数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 93-102

2A-elements of the Babymonster and idempotents of central charge 7/10

Gerald Höhn

Department of Mathematics, Kansas State University

Ching Hung Lam

Department of Mathematics, National Cheng Kung University

山内 博*

東京大学大学院数理科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD
yamauchi@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yamauchi/

2007 年 12 月 20 日

1 はじめに

今回の講演ではベビーモンスター $\mathbb{B}$ の 2A 元に関する性質をベビーモンスター頂点作用素代数を調べることによって、モンスター $\mathbb{M}$ の 2A 元及びムーンシャイン頂点作用素代数の性質から帰納的に導く話をさせて頂きました。この研究の動機は $\mathbb{M}$ に現れる E_8 図形の研究 (cf. [Mc, LYY1, LYY2, LM, S]) の類似を $\mathbb{B}$ と E_7 の場合について求めることでした。当初は $\mathbb{M}$ と E_8 の場合の話を逐一 $\mathbb{B}$ と E_7 の場合に置き換えて、愚直に研究しようと考えていましたが、この研究の鍵となる $\mathbb{M}$ の 2A 元と $V^\natural$ のイジング元の間の宮本の自己同型による一対一対応のベビーモンスター版を示した際に、ベビーモンスターの 2A 元とモンスターの 2A 元の間には面白い帰納的構造があることが分かり、かなり誇張気味に言うとムーンシャイン頂点作用素代数の対称性としてのモンスターの理解が深まれば、芋づる式にベビーモンスターの性質も示せることが分かりました。これらの結果は表向きはほとんど具体例の計算から得られたものですが、その計算の裏には頂点作用素代数の深い理論が使われています。この研究は頂点作用素代数の理論を用いてモンスターに関連する散在型の単純群が理解できる、もしくはそうしたい、という目標を持って行われています。

---

*講演者

2 軸巾等元

$\mathbb{M}$ をモンスター単純群, $\mathfrak{B}$ を 196884 次元グライス代数 とします (cf. [G, C])。$\mathfrak{B}$ は単位元をもつ非結合的単純可換代数であり、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}) \simeq \mathbb{M}$ です (cf. [G, C, GMS, Ti])。$\mathbb{M}$-加群として $\mathfrak{B}$ は次のような既約分解を持ちます:

$$\mathfrak{B} = \underline{1} + \underline{196883}. \tag{2.1}$$

ここで $\underline{m}$ は m 次元の既約成分を表します。$t \in \mathbb{M}$ を 2A 元 [ATLAS] とすると、その中心化群はベビーモンスター単純群の二重被覆 $C_{\mathbb{M}}(t) = 2.\mathbb{B}$ であり、グライス代数 $\mathfrak{B}$ は $C_{\mathbb{M}}(t)$-加群として次のような既約分解を持ちます (cf. [C, MN]):

$$\mathfrak{B} = \underline{1} + \underline{1} + \underline{4371} + \underline{96255} + \underline{96256}. \tag{2.2}$$

この分解から不動点代数 $\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ は 2 次元部分代数をなしており、ある巾等元 $e_t \in \mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ が存在して $\mathfrak{B}$ の単位元 $1_{\mathfrak{B}}$ の直交巾等元分解 $1_{\mathfrak{B}} = e_t + (1 - e_t)$ に基づく単純分解 $\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)} = \mathbb{C}e_t \oplus \mathbb{C}(1_{\mathfrak{B}} - e_t) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ が得られます。[C, MN] において e_t の $\mathfrak{B}$ への作用が計算されており、次のようになります[1]:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathfrak{B} & = & \underline{1} & + & \underline{1} & + & \underline{4371} & + & \underline{96255} & + & \underline{96256} \\ \mathrm{ad}(2e_t) & : & 0 & & 2 & & 1/2 & & 0 & & 1/16 \\ t & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1 \end{array} \tag{2.3}$$

この表から、e_t の作用に関して $\mathfrak{B}$ を固有空間分解することによって、最初にとった 2A 元 $t \in \mathbb{M}$ が復元できることが分かります。即ち $\mathbb{M}$ の 2A 元と $\mathfrak{B}$ の巾等元の間には対応 $\mathbb{M} \ni t \mapsto e_t \in \mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ があり、これは単射になっています (cf. [C])。この事実から、e_t は t の定める**軸巾等元** (axial idempotent) と呼ばれます。

