数理解析研究所講究録
第1563巻 2007年 43-51

アンダーソンモデルにおける 固有値・固有関数の分布について

高知大学・理学部　中野史彦(Fumihiko Nakano)
Department of Mathematics,
Kochi University

概要

アンダーソンモデルの局在領域 $I(\subset \mathbf{R})$ において、その固有値・固有関数の分布を調べ、次のような結果を得た。(1) I において、固有関数は空間的に一様に分布している、(2) 対応する固有値が L^{-d} のオーダーの間隔であるような固有関数の分布は、L 無限大の極限でポアソン分布に収束する、(3) 対応する固有値が L^{-2d} のオーダーの間隔であるような固有関数は互いに反発している。(4) 有限体積近似により、固有値・固有関数の近似を構成できる。

1 序

$L^2(\mathbf{R}^d)$ または $l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のシュレーディンガー作用素 $H = -\triangle + V$ において、V が遠方で減衰していない場合には、その大域的な構造により様々なスペクトル構造が現れる。ここでは、その1つとしてアンダーソンモデルと呼ばれるシュレーディンガー作用素を考える。これは $l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のランダムなポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素であり、次のように定義される。

$$(H\phi)(x) = \sum_{|x-y|=1} \phi(y) + \lambda V(x)\phi(x), \quad \phi \in l^2(\mathbf{Z}^d).$$

ここで、$\lambda \neq 0$ はカップリング定数であり、$\{V(x)\}_{x\in\mathbf{Z}^d}$ はある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の独立同分布な実数値確率変数で、その共通の分布は有界な密度 ρ を持つものとする。H は不純物を含む媒質中における電子の運動を1体近似の下に記述していると考えられ、数学者、物理学者など様々な立場からの研究がなされているが、その内のごく一部を挙げると次のようになる。

(1) $\sigma(H)$ は確率1において次のように与えられる ([18, 12]など):

$$\sigma(H) = \Sigma \quad a.s., \quad \Sigma := [-2d, 2d] + \lambda \operatorname{supp} \rho.$$

これは $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ におけるある ergodic shift の族について H が covariant であることに起因する。

(2) (Anderson 局在, [1, 2, 5, 7, 11, 19]など) ある区間 $I(\subset \Sigma)$ が存在して、確率

1 において $\sigma(H)\cap I$ は連続成分を持たず、稠密に分布する固有値のみからなり、対応する固有関数は指数的に減衰する。この現象は、不純物の作るポテンシャルにより電子の ballistic な運動が阻害される、という描像に基づいて [3] において予想されたものであり、アンダーソン局在と呼ばれている。その数学的証明のために様々な手法が著名な研究者により考案され確立しているが、いずれも容易なものではない。
I は、次のようにとれる。
(i)(high disorder) $\lambda \gg 1$ のとき、$I=\Sigma$, (ii)(extreme energy) supp ρ が非有界であるとき、ある $E_0>0$ について $I=\{E\in\mathbf{R}:|E|\geq E_0\}\cap\Sigma$, (iii)(band edges) $\inf\sigma(H),\sup\sigma(H)$ の近傍、(iv) $\lambda\ll 1$ のとき、フリーラプラシアン（H の定義において $V=0$ として得られる作用素）のスペクトル $[-2d,2d]$ から離れた領域。

本研究の目的は、アンダーソン局在が起きている領域 $I(\subset\Sigma)$ において、固有値・固有関数の分布の様子を(エネルギー) × (空間) の直積空間において記述し調べることである。直積空間において記述する理由は、対応するエネルギーのスケールの取り方により固有関数の分布の様子が異なるからである。まず、記号を定義する。

記号
(1) $\Lambda_L(x)$ を、$x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\mathbf{Z}^d$ を中心に持つ辺の長さ $L>0$ の有限ボックスとする。また、$\partial\Lambda$ をボックス $\Lambda(\subset\mathbf{Z}^d)$ の「境界」とする：

$$\Lambda_L(x):=\{y\in\mathbf{Z}^d:|y_j-x_j|\leq\frac{L}{2},\ j=1,2,\cdots,d\},$$
$$\partial\Lambda:=\{x\in\Lambda:|y-x|=1\ \text{ for some } y\notin\Lambda\}.$$

