数理解析研究所講究録
第 1563 巻 2007 年 157-161

The zero modes and zero resonances of Dirac operators

アラバマ大学バーミンガム校数学科 斉藤義実 (Yoshimi Saitō)
Department of Mathematics, University of Alabama at Birmingham

兵庫県立大学物質理学研究科 梅田登美男 (Tomio Umeda)
Graduate School of Material Science, University of Hyogo

1 序

つぎのような作用素を考察します：

$$H = \alpha \cdot D + Q(x) \tag{1}$$

ここで $D = -i\nabla_x$ であり, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は Dirac 行列

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

ただし $\mathbf{0}$ は 2×2 の零行列、σ_j は Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

また $Q(x)$ は 4×4 の エルミート行列に値を取る関数であって, 下記の仮定 (A) を満たすものとします.

仮定(A) $Q(x)$ の各成分 $q_{jk}(x)$ $(j, k = 1, \cdots, 4)$ は可測関数であって,

$$|q_{jk}(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\rho} \quad (\rho > 1) \tag{2}$$

を満たす.

作用素 (1) は電磁場のポテンシャルを持つ Dirac 作用素

$$\alpha \cdot (D - A(x)) + q(x)I_4 \tag{3}$$

の一般化と見ることが出来ます。実際, (3) において $Q(x) = -\alpha \cdot A(x) + q(x)I_4$ と取ればよい. したがって, 作用素 (1) は質量がゼロの Dirac 作用素を念頭においたものであることを注意しておきます。(3) において, とくに $q(x) \equiv 0$ の場合は

$$\alpha \cdot (D - A(x)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma \cdot (D - A(x)) \\ \sigma \cdot (D - A(x)) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

となります. ここに現れた作用素 $\sigma \cdot (D - A(x))$ は Balinsky– Evans [6] において Weyl-Dirac 作用素と呼ばれています. 2 成分のベクトル値関数に作用する Dirac 作用素である, というような意味でこのような呼称を用いていると思われます.

作用素 (1) は "variable mass" の Dirac 作用素

$$\alpha \cdot D + m(x)\beta + q(x)I_4 \tag{4}$$

の一般化と見ることも出来ます. ここで β は

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}$$

です. 作用素 (4) のスペクトル的性質について近年盛んに研究が行われました. Kalf–Yamada [15], Kalf–Okaji–Yamada [16], Schmidt–Yamada [22], Pladdy [18], Yamada [23] を御覧下さい.

2 主結果

(1) で与えられた形式的作用素 H は定義域を

$$\mathrm{Dom}(H) = \mathcal{H}^1 := [H^1(\mathbb{R}^3)]^4 \tag{5}$$

と取ることにより, $\mathcal{L}^2 := [L^2(\mathbb{R}^3)]^4$ における自己共役作用素になります。以後, これを再び H と書くことにします. ただし (5) において $H^1(\mathbb{R}^3)$ は 1 階のソボレフ空間を表します.

後で必要になりますので, 重み付き L^2 空間を導入しておきます：

$$L^{2,s}(\mathbb{R}^3) := \left\{\, u \mid \|u\|^2_{L^{2,s}} := \int_{\mathbb{R}^3} \langle x\rangle^{2s} |u(x)|^2\, dx < +\infty \,\right\} \tag{6}$$

と定め, さらに $\mathcal{L}^{2,s} := [L^{2,s}(\mathbb{R}^3)]^4$, $\mathcal{L}^2 := \mathcal{L}^{2,0}$ と表すことにします.

定義 f が作用素 H のゼロ・モードであるとは, $f \in \mathrm{Dom}(H) \setminus \{0\}$ であって, かつ $Hf = 0$ を満たすことを言う. f が作用素 H のゼロ・レゾナンスであるとは, $f \in \mathcal{L}^{2,-s} \setminus \mathcal{L}^2$ $(\exists s > 0)$ であって, 超関数の意味で $Hf = 0$ を満たすことを言う.

ゼロ・レゾナンスの定義は論文によりまちまちですが，共通理解としては「$\mathcal{L}^2$ には属さないけれども，$\mathcal{L}^2$ より少し大きな関数空間には属す関数 f で，$Hf=0$ を超関数の意味で満たすもの」と言えば大きな間違いにならないと思います。このような事情を考慮して，以下では

$$\rho > \frac{3}{2}, \quad 0 < s \leq \min\{\frac{3}{2},\ \rho - 1\}$$

を満たす場合にのみゼロ・レゾナンスを考察することにします。

Weyl-Dirac 作用素がゼロ・モードを持つようなベクトル・ポテンシャル $A(x)$ を構成した最初の仕事は Loss-Yau [17] です．磁場が作用するクーロン系の安定性の問題において，Weyl-Dirac 作用素がゼロ・モードをもつようなベクトル・ポテンシャルの存在，非存在が鍵となることを明らかにした論文 Fröhlich-Lieb-Loss [14] とともに，論文 [17] は（３次元の）ゼロ・モードのその後の研究の端緒を切り開いた，と言う意味で非常に重要な仕事だと思います．

参考までに，Loss-Yau [17] 以後のゼロ・モードに関する仕事を私達の知り得た範囲で列挙します：Adam-Muratori-Nash [1], [2], [3], Balinsky-Evans [5], [6], [7], Bugliaro-Fefferman-Graf [8], Elton [9], Erdös-Solovej [10], [11], [12].