2.1 イジング元と宮本の自己同型

先ほどの軸巾等元の話を頂点作用素代数のレベルで再考察します。Frenkel et al. によって構成されたムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ [FLM] は $V^\natural = \oplus_{n\geq 0} V^\natural_n$ と次数分解を持っており、ウェイト 2 の部分空間 $V^\natural_2$ には $V^\natural$ の頂点作用素代数から誘導される可換代数構造が入ります。[FLM] において $\mathrm{Aut}(V^\natural) \simeq \mathbb{M}$ となることが示されていますが、その証明においてこの可換代数構造 $V^\natural_2$ が Conway によって再構成されたグライス代数 $\mathfrak{B}$ と同型になるという事実が鍵となっています。同型 $\mathfrak{B} \simeq V^\natural_2$ において e_t を 2A 元 $t \in \mathbb{M}$ の定める $\mathfrak{B}$ の軸巾等元に対応する $V^\natural_2$ の元とすると、e_t は $V^\natural$ において中心電荷 1/2 のヴィラソロ元になっており、e_t の生成する部分代数 $\mathrm{Vir}(e_t)$ は単純ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(1/2, 0)$ と同型になります[2]。軸巾等元を取る対応によって、$\mathbb{M}$ の 2A 元から $V^\natural$ の中心

[1] $\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ の原始巾等元は e_t と $1 - e_t$ の二つあり, $\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ の巾等元の選び方は一意的ではありませんが、これらは $\mathfrak{B}$ 上異なる固有値を持つため、(2.3) の固有値を持つ巾等元は一意に決まります。

[2] 正確には $2e_t$ がヴィラソロ元になりますが、用語の乱用で $x^2 = 2x$ となる $x \in V^\natural_2$ を巾等元と呼ぶことにすれば x 自身がヴィラソロ元となります。

電荷 1/2 のヴィラソロ元が定まりますが、この逆の対応も宮本の自己同型を考えることによって与えることができます。

V を一般の頂点作用素代数、e を V のヴィラソロ元とします。e の生成する部分代数 $\mathrm{Vir}(e)$ が $L(1/2,0)$ と同型になるとき、x を**イジング元** (Ising vector)[3]と呼ぶことにします。既約な $L(1/2,0)$-加群は $L(1/2,h)$, $h \in \{0,1/2,1/16\}$ の三つであり、全ての $L(1/2,0)$-加群は完全可約です (cf. [DMZ, W])。そのため V は $\mathrm{Vir}(e)$-加群として次のような等型成分分解を持ちます:

$$V = V_e(0) \oplus V_e(1/2) \oplus V_e(1/16) \tag{2.4}$$

ここで $V_e(h)$ は $L(1/2,h)$ と同型な $\mathrm{Vir}(e)$-部分加群の和を表します。等形成分分解 (2.4) に基づいて、V 上の線形変換 τ_e を

$$\tau_e := \begin{cases} 1 & \text{on } V_e(0) \oplus V_e(1/2) \\ -1 & \text{on } V_e(1/16) \end{cases} \tag{2.5}$$

と定めると、これは頂点作用素代数の自己同型を定めます (cf. [M1])。不動点部分代数 $V^{\langle \tau_e \rangle} = V_e(0) \oplus V_e(1/2)$ 上において線形変換 σ_e を

$$\sigma_e := \begin{cases} 1 & \text{on } V_e(0) \\ -1 & \text{on } V_e(1/2) \end{cases} \tag{2.6}$$

と定めると、これも $V^{\langle \tau_e \rangle}$ の自己同型を定めます (cf. [M1])。イジング元 $e \in V$ から定まる自己同型 $\tau_e \in \mathrm{Aut}(V)$, $\sigma_e \in \mathrm{Aut}(V^{\langle \tau_e \rangle})$ を合わせて**宮本の自己同型**と呼びます。

話をムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ に戻しましょう。$e \in V^\natural$ をイジング元とするとき、$\tau_e \in \mathrm{Aut}(V^\natural)$ は必ず $\mathbb{M}$ の 2A 元を定めることが知られています (cf. [Ma, M1])。宮本の自己同型を対応させることで、イジング元から 2A 元が復元でき、これは 2A 元から軸巾等元 = イジング元をとる操作の逆になっています。そのため、$\mathbb{M}$ の 2A 元と $V^\natural$ のイジング元の間には宮本の自己同型をとる操作によって一対一対応が成り立ちます。

定理 2.1. ([C, M1]) $V^\natural$ のイジング元と $\mathbb{M} = \mathrm{Aut}(V^\natural)$ の 2A 元の間には宮本の自己同型 $e \mapsto \tau_e$ により一対一対応が成り立つ。

この一対一対応より、群 $\mathbb{M} = \mathrm{Aut}(V^\natural)$ の性質を代数 $V^\natural$ 及びそのイジング元の性質から導くことができ、多くの応用が知られています。その一つとして最近佐久間氏によって示された 6-互換性の結果を紹介しましょう。

V を $\mathbb{R}$ 上で定義された頂点作用素代数であって、$V = \oplus_{n \geq 0} V_n$, $V_0 = \mathbb{R}\mathbf{1}$, $V_1 = 0$ なる次数分解を持つと仮定します。このとき V には不変内積が定数倍を除いて一意に定まり (cf. [Li])、V_2 には不変内積を持つ可換代数構造 (一般のグライス代数) が入ります。内積を $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 1$ と正規化したとき、この内積が V 上正定値であることも仮定します。このとき次の定理が成り立ちます。

---

[3]この名前の由来は二次元のイジング模型と呼ばれる可解格子模型の厳密解の計算においてフェルミオン演算子が自然に現れ、その極限として得られる共形場理論は $L(1/2,0)$ の対称性を持つため、$L(1/2,0)$ 自身もしばしばイジング模型と呼ばれるためです。

定理 2.2. ([S]) $e, f \in V$ をイジング元として、$|\tau_e \tau_f| \le 6$ が成り立つ。

この結果はモンスター単純群における E_8 図形の研究への応用など、ムーンシャイン頂点作用素代数の対称性の研究に役立ちます。

3 ルート系に付随するヴィラソロ元

R を ADE 型のルート格子、$\Phi(R)$ を R のルート系とします。$\sqrt{2}R$ を R の内積を 2 倍した格子とし、$V_{\sqrt{2}R}$ を $\sqrt{2}R$ に付随する格子頂点作用素代数 (cf. [FLM]) とします。[DLMN] において Dong et al. はルート系に付随した $V_{\sqrt{2}R}$ のヴィラソロ元を次のように構成しました。

$$\tilde{\omega}_R = \frac{2}{h+2}\omega + \frac{1}{h+2}\sum_{\alpha\in\Phi(R)} e^{\sqrt{2}\alpha} \in V_{\sqrt{2}R} \tag{3.1}$$

ここで ω は $V_{\sqrt{2}R}$ の共形元、h は R のコクセター数を表します。$V_{\sqrt{2}R}$ には自然に $\Phi(R)$ のワイル群 $W(R)$ が作用しますが、表示 (3.1) より $\tilde{\omega}_R$ は $W(R)$-不変なヴィラソロ元であり、その中心電荷は以下のようになります:

R	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
c.c. of $\tilde{\omega}_R$	$2n/(n+3)$	1	6/7	7/10	1/2

(3.2)

この表から特に $V_{\sqrt{2}E_8}$ には E_8 型ワイル群不変なイジング元が自然に含まれていることが分かります。$V_{\sqrt{2}E_8}$ に含まれているイジング元と $V^\natural$ に含まれているイジング元の間には深い関連があることが知られており、McKay による $\mathbb{M}$ における E_8 型ディンキン図形の考察 [Mc] に関して興味深い研究が行われています (cf. [LYY1, LYY2, LM])。

