数理解析研究所講究録
第 1563 巻 2007 年 162-171

A note on the nonrelativistic limit of Dirac operators and spectral concentration

伊藤　宏（愛媛大学 *）
山田　修宣（立命館大学 **）
* Department of Comuputer Science, Ehime Univ.
** Department of Mathematical Sciences, Ritsumeikan Univ.

1. はじめに

外場のない自由粒子の運動を記述する Dirac 作用素は次のように与えられる.

$$L_0(c) = c\alpha \cdot p + mc^2\beta \quad \text{in} \quad \mathcal{H} = L^2(\boldsymbol{R}^3)^4$$

ただし, $c > 0$ は光速, $m > 0$ は考えている粒子の静止質量, $p = -i\nabla_x$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ である. ここで, α_j, β は次の関係を満たす 4 次の Hermite 定数行列である.

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}I_4, \quad (j, k = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

ただし, $\alpha_4 = \beta$, I_n は n 次の単位行列. このような α_j, β は一意には決まらないが, ここでは, 次のような標準的なものを用いる：

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

各 σ_j は Pauli 行列である:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$L_0(c)$ を $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)^4$ で定義した $L_0(c)|_{C_0^\infty}$ は本質的自己共役であり, その（一意的な）自己共役拡張を同じ記号 $L_0(c)$ で表すと $L_0(c)$ のスペクトルは, $(-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)$ であり, 絶対連続スペクトルのみからなる.

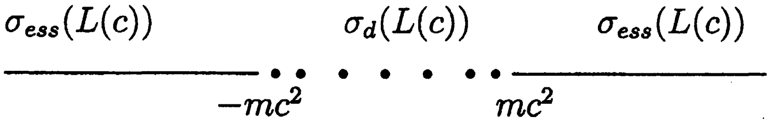
次に, 電場ポテンシャル $v(x) : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ をもった Dirac 作用素

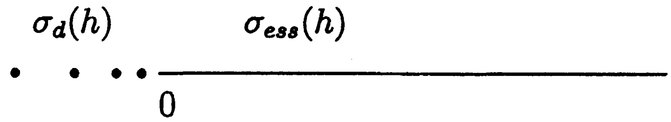
$$L(c) = L_0(c) + v(x)I_4$$

を考える. $v(x)$ が連続ならば, $L(c))|_{C_0^\infty}$ は, 本質的自己共役である. ($L(c)|_{C_0^\infty}$ の本質的自己共役性に関しては $v(x)$ の遠方での挙動は影響しない.) 以下, その（一意的な）自己共役拡張を同じ記号 $L(c)$ で表す.

非相対論的極限 $c \to \infty$ では, Dirac 作用素は, ある意味で, Schrödinger (Pauli) 作用素に近づくと考えられている.

このノートでは，非相対論的極限 $c \to \infty$ における Dirac 作用素と対応する Schrödinger （Pauli）作用素のスペクトルの間の関係を調べることを目的とする．始めに，$|x| \to \infty$ のとき，$v(x) \longrightarrow 0$ となる場合を考える．このときの，$L(c)$ の本質的スペクトルは $\sigma_{ess}(L(c)) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)$ となり，離散スペクトル $\sigma_d(L(c))$ は，区間 $(-mc^2, mc^2)$ の中に存在し，集積点はあるとすれば，$\pm mc^2$ のみである．





対応する Shrödinger 作用素

$$h = -\frac{1}{2m}\Delta + v(x) \quad \text{in } L^2(\boldsymbol{R}^3)$$

のスペクトルは，$\sigma_{ess}(h) = [0, \infty)$，$\sigma_d(h) \subset (-\infty, 0)$，であり，$\sigma_d(h)$ の集積点はあるとすれば 0 のみである．このように 2 つの作用素は類似したスペクトルの構造をもつ．実際，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ とすると，$(L(c) - mc^2 - z)^{-1}$ は，作用素ノルムに関して，$1/c$ で展開できる (e.g.[16]):

$$(L(c) - mc^2 - z)^{-1} = R_0 + \frac{1}{c}R_1 + \frac{1}{c^2}R_2 + \cdots, \quad (c \to \infty) \tag{2}$$

ここで，

$$R_0 = \begin{pmatrix} (h-z)^{-1}I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このことから，h の離散固有値 E (重複度 n) に対して，$L(c)$ の固有値 $\{E_j(c)\}_{j=1}^{2n}$ で，$\lim_{c\to\infty} E_j(c) = E$ となるものが存在することがわかる．