ここまで３次元に限って述べてきましたが，ゼロ・モードの研究は２次元の場合が先行していました：Aharonov-Casher [4]．この論文で既にゼロ・モードという用語が使われています．（同じ論文の中で zero-energy eigenstates という用語も使用されているのですが！）２次元のゼロ・モードの研究で，比較的最近のものとしては Erdös-Vougalter [13], Persson [19], Rozenblum-Shirokov [20] があります．（見落としがあるかもしれないことをお断りしておきます.）すでに挙げた Balinsky-Evans [6], [7] では２次元の場合も考察しています．

さて，話題を３次元の場合に戻して，主結果を述べます．

定理 1　*$\rho > 1$ とし，f をディラック作用素 (1) のゼロ・モードとする．このとき，f は連続関数であって，$|f(x)| \leq C\langle x\rangle^{-2}$ を満たす．*

注意 1 *Loss-Yau [17]* で構成されたベクトル・ポテンシャル $A(x)$，ゼロ・モード $f(x)$ はともに $|x| \to \infty$ のとき $O(|x|^{-2})$ です．したがって，定理 1 は（少なくとも $1 < \rho \leq 2$ の場合には）最良の減衰評価を与えています．

定理 2　*$\rho > 3/2$ とし，f をディラック作用素 (1) のゼロ・レゾナンスとすると $f \in \mathcal{H}^1$.*

この定理により，先に述べた意味でのゼロ・レゾナンスは存在しないことが解ります．

証明の要点は定理１，２ともに次の関係式を導くことにあります：

$$f = -TQf,$$

ここで T はベクトル値関数 $f = {}^t(f_1, f_2, f_3, f_4)$ に作用する特異積分作用素

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{i\alpha \cdot (x-y)}{4\pi|x-y|^3} f(y)\, dy.$$

証明の詳細は Saitō-Umeda [21] を御覧下さい.

References

[1] C. Adam, B. Muratori and C. Nash, *Zero modes of the Dirac operator in three dimensions*, Phys. Rev. D **60** (1999), 125001-1 – 125001-8.

[2] C. Adam, B. Muratori and C. Nash, *Degeneracy of zero modes of the Dirac operator in three dimensions*, Phys. Lett. B **485** (2000), 314–318

[3] C. Adam, B. Muratori and C. Nash, *Multiple zero modes of the Dirac operator in three dimensions*, Phys. Rev. D **62** (2000), 085026-1 – 085026-9.

[4] Y. Aharonov and A. Casher, *Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field* , Phys. Rev. A **19** (1979), 2461–2462.

[5] A.A. Balinsky and W.D. Evans, *On the zero modes of Pauli operators*, J. Funct. Analysis, **179** (2001), 120–135.

[6] A.A. Balinsky and W.D. Evans, *On the zero modes of Weyl-Dirac operators and their multiplicity*, Bull. London Math. Soc., **34** (2002), 236–242.

[7] A.A. Balinsky and W.D. Evans, *Zero modes of Pauli and Weyl-Dirac operators*, Advances in differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 2002), 1–9, Contemp. Math., **327**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2003.

[8] L. Bugliaro, C. Fefferman and G.M. Graf, *A Lieb-Thirring bound for a magnetic Pauli Hamiltonian, II*, Rev. Mat. Iberoamericana **15** (1999), 593–619.

[9] D.M. Elton, *The local structure of zero mode producing magnetic potentials*, Commun. Math. Phys. **229** (2002), 121–139.

[10] L. Erdös and J.P. Solovej, *The kernel of Dirac operators on* $\mathbb{S}^2$ *and* $\mathbb{R}^2$, Rev. Math. Phys. **13** (2001), 1247–1280.

[11] L. Erdös and J.P. Solovej, *Uniform Lieb-Thirring inequality for the three-dimensional Pauli operator with a strong non-homogeneous magnetic field*, Ann. Henri Poincaré **5** (2004), 671–741.

[12] L. Erdös and J.P. Solovej, *Magnetic Lieb-Thirring inequalities with optimal dependence on the field strength*, J. Statist. Phys. **116** (2004), 475–506.

[13] L. Erdös and V. Vougalter, *Pauli operator and Aharonov-Casher theorem for measure valued magnetic fields*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 399–421.

[14] J. Fröhlich, E.H. Lieb and M. Loss, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. I. The one-electron Atom*, Commun. Math. Phys. **104** (1986),251–270.

[15] H. Kalf and O. Yamada, *Essential self-adjointness of n-dimensional Dirac operators with a variable mass term*, J. Math. Phys. **42** (2001), 2667–2676.

[16] H. Kalf, T. Okaji and O. Yamada, *Absence of eigenvalues of Dirac operators with potentials diverging at infinity*, Math. Nachr. **259** (2003), 19–41.

[17] M. Loss and H.T. Yau, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. III. Zero energy bound states of the Pauli operators*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 283–290.

[18] C. Pladdy, *Asymptotics of the resolvent of the Dirac operator with a scalar short-range potential*, Analysis **21** (2001), 79-97.

[19] M. Persson, *On the Dirac and Pauli operators with several Aharonov-Bohm solenoids*, Lett. Math. Phys. **78** (2006), 139–156.

[20] G. Rozenblum and N. Shirokov, *Infiniteness of zero modes for the Pauli operator with singular magnetic field*, J. Funct. Analysis **233** (2006), 135–172.

[21] Y. Saitō and T. Umeda, *The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators*, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[22] K. M. Schmidt and O. Yamada, *Spherically symmetric Dirac operators with variable mass and potentials infinity at infinity*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **34** (1998), 211–227.

[23] O. Yamada, *On the spectrum of Dirac operators with unbounded potential at infinity*, Hokkaido Math. J. **26** (1997), 439–449.