

完備距離空間における縮小ファジィ変換の不動点定理

雨宮 将人 (Masato Amemiya)

東京工業大学大学院 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻

Department of Mathematical and Computing Sciences,

Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

完備距離空間におけるファジィ変換の不動点定理は, Heilpern [5] により最初のもものが示され, 以来集合値写像の不動点定理 (例えば Nadler [8], Papageorgiou [9]) を一般化するものとして (第 2 節を参照) 多くの研究がなされてきた (例えば [1, 2, 6, 7, 10, 11]). 他方, 完備距離空間における集合値写像の不動点定理は, Nadler [8] をはじめとし, 特に縮小タイプのものに対する研究が多くなされている (例えば [3, 9]).

本稿では, 完備距離空間におけるファジィ変換の不動点定理を研究し, ファジィ変換と集合値写像の双方に対する, これまでの特に縮小(タイプ)の写像の不動点定理を, 捨象し統括することを主たる目的とする. このため, つぎの第 2 節では, 準備として記号や定義などの基本的概念を説明する. 続く第 3 章では, ファジィ変換と集合値写像に対し, これまでに得られている不動点定理のなかから代表的なものを選び, この間の経緯を大観する. 最後に第 4 節では, まず雨宮-高橋 [1] の結果を掲げるとともにこの定理の問題点を述べ, 新たな定理を示す.

2 準備

本稿では, 以降 \mathbb{N} は自然数全体からなる集合を表し, \mathbb{R} は実数全体からなる集合を表すものとする. また, 空でないある集合 A に対し, 1_A は A の特性関数, すなわちつぎで定められる関数を表すものとする:

$$1_A = \begin{cases} 1 & (x \in A); \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$

X を空でない集合とする. このとき, X におけるファジィ集合を, X から $[0, 1]$ への関数と定義する. A を X におけるファジィ集合とする. このとき, $\alpha \in [0, 1]$ に対し, A の α -レベル集合 A_α をつぎのように定める:

$$A_\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$$

特に, $\alpha = 1$ のとき

$$A_1 = \{x \in X : A(x) = 1\}$$

である.

$\mathfrak{F}(X)$ を X におけるファジィ集合の全体からなるクラスとする。このとき、 X 上のファジィ変換を、 X から $\mathfrak{F}(X)$ への写像と定義する。 F を X 上のファジィ変換とする。このとき、任意の $x \in X$ に対し、 $Fx \in \mathfrak{F}(X)$ であるから、 F は $X \times X$ から $[0, 1]$ への2変数関数とみなすことができる。したがって本稿では、以降 X 上のファジィ変換 F を $X \times X \rightarrow [0, 1]$ なる2変数関数と同一視することにし、また各 $x \in X$ に対し、 $F(x, \cdot) \in \mathfrak{F}(X)$ を x の F による像と捉える立場をとることにする。さらに、 $F(x, \cdot) \in \mathfrak{F}(X)$ の α -レベル集合を $[Fx]_\alpha$ と書くことにする。すなわち、

$$[Fx]_\alpha = \{y \in X : F(x, y) \geq \alpha\}$$

である。

(X, d) を距離空間とする。このとき、 X における空でない有界閉集合の全体からなるクラスを $CB(X)$ で表す。 $x \in X$ とし、 $K \in CB(X)$ とする。このとき、 x と K との距離 $d(x, K)$ をつぎのように定める：

$$d(x, K) = \inf\{d(x, y) : y \in K\}$$

これより明らかに、

$$d(x, K) = 0 \iff x \in K$$

が成り立つ。また、 $\{K_n\}$ を $CB(X)$ の集合族とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, K_n) = 0 \iff \exists x_n \in K_n \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$$

が成り立つことが容易に確かめられる。 $K_1, K_2 \in CB(X)$ とする。このとき、 $CB(X)$ における距離 $H(K_1, K_2)$ をつぎのように定める：

$$H(K_1, K_2) = \max \left\{ \sup_{u \in K_1} d(u, K_2), \sup_{v \in K_2} d(v, K_1) \right\}$$

H をハウスドルフの距離という。定義により、つぎが成り立つ(例えば [13] を参照)：

$$x \in K_1 \Rightarrow d(x, K_2) \leq H(K_1, K_2)$$

X を空でない集合とし、 T を X 上の集合値写像、すなわち各 $x \in X$ に対し、 $Tx \subset X$ かつ $Tx \neq \emptyset$ を満たすものとする。このとき、 $x_0 \in Tx_0$ を満たす $x_0 \in X$ を T の不動点という。 F を X 上のファジィ変換とする。このとき、 $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ を F の不動点という。 T を X 上の集合値写像とし、 X 上のファジィ変換をつぎのように定める：

$$F(x, y) = 1_{Tx}(y) \quad (\forall x, y \in X)$$

このとき明らかに、

$$x_0 \in Tx_0 \iff F(x_0, x_0) = 1$$

が成り立つから、ファジィ変換の不動点理論は集合値写像のそのの一般化となっていることが分かる。

3 経緯

縮小集合値写像に対する不動点定理は、Nadler [8] によりつぎのような形で最初に示された：

定理 3.1 (Nadler [8]) (X, d) を完備距離空間とし、 T を X から $CB(X)$ への集合値写像とする。このとき、 $r \in [0, 1)$ が存在してすべての $x, y \in X$ に対し $H(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ が成り立つならば、 $x_0 \in Tx_0$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する。