今回の話ではベビーモンスター単純群 $\mathbb{B}$ と E_7 型ディンキン図形に注目します。モンスターの場合と同様の類似が成り立つならば、$\sqrt{2}E_7$ に付随する格子頂点作用素代数 $V_{\sqrt{2}E_7}$ のヴィラソロ元が重要な役割を担うはずであり、その中心電荷の値は 7/10 です。$t \in \mathbb{M}$ を 2A 元として、t と可換な $\mathbb{M}$ の元のなす群は $C_{\mathbb{M}}(t) \simeq 2.\mathbb{B}$ であり、そのため 2A 元に対応する $V^\natural$ のイジング元と可換な $V^\natural$ の元のなす部分代数は自然に $\mathbb{B}$ の作用を持ちます。この部分代数の対称性には中心電荷 7/10 のヴィラソロ元が大きく関係しています。

4 ベビーモンスター VOA

$e \in V^\natural$ をイジング元として、$\mathrm{Vir}(e) \subset V^\natural$ の**交換団部分代数**を次で定義します。

$$\mathrm{Com}_{V^\natural}(e) := \ker_{V^\natural} e_{(0)}. \tag{4.1}$$

ここで $e_{(0)} \in \mathrm{End}(V^\natural)$ は e の頂点作用素 $Y(e,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_{(n)} z^{-n-1}$ の展開に出てくる係数です。頂点作用素代数の一般論から $\mathrm{Vir}(e)$ と $\mathrm{Com}_{V^\natural}(e)$ は互いに可換な $V^\natural$ の部分代

数になり、特に $\mathrm{Com}_{V^\natural}(e)$ 自体も頂点作用素代数の構造を持ちます[4]。より精密に、部分代数の同型 $V_e^\natural(0) \simeq \mathrm{Vir}(e) \otimes \mathrm{Com}_{V^\natural}(e)$ が成り立ちます。ここで $V_e^\natural(0)$ は宮本の自己同型 τ_e を定義する際に使う等型成分分解 (2.4) にでてくる部分空間です。定理 2.1 の一対一対応により、$V^\natural$ のイジング元は $\mathrm{Aut}(V)$ のもとで全て互いに共役であり、それゆえ交換団 $\mathrm{Com}_{V^\natural}(e)$ の構造はイジング元 $e \in V^\natural$ の取り方に依らず一意的に定まります。そこで

$$VB^\natural := \mathrm{Com}_{V^\natural}(e) \tag{4.2}$$

として**ベビーモンスター頂点作用素代数**[5]を定めます[6] (cf. [Hö1, Y])。$VB^\natural$ の名の由来はもちろん次の定理が成り立つからです。

定理 4.1. ([Hö2, Y]) $\mathrm{Aut}(VB^\natural) \simeq \mathbb{B}$.

$VB^\natural = \mathrm{Com}_{V^\natural}(e)$ は $V^\natural$ において e と可換な元を集めてきたものですが、この定理によりその全自己同型群は $C_{\mathbb{M}}(\tau_e)/\langle \tau_e \rangle$ と同型になるという、$V^\natural$ と $\mathbb{M}$ の間には強い帰納的構造 (inductive structure) が見てとれます。

4.1 $VB_2^\natural$ の軸巾等元

ベビーモンスター頂点作用素代数 $VB^\natural$ はイジング元 $e \in V^\natural$ を一つ固定するごとに $V^\natural$ への埋め込み $\mathrm{Vir}(e) \otimes VB^\natural \simeq V_e^\natural(0) \subset V^\natural$ が考えられます。そのため $VB^\natural$ は $VB^\natural = \oplus_{n\geq 0} VB_n^\natural$, $VB_0^\natural = \mathbb{C}\mathbf{1}$, $VB_1^\natural = 0$ という次数分解を持ち、その次数 2 の空間 $VB_2^\natural$ は $V^\natural$ のグライス代数 $V_2^\natural$ の部分代数を成します。分解 (2.3) より $\dim VB_2^\natural = 1 + 96255 = 96256$ であり、$\mathbb{B}$ は 96256 次元の単位元を持つ可換代数に作用します。この代数をベビーモンスターのグライス代数と呼ぶことにしましょう。$s \in \mathbb{B}$ をベビーモンスターの 2A 元とします。[ATLAS] より $C_{\mathbb{B}}(s) \simeq 2.{}^2E_6(2):2$ であり、$C_{\mathbb{B}}(s)$-加群として $VB_2^\natural$ は次の様に分解します:

$$VB_2^\natural = \underline{1} + \underline{1} + \underline{1938} + \underline{48620} + \underline{45969}. \tag{4.3}$$

