and Dynamics Determined by Elementary Cellular Automata, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **21**(2004), 1-23.
- [12] 大鑄 史男, セルオートマトンとその応用—Chaotic Property of Rule 40 in Wolfram Class I— 京都大学数理解析研究所講究録 1477 「不確実性のもとでの意志決定と数理モデル」 2006.3, pp.149-158
- [13] M. A. Shereshevsky, Lyapunov exponents for one-dimensional cellular Automata, *J.Nonlinear Sci.* **2**(1992), 1-8.
- [14] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, *Review of Modern Physics*, **55**(1983), 601-644.
- [15] S. Wolfram, *UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA*, *Physica* **10D**(1984),1-35.
- [16] S. Wolfram, *A NEW KINDS OF SCIENCE*, Wolfram Media, Inc., (2002).