(2) ボックス Λ に対し、$H_\Lambda:=H|_\Lambda$ を H の Λ への制限とする。特に指定しない場合には Dirichlet 境界条件の下で考える。
(3) $\gamma>0, E\in\mathbf{R}$ をとり、$G_\Lambda(E;x,y):=\langle x|(H_\Lambda-E)^{-1}|y\rangle,\ x,y\in\mathbf{Z}^d$ をグリーン関数の行列要素とする[1]。ボックス $\Lambda_L(x)$ が (γ,E)-regular であるとは、$E\notin\sigma(H_{\Lambda_L(x)})$ であり、かつ次の不等式が成立つことと定義する。

$$|G_{\Lambda_L(x)}(E;x,y)|\leq e^{-\gamma\frac{L}{2}},\quad y\in\partial\Lambda_L(x).$$

(4) $\phi\in l^2(\mathbf{Z}^d),\phi\neq 0$ に対し、$X(\phi)$ をその局在中心のなす集合とする：

$$X(\phi):=\{x\in\mathbf{Z}^d:|\phi(x)|=\max_{y\in\mathbf{Z}^d}|\phi(y)|\}.$$

[1] ここで、$\langle x|A|y\rangle:=\langle\delta_x,A\delta_y\rangle_{l^2(\mathbf{Z}^d)},\ \delta_x(z):=1(z=x),:=0(z\neq x)$.

この定義は [6] による。$x(\phi) \in X(\phi)$ を $\mathbf{Z}^d$ 上のある順序関係によって選ぶこととする[2]。H の固有値 E に対し、対応する固有関数 ϕ_E を適当な手続きにより選び、$X(E) := X(\phi_E), x(E) := x(\phi_E)$ とおく。ボックス Λ に対し、$X(\phi) \cap \Lambda \neq \emptyset$ (resp. $X(\phi_E) \cap \Lambda \neq \emptyset$) であるとき、ϕ (resp. E) は Λ に localize しているということにする。

(5) ハミルトニアン $H = H_\Lambda$, 区間 $J(\subset \mathbf{R})$, 及びボックス $C(\subset \Lambda)$ に対し、次のように定める。

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(H, J) &:= \{ \text{ eigenvalues of } H \text{ in } J \ \} \\
\mathcal{E}(H, J, C) &:= \{ \text{ eigenvalues of } H \text{ in } J \text{ localized in } C \ \} \\
\mathcal{E}f(H, J) &:= \{ \text{ normalized eigenfunctions of } H \text{ in } J \ \} \\
\mathcal{E}f(H, J, C) &:= \{ \text{ normalized eigenfunctions of } H \text{ in } J \text{ localized in } C \ \}
\end{aligned}$$

(6) ある非減少関数 $N : \mathbf{R} \to [0, 1]$ が存在して、確率 1 において N の連続点 $E \in \mathbf{R}$ に対し、

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|} \sharp \mathcal{E}(H_{\Lambda_L}, (-\infty, E]) = N(E)$$

となる[3]。N を integrated density of states, N の定める $\mathbf{R}$ 上の測度 ν を density of states measure と呼ぶ。ν は次の量に等しくなることが知られている。

$$\nu(A) := \mathbf{E}[\langle 0|P_A(H)|0\rangle], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

ここで、$P_A(H)$ は A に対応する H のスペクトル射影作用素である。

本研究を通して次のことを仮定する。

Assumption *ある区間 $I = (a, b)(\subset \Sigma)$ 及び正定数 $\gamma > 0, p > 6d$ が存在して、十分大きな L_0 に対して次が成立つ。*

$$\mathbf{P}\Big(\textit{ For any } E \in I,\ H_{\Lambda_{L_0}(0)} \textit{ is } (\gamma, E)\textit{-regular } \Big) \geq 1 - L_0^{-p}$$

[2]アンダーソン局在が起こる領域において、対応する固有関数の局在中心は 1 箇所に集中して存在しているため、この ambiguity は後に述べる Theorem 2.1, 2.2 の結果には影響しない。実際、位置演算子の量子力学的期待値

$$\langle x\rangle_\phi := \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} y|\phi(y)|^2 \left(\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} |\phi(y)|^2 \right)^{-1}$$