次に，$|x| \to \infty$ のとき，$v(x) \to +\infty$ となる場合を考える．$v(x)$ に適当な条件を課すと，$L(c)$ のスペクトルは，実軸全体であり絶対連続スペクトルのみからなることが知られている (e.g. [16], [10], [11])．一方，h のスペクトルは離散スペクトルのみからなる．このように，$v(x) \to +\infty \quad (|x| \to \infty)$ の場合には，Dirac 作用素のスペクトルと対応する Shrödinger 作用素のスペクトルとは非常に異なる．このことから，先ほどの (2) のような強い結果は期待できないことがわかる．ここでは

- spectral concentration

を通して，二つのスペクトルの間の関係を調べていく．

$$\sigma(L(c)) = \sigma_{ac}(L(c))$$

$$\sigma(h) = \sigma_d(h)$$

• • • • • • • • • •

2. Spectral concentration

次のような Dirac 作用素を考える．

$$H_c := c\alpha \cdot D + \beta mc^2 + V(x)$$

ここで，$D = -i\nabla - \mathbf{b} = (D_1, D_2, D_3)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j - b_j(x)$ である．ただし，$\mathbf{b}$ は，磁場 $\nabla \times \mathbf{b}$ を表すベクトルポテンシャルであり，

$$V(x) = \begin{pmatrix} V_+(x) & 0 \\ 0 & V_-(x) \end{pmatrix}$$

である．各 $V_\pm(x)$ は 2×2 Hermite 行列値関数である．また，Pauli 作用素を次のように定義する:

$$S_\pm = \pm\frac{1}{2m}(\sigma \cdot D)^2 + V_\pm(x).$$

ここで，$\sigma \cdot D = \sum_{j=1}^3 \sigma_j D_j$ である．また，$S_\pm$ は $L^2(\boldsymbol{R}^3)^2$ で定義される．特に，$\mathbf{b} = 0$ のときは，Schrödinger 作用素である．

$V(x)$, $\mathbf{b}$ が連続ならば $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)^4$ で定義された H_c は本質的自己共役である．一方，$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)^2$ で定義された $S_\pm$ が本質的自己共役であるためには，$V_\pm(x)$ の $|x| \to \infty$ での挙動に関する条件が必要となる．H_c, $SQ_\pm$ (自己共役であると仮定して) のスペクトル測度を各々，$E_c(\cdot)$, $E_\pm(\cdot)$ で表す．ただし，

$$S = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & S_- \end{pmatrix}, \quad Q_\pm = (I \pm \beta)/2$$

である:

$$Q_+ = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

次が主定理である.

定理 1 ([9]) $V_\pm(x) \in C^0$, $b_j(x) \in C^3, j = 1,2,3$ を仮定し, さらに次の条件 (i),(ii),(iii) を満たすとする.

(i) $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)^2$ 上定義された S_+ (S_-) は本質的自己共役である. (自己共役作用素も同じ記号であらわす.)

(ii) $\lambda \in I = (a, b)$ は, S_+ (S_-) の有限重複度を持つ孤立固有値であり,

$$I \cap \sigma(S_+) = \{\lambda\} \quad (I \cap \sigma(S_-) = \{\lambda\})$$

とする. さらに, a, b は S_+ (S_-) の固有値ではないとする.

(iii) λ に対応する S_+ (S_-) の任意の固有関数 u は

$$(\sigma \cdot D)u \in L^2(\boldsymbol{R}^3)^2, \quad V_-(\sigma \cdot D)u \in L^2(\boldsymbol{R}^3)^2 \quad (V_+(\sigma \cdot D)u \in L^2(\boldsymbol{R}^3)^2)$$

を満たす. このとき,

$0 < \tau < 1$ となる τ を固定し,

$$J_c^\pm = \left[\lambda \pm mc^2 - \frac{1}{c^\tau}, \lambda \pm mc^2 + \frac{1}{c^\tau}\right], \ I_c^\pm = \left[a \pm mc^2, b \pm mc^2\right]$$

とおくと $\forall \Phi \in L^2(\boldsymbol{R}^3)^4$ に対して. 強収束の意味で次が成り立つ:

$$\begin{array}{l} E_c(I_c^+ \setminus J_c^+)\, Q_+\Phi \longrightarrow 0, \\ E_c(J_c^+)Q_+\Phi \longrightarrow E_+(\{\lambda\})Q_+\Phi \end{array} \quad \left(or \ \begin{array}{l} E_c(I_c^- \setminus J_c^-)\, Q_-\Phi \longrightarrow 0, \\ E_c(J_c^-)Q_-\Phi \longrightarrow E_-(\{\lambda\})Q_-\Phi \end{array} \right)$$

証明は Veselić [19] と同じアイデアに従うが, 許されるポテンシャルの条件はかなり弱くなっている.