その後、Papageorgiou [9] はつぎの定理を示した：

定理 3.2 (Papageorgiou [9]) (X, d) を完備距離空間とし、 T を X から $CB(X)$ への連続な集合値写像とする。また $k: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ はつぎの (1), (2) を満たす下半連続な関数とする：

- (1) $\forall p, q \in \mathbb{R}_+^3, p \leq q \Rightarrow k(p) \leq k(q)$;
- (2) $\exists r \in [0, 1)$ s.t. $k(t, t, t) \leq rt$ ($\forall t \geq 0$)

このとき、すべての $x, y \in X$ に対し $H(Tx, Ty) \leq k(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty))$ が成り立つならば、 $x_0 \in Tx_0$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する。

いっぽう、Heilpern [5] はファジィ変換の不動点定理として最初のものとなるつぎの結果を示した：

定理 3.3 (Heilpern [5]) (X, d) を完備距離空間とし、 F を X 上のファジィ変換とする。このとき、 $r \in [0, 1)$ が存在してすべての $x, y \in X$ に対し $D(Fx, Fy) \leq d(x, y)$ が成り立つならば、 $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する。ただし、 $D(Fx, Fy) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} H([Fx]_\alpha, [Fy]_\alpha)$ である。

この定理を契機として、その後多くの結果が示されたが (例えば [6, 10, 11])、比較的最近のものとしては、つぎのようなものが Lee ほか [7] により示された：

定理 3.4 (Lee et al. [7]) (X, d) を完備距離空間とし, F を各 $x \in X$ に対し, $[Fx]_1$ が $CB(X)$ に属する X 上のファジィ変換とする. また, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ を $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 1$ かつ $a_3 \geq a_4$ を満たす実数とする. このとき, 任意の $u_0 \in X$ と任意の $u_1 \in [Fu_0]_1$ と任意の $v_0 \in X$ に対し, $v_1 \in [Fv_0]_1$ が存在して $d(u_1, v_1) \leq a_1 d(u_0, u_1) + a_2 d(v_0, v_1) + a_3 d(u_1, v_0) + a_4 d(u_0, v_1) + a_5 d(u_0, v_0)$ が成り立つならば, $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する.

本稿では以後, ファジィ変換と集合値写像の双方に対し, 上述の定理にみられるような条件を満たすものを縮小タイプと呼ぶことにする.

4 主結果

完備距離空間におけるファジィ変換の不動点定理として, 雨宮と高橋 [1] はつぎを証明した:

定理 4.1 (雨宮-高橋 [1]) (X, d) を完備距離空間とし, F を X 上のファジィ変換とする. また, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下に有界かつ下半連続で $\text{proper}(\iff \{x \in X : f(x) < \infty\} \neq \emptyset)$ な関数とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対し $y \in X$ が存在して $(*) F(x, y) = 1$ かつ $f(y) + d(x, y) \leq f(x)$ が成り立つならば, $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する.

前節の定理 3.1 をはじめ, これまでの縮小タイプのファジィ変換または集合値写像の不動点定理は, 定理 4.1 の仮定 $(*)$ を満たすことが比較的容易な計算により示される. しかしながら, f の連続性の確認は多くの場合技術的な困難が伴い straightforward ではない. そこで, f から連続(性)の条件をはずし, 別の条件を設けることが応用面での課題となったが, 雨宮と高橋 [2] は実際, これに対する答えの一つとしてつぎを示した:

定理 4.2 (雨宮-高橋 [2]) (X, d) を完備距離空間とし, F を X 上のファジィ変換とする. また, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下に有界で proper な関数とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対し $y \in X$ が存在して $(*) F(x, y) = 1$ かつ $f(y) + d(x, y) \leq f(x)$ が成り立ち, さらに $F(z, z) \neq 1$ を満たす任意の $z \in X$ に対し, $(**) \inf_{z \in X} \{d(x, z) + d(x, [Fz]_1)\} > 0$ が成り立つならば, $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する.