の方が局在中心の定義としてより適当と思われるが、この定義を採用しても Theorem 2.1, 2.2 はそのまま成立つ。

[3]実際は N は $\mathbf{R}$ 上連続である。

この仮定はアンダーソン局在が見られる領域、例えばアンダーソン局在を説明した段落において述べた Σ に含まれるある区間 I において成立つ。α を $1 < \alpha < \frac{2p}{p+2d}$ となるようにとり、次のようにおく。

$$L_{k+1} := L_k^{\alpha}, \quad \Lambda_k(x) := \Lambda_{L_k}(x), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

すると multiscale analysis と呼ばれる手法により次の評価が得られ、更にこの評価から I においてアンダーソン局在が起こることが示される [19]：$|x-y| > L_k$ なる任意の $x, y \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\mathbf{P}\left(\text{ For any } E \in I, \text{ either } \Lambda_k(x) \text{ or } \Lambda_k(y) \text{ is } (\gamma, E)\text{-regular }\right) \geq 1 - L_k^{-2p}.$$

次の定理は予備的考察である。

Theorem 1.1 *[15] $d_k = L_k^{-d} k^{-2} (k = 1, 2, \cdots)$ とおく。$E_0 \in I$ を任意にとると、$a.e. \omega \in \Omega$ に対してある $k_0 = k_0(\omega)$ が存在して、$k \geq k_0$ のとき $|E - E_0| \leq d_k$ なる H の固有値 E は $X(E) \cap \Lambda_k = \emptyset$ を満たす。*

これは「 $|E - E_0| \leq L^{-d}$ なる固有値の局在中心は原点から L 離れた所にある」ことを示唆する。$E_0 = \inf \sigma(H)$ のときは、Lifschitz tail により局在中心は更に原点より離れる： $|E - E_0| \leq L$ のとき $|x(E)| \geq (const.) e^{(const.) L^{\frac{d^2}{2}}}$.

2 得られた結果

2.1 局在中心の分布

(1) Macroscopic Limit

$\Lambda_k = \{1, 2, \cdots, L_k\}^d$, $k = 1, 2, \cdots$ をサイズ L_k のボックスとし、$H_k := H|_{\Lambda_k}$ を周期的境界条件の下で考える。

$\{E_j(\Lambda_k)\}$ を H_k の固有値とし、$\{F_j(\Lambda_k)\} = \{E_j(\Lambda_k)\} \cap I$ とおく。次のような $I \times K$ ($K := [0, 1]^d$) 上のランダム測度を考える[4]。

$$\xi_k := \frac{1}{|\Lambda_k|} \sum_j \delta_{X_j}, \quad X_j := (F_j(\Lambda_k), L_k^{-1} x(F_j(\Lambda_k))) \in I \times K, \quad K := [0, 1]^d.$$

局在中心に対するスケーリングは Theorem 1.1 の示唆する所から自然であると思われる。次の定理は固有関数の局在中心が一様に分布していることを示唆する。

[4] $\mathbf{R}^n$ 上のボレル測度の集合 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 上に vague topology を導入して位相空間と見なすとき、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ から $(\mathcal{M}(\mathbf{R}^n), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)))$ への可測写像を $\mathbf{R}^n$ 上のランダム測度と呼ぶ。

Theorem 2.1 $\xi_k \xrightarrow{v} \nu \times dx$, *a.s. as* $k \to \infty$.