$V(x)$ がスカラー関数の場合を考える. $V(x) = v(x)I_4$,

$$v(x) \to +\infty \ (|x| \to \infty) \tag{3}$$

Veselić [19] は, $\mathbf{b} = 0$, $v(x)$ が多項式増大の場合を考えた. しかし, [9] では, 次のようなかなり広いクラスの電磁場に適用することができる.

(A1)

$$\mathbf{b} \in C^3, \quad v(x) \in C^1(\boldsymbol{R}^3).$$

(A2)

$$v(x) \to +\infty, \ \nabla v(x) = o(v(x)^{3/2}) \quad (|x| \to \infty) \tag{4}$$

たとえば, $v(x)=\exp(|x|^2)$, $v(x)=\exp(\exp(|x|^2))$ が満たされる.

この仮定のもと, S_+ は $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)^2$ を core にもつ自己共役作用素であり, コンパクトなレゾルベントをもつ.

定理の条件 (iii) は, 次の補題 で $n=2$ として確かめられる.

補題 2 $\mathrm{b}\in C^1$, $v\in C^1$ かつ (3),(4) を満たしているとする. $u(x)$ を固有値 λ に対する S_+ の固有関数とする, $S_+u=\lambda u$. このとき, u は次の意味で遠方で減衰する: $\forall n\in\boldsymbol{N}$ に対して,

$$\int_{\boldsymbol{R}^3}|v|^n\left[\frac{|(\sigma\cdot D)u|^2}{2m}+v|u|^2\right]dx<\infty.$$

証明には, 部分積分を用いる. 詳しくは, [9] を参照.

3. 証明の概略

(2) のような作用素ノルムでの収束は言えないが, 強収束での次の結果が成り立つ.

補題 2. $\mathrm{Im}\, z\neq 0$ のとき,

$$s-\lim_{c\to\infty}(H_c-mc^2-z)^{-1}=\begin{pmatrix}(S_+-z)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

補題 2 の証明

Foldy-Wouthuysen-Tani 変換の第 1 近似と呼ばれる次のような 1 階偏微分作用素

$$K=\frac{i}{2m}\beta(\alpha\cdot D),\quad D=-i\nabla_x-\mathrm{b}$$

を導入する. K は $(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3))^4$ を core にもつ自己共役作用素であり, propagator $U_s:=\exp(-isK)$, $s\in\boldsymbol{R}$ は有限伝搬性をもつ. すなわち, $\mathrm{supp}\Phi$ がコンパクトなら, $\mathrm{supp}U_s\Phi$ はコンパクトである.

(1) を用いると, $(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3))^4$ 上次の等式が成り立つことが容易にわかる:

$$\begin{aligned}U_s(\alpha\cdot D)U_s^{-1} &= (\alpha\cdot D)U_{-2s}\\ U_s\beta U_s^{-1} &= \beta U_{-2s}\end{aligned}$$

$s=1/c$ として, この 2 つの式から, 任意の $\Phi\in(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3))^4$ に対して,

$$U_sH_cU_s^{-1}\Phi=\left[\frac{1}{s}(\alpha\cdot D)+\frac{m}{s^2}\beta\right]U_{-2s}\Phi+U_sVU_{-s}\Phi \tag{5}$$

を得る. ここで, Maclaurin 展開:

$$U_{-2s}\Phi = \Phi - \frac{s}{m}\beta(\alpha\cdot D)\Phi - \frac{s^2}{2m^2}(\alpha\cdot D)^2\Phi + O(s^3)$$

を前の式に代入して,

$$U_sH_cU_{-s}\Phi = \frac{1}{2m}(\alpha\cdot D)^2\beta\Phi + \frac{m}{s^2}\beta\Phi + U_sVU_{-s}\Phi + O(s) \qquad (6)$$

