

# Maximal orders of convergence of consistency in terms of measures of diversity

筑波大・数理物質 大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)

(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

筑波大・数理物質 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

## 1. はじめに

統計的推定論において、母数  $\theta$  をもつ母集団分布からの大きさ  $n$  の無作為標本に基づく ( $\theta$ ) の推定量の一致性の収束の次数 (order) は、適当な正則条件の下では、 $\sqrt{n}$  であることはよく知られている。また、正則条件が必ずしも成り立たないような非正則な場合には、一致性の次数は  $\sqrt{n}$  とはならず、 $n^{1/\alpha}$  ( $0 < \alpha < 2$ )、 $\sqrt{n \log n}$  等が現われる (Akahira[A75a], [A75b], Akahira and Takeuchi[AT81])。また、それに関連する結果は Vostrikova[V84], Smith[Sm85], Beckert and McFadden[BM04], [AT03] らによって得られている。一方、非正則な場合に適用可能な情報量の提案が行われ、有界な台をもつ密度の分布族の場合に統計量のもつ情報量が求められ、また情報量損失についても論じられている ([A96])。また、非正則な特別な場合に位置母数の推定問題を D. Bernoulli, L. Euler のような著名な先人達も考えていた (第 4 節参照)。

本論において、Hellinger 距離, Rényi 情報量等の分布の相違を測る尺度を用いて、推定量の一致性の収束の次数について論じ、さらに、一致性の収束の最大の次数とそれをもつ推定量についても述べる。

## 2. 分布の相違を測る尺度

まず、確率ベクトル  $X := (X_1, \dots, X_n)$  の標本空間を  $\mathcal{X}_n$  とし、 $\mathcal{X}_n$  の部分集合から成る完全加法族を  $\mathcal{B}_n$  とする。また、 $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n)$  上の ( $X$  の) 確率分布族を  $\{P_{\theta,n} | \theta \in \Theta\}$  とする。ただし、 $\Theta$  は母数空間とする。さらに、各  $\theta \in \Theta$  と各  $n \in \mathbb{N}$  について、 $P_{\theta,n}$  は  $\sigma$ -有限測度  $\mu_n$  に関して絶対連続であると仮定し、Radon-Nikodym 導関数  $dP_{\theta,n}/d\mu_n$ , すなわち密度を  $f(x, \theta)$  で表わす。このとき、 $\Theta$  上の距離として、任意の  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  について

$$\begin{aligned} d_n(\theta_1, \theta_2) &:= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_n} |f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| d\mu_n(x) \\ &= \sup_{B \in \mathcal{B}_n} |P_{\theta_1,n}(B) - P_{\theta_2,n}(B)|, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$H_n(\theta_1, \theta_2) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{\mathcal{X}_n} \left( \sqrt{f(x, \theta_1)} - \sqrt{f(x, \theta_2)} \right)^2 d\mu_n(x) \right\}^{1/2} \tag{2.2}$$

を考える。特に、 $H_n(\cdot, \cdot)$  は Hellinger 距離と呼ばれている。また、 $f(\cdot, \theta_1)$  と  $f(\cdot, \theta_2)$  の類似度 (affinity) を

$$a_n(\theta_1, \theta_2) := \int_{\mathcal{X}_n} \sqrt{f(x, \theta_1) f(x, \theta_2)} d\mu_n(x) \tag{2.3}$$

で定義する. このとき, (2.1), (2.2), (2.3) から

$$d_n(\theta_1, \theta_2) \leq \{H_n^2(\theta_1, \theta_2) (2 - H_n^2(\theta_1, \theta_2))\}^{1/2} \leq \sqrt{2}H_n(\theta_1, \theta_2), \quad (2.4)$$

$$H_n^2(\theta_1, \theta_2) = 1 - a_n(\theta_1, \theta_2) \quad (2.5)$$

が成り立ち, また

$$0 \leq H_n(\theta_1, \theta_2) \leq 1, \quad 0 \leq a_n(\theta_1, \theta_2) \leq 1$$

となる (Strasser[St85]). なお, (2.5) より  $H_n(\cdot, \cdot)$  の値は  $a_n(\cdot, \cdot)$  から求められることが多い.