Theorem 2.1 は density of states measure ν を固有状態の直積空間での密度を表す指標とも見なせることを意味する。Theorem 2.1 は技術的な点を除けば integrated density of states の存在より導かれ、よって multiscale analysis が実行可能なハミルトニアン(e.g., [4, 10])について一般的に成立つ。

(2) **Local fluctuation**

ρ の有界性により $N(E)$ はリプシッツ連続になることから、典型的なサンプルについて H_Λ の固有値は $|\Lambda|^{-1}$ のオーダーの間隔をなして分布していると推測される。よって、その局所的なゆらぎを見るために、reference energy $E_0 \in I$ をとり、E_0 を中心に固有値をスケールして、次のような $\mathbf{R} \times K$ 上の点過程を考える。

$$\xi'_k := \sum_j \delta_{Y_j}, \quad Y_j := (|\Lambda_k|(E_j(\Lambda_k) - E_0), L_k^{-1}x(E_j(\Lambda_k))) \in \mathbf{R} \times K.$$

Theorem 2.2 *[16]* $E_0 \in I$ *を* ν *のルベーグ点とすると、*$\xi'_k \xrightarrow{d} \zeta_P$ *as* $k \to \infty$. *ここで、*ζ_P *は intensity measure* $\mathbf{E}\zeta_P(dE \times dx) = \frac{d\nu}{dE}(E_0)dE \times dx$ *を持つ* $\mathbf{R} \times K$ *上のポアソン過程。*

これは南就将氏による著名な結果 [14] の拡張と見なせるが、実際、その証明のアイデアは本質的に [14] によるものである：Theorem 2.2 の証明は、H_k と H_{k-1} のコピーの直和 $\oplus_j H_{k-1,j}$ とを考え、I におけるこれらの固有値同士の 1 対 1 対応を構成して、Minami's estimate [14] を用いて Poisson convergence theorem を適用することによって行われる。アンダーソン局在が起こるような他のハミルトニアン[4, 10]では、$\{\xi'_k\}_k$ は相対コンパクトであり、その集積点が無限分解可能な点過程であることまでしかわからない。この結果を空間軸に射影することにより、$E_0 + J/|\Lambda_k|$ ($J(\subset \mathbf{R})$ は区間) にある H_k の固有値に対応する局在中心からなる K 上の点過程は K 上のポアソン点過程に収束することがわかる。一方、[8] では、局在中心がポアソン過程に従うことを仮定して Mott's formula を導いている。

(3) **固有関数の反発**

Theorem 2.2 は、互いに L^{-d} よりも近い距離にある固有値の局在中心はある程度離れることを示唆する。より定量的には次が成立つ。

Theorem 2.3 *[15]* $d'_k := L_k^{-2d}k^{-2}$ *とおく。a.e.*ω *において、*H *の任意の固有値* $E \in I$ *に対しある* $k_0 = k_0(E, \omega)$ *が存在して、*$k \geq k_0$ *のとき他の固有値* E' *で* $|E - E'| \leq d'_k$ *なるものは* $|x(E) - x(E')| \geq L_k$ *を満たす。*

Theorem 2.3 は、「2つの固有値 E, E' が $|E-E'| \le L^{-2d}$ を満たすならば、対応する固有関数は $|x(E)-x(E')| \ge L$ を満たす」ことを意味する。証明のアイデアは次のようである。H の2つの固有値 E_1, E_2 に対応する固有関数の局在中心同士の距離が L_k であるとする。それらを囲むサイズ L_k のオーダーのボックス H_Λ を考えると、H_Λ は2つの固有値 E'_1, E'_2 を持ち、それらは $|E_j - E'_j| \le (const.)e^{-\gamma' L_{k-1}/2}, j=1,2, 0<\gamma'<\gamma$ を満たす。再び Minami's estimate により、$|E'_1 - E'_2| \ge d'_k$ でなければならない[5]。

2.2 固有関数の分布 –より自然な定式化–

Theorems 2.1, 2.2 は、H そのものではなくその有限体積近似 H_k の無限体積極限を考えていることと、固有関数そのものではなくその局在中心の分布を考えている、という点で不十分であるといえる。そこで、より改良された記述を行いたい[13]. $\mathbf{R}^{d+1}$ 上のランダム測度を次のように定義する。

$$\xi(J \times B) := \mathrm{Tr}\ (1_B(x) 1_J(H_\omega) 1_B(x)), \quad J \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}^d.$$

ここで、1_B を $\mathbf{Z}^d$ 上のかけ算作用素と見なしている。Macroscopic limit を記述するために、次で与えられる ξ のスケーリング ξ_L を考える。

$$\xi_L(J \times B) := \frac{1}{L^d}\ \mathrm{Tr}\ (1_{LB}(x) P_J(H) 1_{LB}(x)).$$

