数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 46-51

トンプソンの主題による変奏曲

飯寄　信保（Iiyori, Nobuo.　山口大学教育学部)

0

有限群の素数グラフの研究は、素数グラフの連結成分の分類、素数グラフが非連結である場合の組成列に関する構造定理等があり、かなり研究が進んでいる。しかし、一般の群のほぼ 100 %は連結な素数グラフしか持たないし、仮に直既約な群の場合でもほとんどの群は、その素数グラフは連結である。つまり素数グラフが非連結という条件は非常に強い条件である。そこでもっと弱い条件「ある点とある点が辺で結ばれていない」から群の構造が解明できないかという問題を考えることにする。

例えば、9 次の対称群を考えてみる。この群の素数グラフの点集合は、2,3,5,7 の 4 つの素数からなっており、辺集合は、(2,3),(3,5),(2,5),(2,7) の 4 辺からなっている。このような、素数グラフを持つような群は、いくらでも容易に構成できる。例えば、$2^8 : A_8$、$S_9 \times 2$-群、$5^6 : (7 : 3) \times 2$-群などである。しかし、このような群に表れる非単純因子は決めることができる。この小論では、非単純因子と素数グラフの辺との関係に焦点をあてて解説する。

ここで記号を用意する。G を有限群とし、σ を G の自己同型とする。$\pi(G,\sigma)$ を G の位数を割り切る素数で次の条件を満たすようなものの全体からなる集合とする：Sylow s-部分群 S で

(c1)$[S,\sigma] \subseteq S$

(c2)$C_S(\sigma) = 1.$

を満たすものが存在する。

注意として (i) 条件 (c1) と (c2) は、$\langle\sigma\rangle$-invariant Sylow s-部分群のとり方に依存しない（これは、$\langle\sigma\rangle$-invariant Sylow's 部分群に関する Sylow の定理より直ちに従う）、(ii)$\pi(G,\mathrm{id}_G)^c = \pi(G)$ ($\pi(G,\mathrm{id}_G)^c$ は、$|G|$ を割り切る素数全体の集合 $\pi(G)$ においての $\pi(G,\mathrm{id}_G)$ の補集合をあらわす) が成立する。

以下に於いて、次を仮定する。

$$(|G|, o(\sigma)) = 1 \text{ かつ } o(\sigma) = p \text{ は素数である}.$$

この条件を仮定すると (c1) は自動的に成立する.

さて、群 $G\langle\sigma\rangle$ の素数グラフにおいて、素数 p とほかの素数が一切つながっていない場合、つまり p が単独で連結成分をなす場合は我々の記号では $\pi(G,\sigma)^c=\emptyset$ と書くことができる。これは、$\langle\sigma\rangle$ の G 上の作用が固定点なしであることを意味する。よって次のトンプソンによる有名な結果が成立する。

Theorem (J.G. Thompson)
もし $\pi(G,\sigma)^c=\emptyset$ であるならば、G は冪零群である.

1

この章において $|\pi(G,\sigma)^c|=1$ となる場合を考えてみる. 基本になるのは次の事実である。

補題 1.
N を G の $\langle\sigma\rangle$-*invariant* 正規部分群とする。このとき次が成立する。
(i) もし $[G/N,\sigma]\neq 1$ であるならば、$|\pi(G/N,\sigma)^c|\leq|\pi(G,\sigma)^c|$ が成立する。
(ii) もし $[N,\sigma]\neq 1$ であるならば、$|\pi(N,\sigma)^c|\leq|\pi(G,\sigma)^c|$. が成立する。

$E(G)$ への $\langle\sigma\rangle$ の作用を観察するために、補題 1 を用いて次の事実を非常に容易に用意することができる.

補題 2
G を有限単純群とする。. もし G の自己同型 σ が $(o(\sigma),|G|)=1$ を満たしているならば、次が成立する。
(1)G は q^p 元体上の Lie 型の単純群 $X_n(q^p)$ である。
(2)σ は G の体準同形写像と共役である。
(3)$\pi(C_G(\sigma))=\pi(X_n(q))$ が成り立つ.