一方, Rényi[R61] が Kullback-Leibler 情報量の一般化として, 任意の  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  について

$$D_{r,n}(\theta_1, \theta_2) := \frac{1}{r-1} \log \int_{\mathcal{X}_n} \{f(\mathbf{x}, \theta_1)\}^r \{f(\mathbf{x}, \theta_2)\}^{1-r} d\mu_n(\mathbf{x}) \quad (0 < r < 1)$$

を考えた. 特に,  $r = 1, 0$  のときには, Kullback-Leibler 情報量を

$$K_n(\theta_1, \theta_2) := \int_{\mathcal{X}_n} f(\mathbf{x}, \theta_1) \log \frac{f(\mathbf{x}, \theta_1)}{f(\mathbf{x}, \theta_2)} d\mu_n(\mathbf{x})$$

として, 各  $n \in \mathbb{N}$  について

$$D_{1,n}(\theta_1, \theta_2) := \lim_{r \rightarrow 1} D_{r,n}(\theta_1, \theta_2) = K_n(\theta_1, \theta_2), \quad (2.6)$$

$$D_{0,n}(\theta_1, \theta_2) := \lim_{r \rightarrow 0} D_{r,n}(\theta_1, \theta_2) = K_n(\theta_2, \theta_1)$$

となる ([P06]). また, Akahira[A96] は Rényi 型の情報量として

$$I_n^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_2) := -\frac{8}{1-\alpha^2} \log \int_{\mathcal{X}_n} \{f(\mathbf{x}, \theta_1)\}^{(1-\alpha)/2} \{f(\mathbf{x}, \theta_2)\}^{(1+\alpha)/2} d\mu_n(\mathbf{x}) \quad (|\alpha| < 1)$$

を定義し, Fisher 情報量を

$$I_n(\theta) := \int_{\mathcal{X}_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\mathbf{x}, \theta) \right\}^2 f(\mathbf{x}, \theta) d\mu_n(\mathbf{x})$$

として,  $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$  とし,  $\Delta\theta \rightarrow 0$  とすれば

$$I_n^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_2) = I_n(\theta)(\Delta\theta)^2 + o((\Delta\theta)^2)$$

となることを示した.

特に,  $X_1, \dots, X_n$  がたがいに独立に, いずれも ( $\sigma$ -有限測度  $\mu$  に関する) 密度  $p(\mathbf{x}, \theta)$  に従う確率変数とする. ただし,  $\theta \in \Theta$  とする. このとき,  $f(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$  となり,  $X_1$  の標本空間を  $\mathcal{X}$  とすれば,  $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}^n$ ,  $\mu_n = \mu^n$  となり,

$$\begin{aligned} D_{r,n}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{r-1} \log \int_{\mathcal{X}_n} \left\{ \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta_1) \right\}^r \left\{ \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta_2) \right\}^{1-r} d\mu^n \\ &= \frac{1}{r-1} \log \left[ \int_{\mathcal{X}} \{p(x_i, \theta_1)\}^r \{p(x_i, \theta_2)\}^{1-r} d\mu \right]^n \\ &= nD_{r,1}(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる.

### 3. 推定量の一致性と一致性の収束の次数

まず,  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$  とし,  $\|\cdot\|$  を  $\mathbb{R}^p$  のユークリッドノルムとする. ここで,  $\theta$  の推定量  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X)$  が, 任意の  $\varepsilon > 0$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta, n} \left\{ \|\hat{\theta}_n - \theta\| > \varepsilon \right\} = 0$$

を満たすならば,  $\hat{\theta}_n$  は  $\theta$  の一致推定量であるという. このとき,  $\theta$  の一致推定量が存在するための必要条件は Rényi の情報量を用いて, 次のように得られる.

**定理 1** 各  $n \in \mathbb{N}$  について,  $f$  の台  $\{x | f(x, \theta) > 0\}$  が  $\theta$  に無関係とする. このとき,  $\theta$  の一致推定量が存在すれば,  $\theta_1 \neq \theta_2$  となる任意の  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 1} D_{r, n}(\theta_1, \theta_2) = \infty$$

である.