Local fluctuation を見るためには、reference energy $E_0 \in I$ をとり、次のスケーリング ξ'_L を考える。

$$\xi'_L(J \times B) := \ \mathrm{Tr}\ (1_{LB}(x) P_{E_0 + L^{-d}J}(H) 1_{LB}(x)).$$

Theorem 2.4 *(with R. Killip)*
(1) $\xi_L \xrightarrow{v} \nu \times dx$, *a.s.*
(2) $E_0 \in I$ *を* ν *のルベーグ点とすると、*$\xi'_L \xrightarrow{d} \zeta_{P,\mathbf{R}^{d+1}}$. *ここで、*$\zeta_{P,\mathbf{R}^{d+1}}$ *は* $\mathbf{R}^{d+1}$ *上のポアソン過程で、*$\mathbf{E}\zeta_{P,\mathbf{R}^{d+1}}(dE \times dx) = \frac{d\nu}{dE}(E_0) dE \times dx$.

2.3 有限体積近似

$\Lambda_k := \Lambda_{L_k}(0)$ を原点を中心とするサイズ L_k のボックスとし、$H_k := H|_{\Lambda_k}$ を周期的境界条件の下で考える。H_k の I における固有値・固有関数の列 $\{E_{j,k}\}, \{\phi_{j,k}\}$

[5]この評価は [9] における議論を借用して得られたものである。

で、H のそれに収束するものを具体的に構成したい。H_k は作用素の強収束の意味で H に収束しているから、一般論により、任意の $E \in \sigma(H)$ に対し $E_k \to E$ となるような $E_k \in \sigma(H_k)$ を常にとることができる。しかし、固有値のみに収束する列を具体的に構成する為には、並びに固有関数も同時に収束させる為には以下のような若干の議論を必要とする。まず、ボックス D_k を

$$D_k := \{x \in \Lambda_k : d(x, \partial\Lambda_k) \geq 2L_{k-1}\}$$

と定め、γ' を $0 < \gamma' < \gamma$ を満たすように任意にとり、次のようにおく。

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &:= \sum_{l \geq k} \epsilon_{l-1}, \quad \epsilon_l := e^{-\gamma' L_l/2}, \\ I &= (a, b), \quad I_k := (a + \epsilon(k), b - \epsilon(k)). \end{aligned}$$

Theorem 2.5 *[17] a.e.ω について、ある $K(\omega) = K(\omega, \alpha, d, \gamma, \gamma')$ が存在して次を満たす。$k \geq K(\omega)$ のとき、1 対 1 写像*

$$\varphi_{k,k+1} : \mathcal{E}(H_k, I_k, D_k) \to \mathcal{E}(H_{k+1}, I_{k+1}, \Lambda_k)$$

を構成できて、

$$\begin{aligned} \{E(j; K(\omega), K(\omega))\}_j &= \mathcal{E}(H_{K(\omega)}, I_{K(\omega)}, D_{K(\omega)}) \\ \{E(j; k, k)\}_j &= \mathcal{E}(H_k, I_k, D_k) \setminus \varphi_{k-1,k}\left(\mathcal{E}(H_{k-1}, I_{k-1}, D_{k-1})\right), \quad k > K(\omega) \\ E(j; k, m) &= \varphi_{m-1,m} \circ \varphi_{m-2,m-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k,k+1}(E(j; k, k)), \quad m > k \end{aligned}$$

とおくと、極限

$$E(j, k) := \lim_{m \to \infty} E(j; k, m)$$

が任意の j, k について存在して H の I における固有値となる。更に、対応する正規化された固有関数は H のそれに $l^2(\mathbf{Z}^d)$ の意味で収束し、$X(E(j, k)) \subset \Lambda_k$ が成立つ。逆に H の $I_{K(\omega)}$ における固有値・固有関数 E, ϕ_E に対し、対応する固有値・固有関数の列 $\{E(j; k, m)\}_m, \{\phi_{j,k,m}\}_m$ がとれて E に収束する。