特に、(2) は、我々の仮定「$(|G|,o(\sigma))=1$」より直ちに従う。もしこの条件が抜けると、多少の議論と変更が加わることになる。

さてこの準備の基に考察を進める。$E(G)\neq 1$ と仮定する。このとき、補題 2 により $\pi(C_{E(G)}(\sigma))\geq 2$ となるので矛盾が生じ、$E(G)=1$ 及び、$F^*(G)=F(G)$ を得る。よって、補題 1 により次を得る。

命題 1.
もし $|\pi(G,\sigma)^c|=1$ ならば、G は可解群である。

系　もし $C_G(\sigma)$ がある素数 q に対して、q-群であるならば、G は可解群である。

2

ここでは、$|\pi(G,\sigma)^c| = 2, 3$ の場合を観察してみる．前の章と同様に単純群に関する観察結果を紹介しよう。具体的な作業は、単純群の位数を割る素数の数を勘定することである。

補題 3

$X_n(q)$ を q 元体上の Lie 型の単純群とする。次が成立する。

(1) $|\pi(X_n(q))| > 1$.

(2) もし $|\pi(X_n(q))| = 2$ であるならば、$X_n(q) \simeq A_1(2),\ A_1(3),\ {}^2A_2(2), {}^2B_2(2)$ が成立する。

(3) もし $|\pi(X_n(q))| = 3$ を満たせば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} X_n(q) \simeq\ & A_1(q) \text{ for some q} \\ & A_2(2), A_2(3), {}^2A_2(3), \\ & {}^2A_2(4) \simeq B_2(3), B_2(2) \\ & {}^2G_2(3), G_2(2) \simeq {}^2A_2(3), {}^2A_3(2). \end{aligned}$$

さて $E(G) \neq 1$ と仮定する。すると補題 3 より $C_{E(G)}(\sigma)$ の非可解単純因子の候補は決定されるので次をえる。

事実 4

(1) もし $|\pi(G,\sigma)^c| = 2$ であったならば、, G は可解群であるか、 G の非可解単純因子 F は次に挙げる群と同型である：$F \simeq A_1(2^p),\ A_1(3^p),\ {}^2A_2(2^p)$ and ${}^2B_2(2^p)$

(2) もし $|\pi(G,\sigma)^c| = 3$ であるならば, G は可解群であるか G の非可解単純因子 F は、(1) に挙げた単純群と同型になるかまたは次に挙げる群と同型である：

$$\begin{aligned} F \simeq\ & A_1(q^p) \text{ with } |\pi(A_1(q)| = 3 \\ & A_2(2^p), A_2(3^p), {}^2A_2(3^p), \\ & {}^2A_2(4^p), B_2(3^p), B_2(2^p) \\ & {}^2G_2(3^p), G_2(2^p), {}^2A_2(3^p), {}^2A_3(2^p). \end{aligned}$$

3

ここでは、多少視点を変えて $|\pi(G,\sigma)^c| \geq 0$ の場合について考察してみることにする。まずはじめに、素数グラフについての基本的な定理を紹介しよう。

定理 0

G を偶数位数の有限群とする。$N(2)$ で $|G|$ を割る素数のうち G の素数グラフで 2 と直接辺で結ばれているものの全体をあらわすものとする。$\pi(G) - N(2) \neq \emptyset$ とする。このとき、次のうちひとつが成立する。

(1) G は可解群である.

(2)　G の正規部分群列

$$1 \subseteq M \subseteq N \subseteq G$$

があって、M は可解群、G/N は可解 $N(2)$-群、そして N/M は非可換単純群である. さらに、もし $M \cap (\pi(G) - N(2)) \neq \emptyset$ であるならば、G の Sylow 2-部分群は一般四元群である。

この定理 0 の意味するところは、素数グラフが連結でない場合の群の構造についての最も基本的な定理であるグルエンバーグ－ケーゲルの定理と同様なことが $\pi(G) - N(2) \neq \emptyset$ の条件の基で成立していることを意味している。証明は、最小位数の反例を G とし、G 極小正規部分群を L とおいて G/L について定理 0 が成立していることを用いれば、直ちに従う。この定理 0 から、例えば、次のようなことが容易にわかる。

定理 A

G の位数と σ の位数は互いに素であると仮定する。もし $2 \in \pi(G, \sigma)$ であるならば、G は可解群である。　即ち、もし $C_G(\sigma)$ が奇数位数であれば G は可解群である。