証明は [A85a] の定理 3.2 または [AT81] の定理 2.2.2 と (2.6) を用いればよい.

**例 1**  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布  $\text{Exp}(\theta)$  に従う確率変数列とする. ただし,  $\theta > 0$  とする. ここで,  $\theta_1 \neq \theta_2$  について

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{\theta_1} e^{-x/\theta_1} \right)^r \left( \frac{1}{\theta_2} e^{-x/\theta_2} \right)^{1-r} dx = \frac{1}{\theta_1^{r-1} \theta_2^{-r} (r\theta_2 + (1-r)\theta_1)}$$

となるから, (2.7) より

$$\begin{aligned} D_{r, n}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{n}{r-1} \log \frac{1}{\theta_1^{r-1} \theta_2^{-r} (r\theta_2 + (1-r)\theta_1)} \\ &= \frac{n}{r-1} \left\{ -(r-1) \log \frac{\theta_1}{\theta_2} + \log \theta_2 - \log ((r-1)\theta_2 + \theta_2 + (1-r)\theta_1) \right\} \\ &= -n \log \frac{\theta_1}{\theta_2} + \frac{n}{1-r} \log \left( 1 + (1-r) \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

になる. いま,  $\theta_1 \neq \theta_2$  のとき

$$-\log \frac{\theta_1}{\theta_2} + \frac{\theta_1}{\theta_2} - 1 > 0$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 1} D_{r, n}(\theta_1, \theta_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ -\log \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} - 1 \right) \right\} = \infty$$

になる. 一方,  $E(X_1) = \theta$  であるから, 大数の法則より  $\bar{X} := (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$  は  $\theta$  の一致推定量になる.

次に、無限大に発散する正数の増加列  $\{c_n\}$  について、 $\theta$  の推定量  $\hat{\theta}_n$  が、任意の  $\eta \in \Theta$  に対して正数  $\delta$  が存在して

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: \|\theta - \eta\| < \delta} P_{\theta, n} \{c_n \|\hat{\theta}_n - \theta\| \geq L\} = 0$$

を満たすとき、 $\hat{\theta}_n$  を  $\theta$  の  $\{c_n\}$  一致推定量、または次数  $\{c_n\}$  をもつ一致推定量という ([A75a]). このとき、 $\{c_n\}$  を一致性の収束の次数という. そして、 $\theta$  の  $\{c_n\}$  一致推定量が存在するための必要条件が次のように得られる ([A95], [A75a], [AT81]).

**定理 2**  $\theta$  の  $\{c_n\}$  一致推定量が存在すれば、任意の  $\theta \in \Theta$ 、任意の  $\varepsilon > 0$  について、ある正数  $t_0$  が存在して、 $t > t_0$  となる任意の  $t$  について

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} H_n(\theta, \theta - tc_n^{-1} \mathbf{1}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon$$

である. ただし、 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$  とする.

証明は、Akahira[A95] の定理 2.1 と (2.4) を用いればよい.

#### 4. 位置母数分布族における一致性の収束の最大次数

まず、 $X_1, \dots, X_n$  をたがいに独立に同分布に従うとし、 $\mathcal{X}_1 = \Theta = \mathbb{R}^1$ ,  $P_\theta := P_{\theta, 1}$ ,  $P_{\theta, n} = P_\theta^n$ ,  $p_\theta(x_1) := f(x_1, \theta)$  とする. また、 $p_\theta(x_1) = p(x_1 - \theta)$  となるような位置母数分布族の場合を考え、さらに (Lebesgue 測度に関する) 密度関数  $p(\cdot)$  が次の条件 (A1) を満たすとする.

(A1)  $p(x) > 0$  ( $a < x < b$ );  $p(x) = 0$  (その他).

いま、(2.2) において、 $n = 1$  のとき、 $0 < \Delta < b - a$  について

$$H(\theta, \theta - \Delta) := H_1(\theta, \theta - \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sqrt{p(x)} - \sqrt{p(x + \Delta)} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \quad (4.1)$$

とする. このとき、(2.1) と (4.1) より  $d_n(\theta, \theta - \Delta)$  と  $H(\theta, \theta - \Delta)$  の関係は次のようになる.