この分解より不動点部分代数 $(VB_2^\natural)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ は 2 次元であり、モンスターのグライス代数の場合と同様に、あるヴィラソロ元 $f \in (VB_2^\natural)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ が存在して $(VB_2^\natural)^{C_{\mathbb{B}}(s)} = \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}(\omega - f) \simeq \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ となります。この f の中心電荷の値は前節で述べた E_7 型ルート系固有のヴィラソロ元の中心電荷 7/10 になっていて欲しいところですが、きちんと調べた結果、まさにその通りであることが示せました。

命題 4.2. $(VB_2^\natural)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ は中心電荷 7/10 及び 114/5 の互いに直交するヴィラソロ元で張られている。

---

[4] $\mathrm{Com}_{V^\natural}(e)$ の共形元は ω を $V^\natural$ の共形元として $\omega - e$ で与えられます。

[5] この頂点作用素代数を初めて定義した Höhn は $VB^\natural$ を the shorter moonshine module とも呼びます。

[6] 枠付き頂点作用素代数の理論 (cf. [DGH, LY, M2]) を用いれば $V^\natural$ を使わなくとも枠付き頂点作用素代数として $VB^\natural$ を定義・構成することができます。

上の命題及び分解 (4.3) より、$\mathbb{B}$ の各 2A 元 s は $(VB_2^\natural)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ の中心電荷 7/10 のヴィラソロ元を一意に定めることが分かります。即ち $\mathbb{B}$ の 2A 元から $VB^\natural$ の中心電荷 7/10 のヴィラソロ元への単射対応が得られた訳です。残念なことにモンスターの場合と異なり、この対応はそのままでは一対一にはなりません[7]。しかしながら、中心電荷 7/10 のヴィラソロ元が定める自己同型を調べて行くうちに面白い帰納的構造を見出すことができました。

4.2 三重臨界イジング元

さて、中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(1/2,0)$ を用いて宮本の自己同型を構成することができましたが、中心電荷 7/10 の場合はどうなんでしょうか。[M1] においては中心電荷が 1/2 の場合に限らず、極小離散系列もしくは BPZ 系列 (cf. [BPZ]) と呼ばれる系列の中心電荷の単純ヴィラソロ頂点作用素代数のフュージョン規則の対称性を用いて頂点作用素代数の自己同型を構成しており、中心電荷 1/2 及び 7/10 はその中でもユニタリー系列 (cf. [GKO]) と呼ばれる系列に属しています。中心電荷 7/10 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(7/10,0)$ を用いて構成される宮本の自己同型を考えましょう。一般の頂点作用素代数 V のヴィラソロ元 f であって、自身が生成するヴィラソロ頂点作用素部分代数 $\mathrm{Vir}(f)$ が単純、即ち $L(7/10,0)$ と同型になるものを**三重臨界イジング元** (tricritical Ising vector)[8] と呼ぶことにします。

頂点作用素代数 V に三重臨界イジング元 f がある場合、次のように宮本の自己同型を構成できます。$\mathrm{Vir}(f)\simeq L(7/10,0)$ の既約加群は $L(7/10,h)$, $h\in\{0,3/5,1/10,7/16,3/80,3/2\}$ で尽くされ、全ての $L(7/10,0)$-加群は完全加約です。それゆえ、V を $\mathrm{Vir}(f)$-加群として次のように等型成分分解することができます:

$$V=\bigoplus_{h\in\{0,\frac{3}{5},\frac{1}{10},\frac{7}{16},\frac{3}{80},\frac{3}{2}\}} V_f(h) \tag{4.4}$$