を得る. 一方, ある $R>0$ が存在して, $|s|<1$ なら, $\mathrm{supp}U_{-s}\Phi$ は原点中心半径 R の球に含まれる. このことから,

$$\begin{aligned} U_sVU_{-s}\Phi - V\Phi &= U_sV(U_{-s}-I)\Phi + (U_s-I)V\Phi \\ &= o(1) \end{aligned}$$

であるから, 結局次のことが成り立つ.

$$s-\lim_{s\to+0}(T_s - \frac{m}{s^2}\beta)\Phi = S\Phi, \quad \forall\Phi\in(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3))^4 \qquad (7)$$

ここで, $T_s = U_sH_cU_{-s}$. また,

$$W_s := T_s - \frac{m}{s^2}\beta - S$$

とおくと, $z\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Im}\,z\neq 0$ に対して,

$$(T_s - \frac{m}{s^2}\beta - z)Q_+\Phi - (S-z)Q_+\Phi = W_sQ_+\Phi$$

$\Psi := (S-z)Q_+\Phi$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} (S_+-z)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi = Q_+\Phi$$

より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (S_+-z)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi &- (T_s - \frac{m}{s^2} - z)^{-1}\Psi \\ &= (T_s - \frac{m}{s^2} - z)^{-1}W_sQ_+\Phi. \end{aligned}$$

右辺は, (7) より, $s\to+0$ のとき 0 に強収束する. ここで, S_+ は $(C_0^\infty)^2$ を core としているから, $(S_+-z)(C_0^\infty)^2$ は $(L^2)^2$ で稠密である. よって,

$$s-\lim_{s\to0}(T_s - \frac{m}{s^2} - z)^{-1}Q_+ = \begin{pmatrix} (S_+-z)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_+$$

となる. 一方,

$$\begin{aligned}(H_c - mc^2 - z)^{-1}Q_+ &= U_s^{-1}(T_s - \frac{m}{s^2} - z)^{-1}U_sQ_+ \\ &= U_s^{-1}(T_s - \frac{m}{s^2} - z)^{-1}[Q_+U_sQ_+ + (1-Q_+)U_sQ_+], \\ & \quad s - \lim_{s\to 0} U_s = I\end{aligned}$$

であるから, 補題が従う.

上の補題から次の補題が従う.

補題 3. $I = [\alpha, \beta]$ とおく. ただし, α および β は, S_+ の固有値でないとする. このとき,

$$s - \lim_{c\to+\infty} E_c([\alpha + mc^2, \beta + mc^2])Q_+ = E_+(I)Q_+$$

定理 1 の証明の概略

λ を重複度 m の S_+ の固有値, $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ を対応する固有関数の正規直交系とし,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_j(c) : &= \begin{pmatrix} \Psi_j \\ (1/2mc)(\sigma\cdot D)\Psi_j \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\Psi}_j : &= \boldsymbol{\Psi}_j(\infty) = \begin{pmatrix} \Psi_j \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

とおく. すると,

$$\begin{aligned}&(H_c - mc^2 - \lambda)\boldsymbol{\Psi}_j(c) \\ &= \begin{pmatrix} V_+ - \lambda & c(\sigma\cdot D) \\ c(\sigma\cdot D) & V_- - \lambda - 2mc^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\Psi}_j(c) \\ &= \begin{pmatrix} (1/2m)D^2\Psi_j + (V_+ - \lambda)\Psi_j \\ (1/2mc)(V_- - \lambda)(\sigma\cdot D)\Psi_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2mc}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (V_- - \lambda)(\sigma\cdot D)\Psi_j \end{pmatrix} = O(\frac{1}{c})\end{aligned}$$

すなわち, $\boldsymbol{\Psi}_j(c)$ は, H_c の $mc^2 + \lambda$ に対する近似的な固有関数とみなせる. このことから次の (8)〜(11) を得る.

補題 4. $P := E_+(\{\lambda\})$, P_c を $\{\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{c})_j\}_{j=1}^m$ の張る閉部分空間への直交射影とする. こ

のとき, 次のことが成り立つ.

$$\|(I - E_c(J_c^+))\Psi_j(c)\| = 0(c^{\tau-1}) \tag{8}$$
$$s - \lim_{c\to\infty}(I - E_c(J_c^+))P_c = 0 \tag{9}$$
$$s - \lim_{c\to\infty} P_c = P \tag{10}$$
$$s - \lim_{c\to\infty} E_c(I_c^+)Q_+ = P \tag{11}$$