**補題 1**  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  をたがいに独立にいずれも (A1) を満たす密度  $p(x - \theta)$  をもつ分布に従う確率変数列とする. このとき、 $0 < \Delta < b - a$  について

$$d_n(\theta, \theta - \Delta) \leq \left[ 1 - \{1 - H^2(\theta, \theta - \Delta)\}^{2n} \right]$$

である.

このとき、定理 2 と補題 1 より  $\{c_n\}$  一致推定量が存在するための必要条件を Hellinger 距離を用いて次のように得る.

**定理 3**  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  をたがいに独立に、いずれも (A1) を満たす密度  $p(x - \theta)$  をもつ分布に従う確率変数列とする. このとき、 $\theta$  の  $\{c_n\}$  一致推定量が存在すれば、任意の  $\theta \in \Theta$  に対して、ある正数  $t_0$  が存在して、 $t \geq t_0$  となる任意の  $t$  について

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \log (1 - H^2(\theta, \theta - tc_n^{-1})) < 0$$

である.

次に,  $0 < \Delta < b - a$  において,  $g(x) := \{p(x) + p(x + \Delta)\}/2$  とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \quad (a - \Delta < x < b), \\ g(x) &= 0 \quad (\text{その他}) \end{aligned}$$

であり,  $\int_{a-\Delta}^b g(x) dx = 1$  になる. また

$$J := \int_{a-\Delta}^b \frac{\{p(x + \Delta) - p(x)\}^2}{g(x)} dx$$

とおくと

$$d_n(\theta, \theta - \Delta) \leq \{(1 + J)^n - 1\}^{1/2}$$

になり, この不等式は一致性の収束の次数を得るのに用いられた ([A75a], [AT81]). さらに,  $H(\theta, \theta - \Delta)$  と  $J$  との関係は次のようになる.

**補題 2**  $p(x)$  を条件 (A1) を満たす密度とする. このとき, 任意の  $\theta \in \Theta$ ,  $0 < \Delta < b - a$  について

$$H^2(\theta, \theta - \Delta) \leq J$$

である.

ここで, さらに次の条件を設ける.

(A2)  $p(x)$  は开区間  $(a, b)$  上で 2 回連続微分可能で,

$$A' := \lim_{x \rightarrow a+0} (x - a)^{1-\alpha} p(x), \quad B' := \lim_{x \rightarrow b-0} (b - x)^{1-\beta} p(x)$$

が存在する. ただし,  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$  で,  $0 < A', B' < \infty$  とする.

(A3)  $A'' := \lim_{x \rightarrow a+0} (x - a)^{2-\alpha} |p'(x)|$ ,  $B'' := \lim_{x \rightarrow b-0} (b - x)^{2-\beta} |p'(x)|$  は有限である. また,  $\alpha = 2$  について  $p''(x)$  は有界である.

なお, Akahira[A75a] において, 条件 (A3) の中に, さらに  $\alpha > 2$  に対して  $p''(x)$  は有界であることを含めていて, その条件と条件 (A1), (A2) の下で,  $\alpha > 2$  について

$$\int_a^b \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx < \infty \quad (4.2)$$

であることを証明し, 最尤推定量の漸近正規性を用いる際に使っている. しかし, (4.2) を「 $\alpha > 2$  に対して  $p''(x)$  が有界である」ことを仮定しないで, 条件 (A1), (A2) の下で示すことができる. 実際, 条件 (A2) より, 任意の  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \min\{A', A''\}$ ) に対して  $\delta_i$  ( $0 < \delta_i < (b - a)/2$ ) ( $i = 1, 2$ ) が存在して,  $x - a < \delta_1$  ならば

$$(A' - \varepsilon)(x - a)^{\alpha-1} < p(x) < (A' + \varepsilon)(x - a)^{\alpha-1} \quad (4.3)$$

になり,  $x - a < \delta_2$  ならば

$$(A'' - \varepsilon)(x - a)^{\alpha-2} \leq |p'(x)| \leq (A'' + \varepsilon)(x - a)^{\alpha-2} \quad (4.4)$$