この定理 A については、定理 0 を用いず、$C_G(\sigma)$ を見て証明することもできる。この小論ではこちらのほうが流れとして適当だと思われるので簡単に説明する。

$C_G(\sigma)$ を可解群とする。最初に仮定したように G の位数と σ の位数は互いに素であることに注意する。G の $\langle\sigma\rangle$ - 普遍な正規部分群列

$$1 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_r = G$$

を考える。但し、G_{i+1}/G_i は $G\langle\sigma\rangle$-既約とする。この設定の下で、G_{i+1}/G_i はある単純群の直積になっていることに注意する。そこで、今、$G_{i+1}/G_i \;\; = A_1 \times \cdots \times A_k$ は非可換単純群の直積であるとする。もし、$[A_j, \langle\sigma\rangle] \not\subseteq A_j$ とすると、$\prod_{z \in \langle\sigma\rangle} A_j^{\,z} \simeq (A_j)^{o(\sigma)}$ が成立する。この対角成分からなる部分群 $V = \{\prod_{z \in \langle\sigma\rangle} u^z | u \in A_j\}$ は A_j と同形な $C_{G_{i+1}/G_i}(\sigma)$ の部分群であるので、$C_G(\sigma)$ が可解群であることに反する。よって、$[A_j, \langle\sigma\rangle] = A_j$ が成り立つ。$A_j \subseteq C_{G_{i+1}/G_i}(\sigma)$ ということは成立しないので、σ は A_j の自己同形であり $C_{A_j}(\sigma)$ は可解ということになる。よって事実 4 を用いて次を得ることができる。

定理 5A

もし $C_G(\sigma)$ が可解群であるならば、G は可解群であるかさもなければ G の非可解単純因子 F は次の群と同形である：

$$F \simeq A_1(2^p),\ A_1(3^p),\ {}^2A_2(2^p) \text{ または、} {}^2B_2(2^p).$$

この定理5Aの系として定理Aが出てくることは自明であろう。

Theorem 5B
もし $\pi(C_G(\sigma)) \cap \{3,5\} = \emptyset$ であるならば G は可解群である。

4

最後にこの手の問題の中で知られていないと思われるものを挙げておく。今まで $o(\sigma)$ が素数で $(o(\sigma), |G|) = 1$ であると仮定したが、ゴーレンシュタインの教科書には次の定理が紹介してある。

定理 (Grenstein をみよ)
もし $o(\sigma) = 4$ かつ $\pi(G,\sigma)^c = \emptyset$ であるならば、G は可解群である。

このような例のほか次の問題を考えることができる。

問題
G を有限群とせよ。$\sigma \in \mathrm{Aut}(G) - \mathrm{Inn}(G)$ を素数位数とせよ。もし $2 \in \pi(G,\sigma)$ であるならば, G は可解群であるか。

参考文献

[1] Abe, S. and Iiyori, N.,*A generalization of prime graphs of finite groups.* 北海道ジャーナル, **29** (2000), 391-407.

[2] Chigira, N. Iiyori, N. and Yamaki, H., *Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order.* Invent. Math., **139** (2000), 525-539.

[3] Conway, J. H. *et al*, *"Atlas of Finite Groups*, Oxford Univ. Press(Cleandon), London/New York 1985.

[4] Grenstein, D., *Finite groups.* Harper & Row, New York. 1968.

[5] Iiyori, N., *Prime graphs of finite groups and chains of normal subgroups.* preprint.

[6] Iiyori, N., *A generalization of prime graphs of finite groups. II.* preprint.

[7] Ito, N., "有限群論". 共立出版社, 1970.

[8] Iiyori, N. and Yamaki, H., *Prime graph components of the simple group of Lie type over the field of even characteristic* . J. Algebra **155** (1993), 335-343.

[9] Kondo, T.,"群論"（基礎数学講座）　岩波書店

[10] Kondrat'ev, A.S., *Prime graph components of finite simple groups.* Math. USSR Sbornik **67**(1990), 1611-1614.

[11] Williams, J. S., *Prime graph components of finite groups.* J. Algebra **69** (1981), 487-513

[12] Suzuki, M., *"Group Theory I, II"*. Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1982.