定理 4.2 の仮定 $(**)$ が f の連続(性)に換わる条件となる. 前節に挙げた不動点定理のほか, これまでのほとんど全ての結果がこの仮定を満たすことが示さ

れる。また、この定理を用いるとつぎを証明することができる(雨宮-高橋 [2] も参照せよ) :

定理 4.3 (X, d) を完備距離空間とし, F を各 $x \in X$ に対し, $[Fx]_1$ が $CB(X)$ に属する X 上のファジィ変換とする。また, $f: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下に有界で proper な関数とする。このとき, $r \in [0, 1)$ が存在して任意の $x \in X$ と任意の $y \in [Fx]_1$ に対して $d(y, y_0) \leq rd(x, y)$ を満たすような y_0 を選ぶことができ, さらに $F(z, z) \neq 1$ を満たす任意の $z \in X$ に対し, $\inf_{x \in X} \{d(x, z) + d(x, [Fx]_1)\} > 0$ が成り立つならば, $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する。またこのとき, 任意の $u_0 \in X$ から出発して, つぎのように F の不動点に収束する X の点列 $\{u_n\}$ を, 帰納的に構成することができる :

「 $r < r_1 < 1$ なる r_1 を任意に固定し, u_{n-1} は既知とすると u_n を集合

$$S_n = \{u \in X : r_1 d(u_{n-1}, u) \leq d(d(u_{n-1}, [Fu_{n-1}]_1), d(u, [Fu]_1) \leq rd(u_{n-1}, u)\}$$

から選ぶ」

注 集合 S_n はつねに空でないという保証はないが, 仮に $S_n = \emptyset$ であるとする, u_{n-1} が F の不動点となるので問題はない。

最後に, 応用例として定理 4.2 を用いて定理 3.4 を証明しよう。

定理 4.2 による定理 3.4 の証明 (概略) $x \in X$ をとる。 $F(x, x) \neq 1$ すなわち $x \notin [Fx]_1$ としてよい。 $r = \frac{a_1 + a_4 + a_5}{1 - a_2 + a_4}$ とし, r_1 を $r < r_1 < 1$ を満たすようにとる。このとき, $r_1 d(x, y) \leq d(x, [Fx]_1)$ を満たす $y \in [Fx]_1$ が存在する。また仮定より, この y に対し $d(y, y_0) \leq rd(x, y)$ を満たす $y_0 \in [Fy]_1$ がとれる。したがって $d(y, [Fy]_1) \leq rd(x, y)$ が成り立つ。よって, X 上の実数値関数 f を

$$f(x) = \frac{1}{r_1 - r} d(x, [Fx]_1) \quad (\forall x \in X)$$

により定めると

$$\begin{aligned} f(y) + d(x, y) &= \frac{1}{r_1 - r} d(y, [Fy]_1) + d(x, y) \\ &\leq \frac{r}{r_1 - r} d(x, y) + d(x, y) = \frac{r_1}{r_1 - r} d(x, y) \\ &\leq \frac{1}{r_1 - r} d(x, [Fx]_1) = f(x) \end{aligned}$$

を得る。

また, $F(z, z) \neq 1$ を満たす任意の $z \in X$ に対し,

$$\inf_{x \in X} \{d(x, z) + d(x, [Fx]_1)\} > 0$$

である. 実際, 成り立たないとすると $d(x_n, z) + d(x_n, [Fx_n]_1) \rightarrow 0$ であるような $x_n \in X$ が存在するから, $d(x_n, z) \rightarrow 0$ かつ $d(z, y_n) \rightarrow 0$ であるような $y_n \in [Fx_n]_1$ がとれる. さらに仮定より, この y_n に対して $d(y_n, z_n) \leq rd(x_n, z)$ を満たす $z_n \in [Fz]_1$ が得られる. よって

$$\begin{aligned} d(z, [Fz]_1) &\leq d(z, z_n) \leq d(z, y_n) + d(y_n, z_n) \\ &\leq d(z, y_n) + rd(x_n, z) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $d(z, [Fz]_1) = 0$, すなわち $F(z, z) = 1$ が成り立つ. これは不合理である. ゆえに, 定理 4.2 により $F(x_0, x_0) = 1$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する. \square

REFERENCES

- [1] M. Amemiya and W. Takahashi, Generalization of shadows and fixed point theorems for fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 114(2000)469-476.
- [2] ———, Fixed point theorems for fuzzy mappings on complete metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 125(2002)253-260.
- [3] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer, Berlin, 1993.
- [4] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 215(1976)241-251.
- [5] S. Heilpern, Fuzzy mappings and fixed point theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, 83(1981)566-569.
- [6] B. S. Lee and S. J. Cho, A fixed point theorems for contractive-type fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 61(1994)309-312.
- [7] B. S. Lee, G. M. Lee, S. J. Cho and D. S. Kim, A common fixed point theorems for a pair of fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 98(1998)133-136.
- [8] S. B. Nadler Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30(1969)475-488.
- [9] N. S. Papageorgiou, Fixed point theorems for multifunctions in metric and vector spaces *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, 7(1983)763-770.
- [10] J. Y. Park and J. U. Jeong, Common fixed points of fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 59(1993)231-235.
- [11] J. Y. Park and J. U. Jeong, Fixed point theorems for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 87(1997)111-116.
- [12] T. Som and R. N. Mukherjee, Some fixed point theorems for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 33(1989)213-219.
- [13] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Kindaikagaku, Tokyo, 1988 (in Japanese).
- [14] ———, Existence theoremas generalizing fixed point theorems for multivalued mappings in: M. A. Thèra and J. B. Baillon (Eds.), *Fixed Point Theory and Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 252, Pitman, London 1991, pp. 397-406.
- [15] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets, Inform. and Control*, 8(1965)338-353.