になる. また, 同様にして, 任意の  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \min\{B', B''\}$ ) に対して  $\delta'_i$  ( $0 < \delta'_i < (b-a)/2$ ) ( $i = 1, 2$ ) が存在して,  $b-x < \delta'_1$  ならば

$$(B' - \varepsilon)(b-x)^{\beta-1} < p(x) < (B' + \varepsilon)(b-x)^{\beta-1} \quad (4.5)$$

になり,  $b-x < \delta'_2$  ならば

$$(B'' - \varepsilon)(b-x)^{\beta-2} \leq |p'(x)| \leq (B'' + \varepsilon)(b-x)^{\beta-2} \quad (4.6)$$

となる. そこで

$$\delta_0 := \min\{\delta_1, \delta_2\}, \quad \delta'_0 := \min\{\delta'_1, \delta'_2\}$$

とおくと

$$\int_a^b \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx = \left( \int_a^{a+\delta_0} + \int_{a+\delta_0}^{b-\delta'_0} + \int_{b-\delta'_0}^b \right) \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx \quad (4.7)$$

となる. ここで, (4.3), (4.4) より

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\delta_0} \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx &\leq \frac{(A'' + \varepsilon)^2}{A' - \varepsilon} \int_a^{a+\delta_0} (x-a)^{\alpha-3} dx \\ &= \frac{(A'' + \varepsilon)^2}{A' - \varepsilon} \cdot \frac{\delta_0^{\alpha-2}}{\alpha-2} < \infty \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる. また,  $\{p'(x)\}^2/p(x)$  は有界閉区間  $[a+\delta_0, b-\delta'_0]$  上で連続であるから, 有界になり

$$\int_{a+\delta_0}^{b-\delta'_0} \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx < \infty \quad (4.9)$$

になる. さらに, (4.8) と同様にして, (4.5), (4.6) より

$$\int_{b-\delta'_0}^b \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx \leq \frac{(B'' + \varepsilon)^2}{B' - \varepsilon} \cdot \frac{\delta'_0{}^{\beta-2}}{\beta-2} < \infty \quad (4.10)$$

になる. よって, (4.7)~(4.10) より

$$\int_a^b \frac{\{p'(x)\}^2}{p(x)} dx < \infty$$

になるので, (4.2) が示された.

次に, 条件 (A2), (A3) の下で, 小さな  $\Delta > 0$  について

$$J = \begin{cases} O(\Delta^\alpha) & (0 < \alpha < 2), \\ O(\Delta^2 |\log \Delta|) & (\alpha = 2), \\ O(\Delta^2) & (\alpha > 2) \end{cases}$$

となる ([A95a], [AT81]). よって, 補題 2 より, 任意の  $\theta \in \Theta$ , 小さな  $\Delta > 0$  について

$$H^2(\theta, \theta - \Delta) = \begin{cases} O(\Delta^\alpha) & (0 < \alpha < 2), \\ O(\Delta^2 |\log \Delta|) & (\alpha = 2), \\ O(\Delta^2) & (\alpha > 2) \end{cases}$$

になるから, 定理 3 の命題の対偶を用いて一致性の収束の最大次数を得ることができ, これは [A75a], [AT81], [A95] で得られた結果と同じである.

定理 4  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  をたがいに独立に, いずれも条件 (A1)~(A3) を満たす  $p(x-\theta)$  をもつ分布に従う確率変数列とする. このとき,  $c_n^*$  より大きい次数をもつ一致推定量が存在しないという意味で, 一致性の収束の最大次数  $c_n^*$  および  $\{c_n^*\}$  一致推定量は次のように与えられる.

$\alpha$	$c_n^*$	$\{c_n^*\}$ 一致推定量
$0 < \alpha < 2$	$n^{1/\alpha}$	$\{\min_{1 \leq i \leq n} X_i + \max_{1 \leq i \leq n} X_i - (a+b)\} / 2$
$\alpha = 2$	$(n \log n)^{1/2}$	$\hat{\theta}_{ML}$
$\alpha > 2$	$\sqrt{n}$	$\hat{\theta}_{ML}$

ただし,  $\hat{\theta}_{ML}$  は  $\theta$  の最尤推定量とする.