(10), (11) を用いて,

$$\begin{aligned} & \|E_c(J_c^+)(I - P_c)Q_+\Phi\| \\ \leq\ & \|E_c(J_c^+)(I - P)Q_+\Phi\| \\ & \quad +\|E_c(J_c^+)(P - P_c)Q_+\Phi\| \\ \leq\ & \|E_c(I_c^+)Q_+(I - P)\Phi\| + \|(P - P_c)Q_+\Phi\| \\ & \longrightarrow 0 \quad (c \to \infty), \end{aligned}$$

を得る. このことと (9), (10) より,

$$\begin{aligned} & E_c(J_c^+)Q_+\Phi - P\Phi \\ =\ & E_c(J_c^+)(I - P_c)Q_+\Phi - (I - E_c(J_c^+))P_cQ_+\Phi \\ & +P_cQ_+\Phi - P\Phi \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

したがって, (11) より,

$$\begin{aligned} & E_c(I_c^+ \setminus J_s^+)Q_+\Phi \\ =\ & E_c(I_c^+)Q_+\Phi - E_c(J_s^+)Q_+\Phi \\ \longrightarrow\ & 0, \end{aligned}$$

これで証明が終わる.

参考文献

[1] Agmon, S., Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : Bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators, Princeton University Press, Princeton (1982).

[2] Amour, L., Brummelhuis, R. and Nourrigat, J., Resonances of the Dirac Hamiltonian in the non relativistic limit, Ann. Henri Poincaré, **2**, 583–603 (2001)

[3] Ciricione R.J. and Chernoff, P.R., Dirac and Klein–Gordon equations : Convergence of solutions in the nonrelativistic limit, Comm. Math. Phys., **79**, 33–46 (1981).

[4] Grigore, D.R., Nenciu, G and Purice, R., On the nonrelativistic limit of the Dirac hamiltonian, Ann. Inst. H. Poincaré, **51**, 231–263 (1989).

[5] Helffer, B. and Sjöstrand, J., Equation Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper, Lecture Note in Phys., **345**, Schrödinger equations, 118–197, eds. H. Holden and A. Jensen, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1989).

[6] Hunziker W., On the nonrelativistic limitof the Dirac theory, Comm. Math. Phys., **40**, 215–222 (1975).

[7] Ikebe, T. and Kato, T., Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, Arch. Rational Mech. Anal., **9**, 77–92 (1962).

[8] Isozaki, H., Many-body Schrödinger equations (in Japanese), Springer–Verlag, Tokyo (2004).

[9] Ito, H. T. and Yamada, O., A note on the nonrelativistic limit of Dirac operators and spectral concentration, Proceeding of the Japan Academy, **81**, 157–161(2005)

[10] Kalf, H., Ōkaji, T. and Yamada, O., Absence of eigenvalues of Dirac operators with potentials diverging at infinity, Math. Nachr., **259**, 19–41 (2003).

[11] Okaji, T., Absolutely cotinuous spectrum of Dirac operators with diverging potentials, preprint.

[12] Reed, M. and B. Simon, Methods of Mathematical Physics, I : Functional Analysis, Academic Press, New York, 1972.

[13] Reed, M. and B. Simon, Methods of Mathematical Physics, IV : Analysis of Operators, Academic Press, London (1978).

[14] K.M. Schmidt and Yamada, O., Spherically symmetric Dirac operators with variable mass and potentials infinite at infinity, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **34**, 211–227 (1998).

[15] Shen, Z., Eigenvalue asymptotics and exponential decay of eigenfunctions for Schrödinger operators with magnetic fields, Trans. Amer. Math. Soc., **348**, 4465–4488 (1996).

[16] Thaller, B., The Dirac equation, Springer, Berlin, 1992.

[17] Titchmarsh, E.C., A problem in relativistic quantum mechanics, Proc. London Math. Soc., **11**, 169–192 (1961).

[18] Uchiyama, J. and Yamada, O., Sharp estimates of lower bounds of polynomial decay order of eigenfunctions, Publ. RIMS, Kyoto Univ.,**26**, 419–449 (1990).

[19] Veselić, K., The nonrelativistic limit of the Dirac equation and the spectral concentration, Glasnik Mat., **4**, 231–241 (1969).

[20] Yajima, K., Nonrelativistic limit of the Dirac theory, scattering theory, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. A1, **23**, 517–523 (1976).

[21] Yamada, O., On the spectrum of Dirac operators with the unbounded potential at infinity, Hokkaido Math. J., **26**, 439–449 (1997).