証明は、H_k の D_k に局在した固有値・固有関数の１つ１つに H_{k+1} のそれを対応させる（この写像が $\varphi_{k,k+1}$ になる）ことにより行われる。対応させる H_{k+1} の固有値を唯一定めるのに Minami's estimate が三たび用いられる。

Remark 2.1 *(1) $(j, k) \neq (j', k')$ のとき $E(j, k) \neq E(j', k')$ となるので、$\{E(j, k)\}$ は H の I における固有値のラベリングを与える。*
(2) I における H の固有値ではない元に収束する列も $\{E(j; l, k)\}$ を用いて容易に

構成できる。
(3) Theorem 2.5 により、H_k の「境界から離れた所に存在する」固有値は指数的誤差を除いて H の固有値であり、更に対応する H_k の固有関数の「近くに」対応する H の固有関数が存在していることがわかる。これらの固有関数が空間的に互いにほぼ独立に存在し、H の稠密に分布する固有値をなしているのである。これは H を有限体積上のハミルトニアンの直和で近似すること $H \simeq \oplus_k H_k$ が固有値のみならず固有関数の意味でも成立っていることを示唆する。

Acknowledgement この問題について教えて下さり、更に本研究に関して数々の貴重な助言と議論を下さった筑波大学の南就将氏に感謝申し上げたい。この研究は科学研究費基盤C no.18540125 の援助を受けた。

参考文献

[1] Aizenman, M., : Localization at Weak Disorder: Some Elementary Bounds, Rev. Math. Phys. **6**(1994), 1163-1182.

[2] Aizenman, M., Molchanov, S., : Localization at Large Disorder and at Extreme Energies: An Elementary Derivation, Commun. Math. Phys. **157**(1993), 245-278.

[3] Anderson, P. W., : Absence of diffusion in certain random lattices, Phys. Rev. **109**(1958), 1492-1505.

[4] Faris, W., : Localization Estimates for Off-Diagonal Disorder, Lectures in Applied Mathematics, Vol. **27**(1991), 391-406.

[5] Fröhlich, J., Spencer, T., : Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy, Commun. Math. Phys. **88**(1983), 151-184.

[6] Germinet, F., De Bièvre, S. : Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators. Comm. Math. Phys. 194 (1998), no. 2, 323–341.

[7] Goldsheid, I. Ja., Molchanov, S. A., and Pastur, L. : A pure point spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator J. Funct. Anal. Appl. **11**(1977)1-10.

[8] Kirsch, W., Lenoble, O., and Pastur, L. : On the Mott formula for the a.c. conductivity and binary correlators in the strong localization regime of disordered systems, J. Phys. A. **36** (2003), no. 49, 12157–12180.

[9] Klein, A., Molchanov, S. : Simplicity of eigenvalues in the Anderson model, J. Stat. Phys. **122** (2006), no.1, p.95-99.

[10] Klopp, F., Nakamura, S., Nakano, F., and Nomura, Y.: Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields, Annales Henri Poincaré 4(2003), p.795-811.

[11] Kotani, S., Lyapunov exponents and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators, Proc. Conf. on Random Matrices and their applications, Contemporary Math. AMS. Providence, R. I.

[12] Kunz, H., Souillard, B. : Sur le spectre des operateurs aux differences finies aleatoires., Comm. Math. Phys. **78**(1980), 201-246.

[13] Killip, R., Nakano, F. : Eigenfunction statistics in the localized Anderson model, Annales Henri Poincaré. **8**, no.1 (2007) p.27-36.

[14] Minami, M., : Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys. **177**(1996), 709-725.

[15] Nakano, F., : The repulsion between localization centers in the Anderson model, J. Stat. Phys. **123**, (2006), no. 4, 803-810.

[16] Nakano, F., : The distribution of the localization centers in some discrete random systems, math-ph/0701042.

[17] Nakano, F., : The finite volume approximation of the Anderson model, Journal of Mathematical Physics **48**(2007) 042102.

[18] Pastur, L. A., : Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation, Comm. Math. Phys. **75**(1980), 179-196.

[19] von Dreifus, H., Klein, A., : A new proof of localization in the Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys. **124**(1989), 285-299.