例 2  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x-\theta) = \begin{cases} C_s \{1 - (x-\theta)^2\}^{s-1} & (|x-\theta| < 1), \\ 0 & (|x-\theta| \geq 1) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数列とする. ただし,  $s > 0$ ,  $C_s := 1/\{2^{2s-1} B(s, s)\}$  とする. このとき,  $a = -1, b = 1, \alpha = \beta = s, A' = B' = 2^{s-1} C_s, A'' = B'' = 2^{s-1} C_s |s-1|$  とすれば, 条件 (A1)~(A3) は満たされることが分かり,  $s$  の値に応じて定理 4 の表のような最大次数をもつ一致推定量が存在する.

実は, Kendall [K61], Nikulin [N93] によれば, 例 2 において,  $s = 3/2$  の場合の  $\theta$  の推定問題において, D. Bernoulli がいわゆる最尤法を用いて推定することを提案し, L. Euler はそれを認めた上で, それとは異なる推定量を提案した. それらは *Memoirs of the Academy of St Petersburg, Acta Acad. Petrop.* (1777) にラテン語で掲載され, [K61] において英訳されている. この推定問題は面白い. 一般に, 条件 (A1), (A2) において,  $a = -1, b = 1, 1 < \alpha = \beta < 2$  とし, さらに

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} (1+x)^{3-\alpha} p''(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{3-\alpha} p''(x)$$

が有限確定であることを仮定する. このとき,  $\theta$  の漸近中央値不偏推定量  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(\mathbf{X})$ , すなわち  $\theta$  について局所一様に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} \left| P_\theta^n \{ \hat{\theta}_n \leq \theta \} - \frac{1}{2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} \left| P_\theta^n \{ \hat{\theta}_n \geq \theta \} - \frac{1}{2} \right| = 0$$

となる推定量  $\hat{\theta}_n$  の全体のクラスの中で、漸近中央値不偏になるように補正した最尤推定量は漸近有効推定量にならないことが示されている (Akahira and Takeuchi[AT91]).

## 5. おわりに

本論では、Hellinger 距離, Rényi 情報量等の分布の相違を測る尺度を用いて,  $\{c_n\}$  一致推定量が存在するための必要条件を求め, それを用いて, 密度の台が有界である場合に一致性の収束の最大次数について論じた. 今後, いろいろな非正則な場合に, 分布の相違を測る尺度を用いて, 一致性等の漸近的な性質を考える余地がある.

## 参考文献

- [A75a] Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **22**, 8–26.
- [A75b] Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, II: Bounds of asymptotic distributions of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **22**, 99–115.
- [A95] Akahira, M. (1995). The amount of information and the bound for the order of consistency for a location parameter family of densities. *Symposia Gaussiana, Conf. B, Statist. Sci., Proc. of the 2nd Gauss symp.*, (eds. V. Mammitzsch and H. Schneeweiss), 303–311, de Gruyter, Berlin.
- [A96] Akahira, M. (1996). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **48**, 349–364.
- [AT81] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency*. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.
- [AT91] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1991). Asymptotic efficiency of estimators for a location parameter family of densities with the bounded support. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **38**(1), 1–9.
- [BM04] Beckert, W. and McFadden, D. (2004). Maximal uniform convergence rates in parametric estimation problems. *Birkbeck Working Papers in Economics & Finance (BWPEF)* 0405, University of London.
- [K61] Kendall, M. G. (1961). Studies in the history of probability and statistics XI. Daniels Bernoulli on maximum likelihood. *Biometrika*, **48**(1/2), 1–18.
- [N93] Nikulin, M. S. (1993). About one problem of D. Bernoulli and L. Euler from the theory of point estimation. Unpublished manuscript.



- [P06] Pardo, L. (2006). *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- [Sm85] Smith, R. L. (1985). Maximum likelihood estimation in a class of non-regular cases. *Biometrika*, **72**, 67–90.
- [St85] Strasser, H. (1985). *Mathematical Theory of Statistics*. Walter de Gruyter, Berlin.
- [R61] Rényi, A. (1961). On measures of entropy and information. *Proc. of the Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, **1**, 547–561.
- [V84] Vostrikova, L. Ju. (1984). On criteria for  $c_n$ -consistency of estimators. *Stochastics*, **11**, 265–290.