ここで $V_f(h)$ は $L(7/10,h)$ と同型な $\mathrm{Vir}(f)$-部分加群の和を表します。分解 (4.4) を用いて V 上の線形変換 τ_f を以下のように定義します:

$$\tau_f:=\begin{cases}1 & \text{on } V_f(0)\oplus V_f(3/2)\oplus V_f(3/5)\oplus V_f(1/10)\\ -1 & \text{on } V_f(7/16)\oplus V_f(3/80)\end{cases} \tag{4.5}$$

このとき $\tau_f\in\mathrm{Aut}(V)$ となります (cf. [M1])。不動点部分代数 $V^{\langle\tau_f\rangle}=V_f(0)\oplus V_f(3/2)\oplus V_f(3/5)\oplus V_f(1/10)$ 上線形変換 σ_f を以下のように定義します:

$$\sigma_f:=\begin{cases}1 & \text{on } V_f(0)\oplus V_f(3/5)\\ -1 & \text{on } V_f(3/2)\oplus V_f(1/10)\end{cases} \tag{4.6}$$

[7] 当初一対一と期待してなんとか証明しようと思いましたが、Lam 氏が簡単に反例を示してくれました。
[8] この名前の由来もイジング元の場合と同様で、$L(7/10,0)$ に付随する共形場理論が三重臨界イジング模型と呼ばれるためです。

このとき $\sigma_f \in \mathrm{Aut}(V^{\langle\tau_f\rangle})$ となります (cf. [M1])。三重臨界イジング元 f に付随して定まる自己同型 $\tau_f \in \mathrm{Aut}(V)$ 及び $\sigma_f \in \mathrm{Aut}(V^{\langle\tau_f\rangle})$ をイジング元の場合と同様に宮本の自己同型と呼びます。三重臨界イジング元 f に付随する V 上の自己同型が $\tau_f = 1$ となるとき、V において **σ-型**であるといいます。

$s \in \mathbb{B}$ を 2A 元として、$(V\!B^\natural_2)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ を考えます。$(V\!B^\natural_2)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ は 2 次元であり、二つの互いに直交するヴィラソロ元 f 及び $\omega - f$ で張られていました。命題 4.2 において f の中心電荷は 7/10 と述べましたが、その証明を簡単に振り返ってみます。まず $V^\natural$ のイジング元 e を一つ取り、埋め込み $\mathrm{Vir}(e) \otimes V\!B^\natural \simeq V^\natural_e(0) \subset V^\natural$ を固定します。$\mathbb{M} \simeq \mathrm{Aut}(V^\natural)$ 及び $C_{\mathbb{M}}(\tau_e) \simeq \langle\tau_e\rangle \cdot \mathbb{B}$ に注意すると、全射準同型 $\pi : C_{\mathbb{M}}(\tau_e) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(V\!B^\natural) \simeq \mathbb{B}$ が自然に定まります。このとき $\langle s\rangle \subset \mathbb{B}$ の逆像 $\pi^{-1}(\langle s\rangle)$ は $\ker\pi = \langle\tau_e\rangle$ より位数 4 になりますが、頂点作用素代数の理論から 2A-pure になることが示せます[9]。よって、定理 2.1 より、あるイジング元 $e' \in V^\natural$ が存在して、$[\tau_e, \tau_{e'}] = 1$, $\pi(\tau_{e'}) = \tau_{e'}|_{V\!B^\natural} = s$ となることが分かります。このような二つのイジング元 e 及び e' で生成される頂点作用素部分代数の構造は良く分かっており (cf. [M1])、不動点部分代数 $(V\!B^\natural_2)^{C_{\mathbb{B}}(s)}$ のヴィラソロ元は e 及び e' を用いて書き表すことができて、それは三重臨界イジング元であることが証明できるのです。より詳しく、この三重臨界イジング元を f とすると、f は $V\!B^\natural$ 上 σ-型であり、$s \in \mathbb{B} = \mathrm{Aut}(V\!B^\natural)$ は f に付随する σ-型の宮本の自己同型と等しいことも分かります。その結果、定理 2.1 の応用の一つとして次の一対一対応を得ることができます。

定理 4.3. $V\!B^\natural$ の σ-型三重臨界イジング元と $\mathrm{Aut}(V\!B^\natural) \simeq \mathbb{B}$ の 2A 元の間には σ-型の宮本の自己同型 $f \mapsto \sigma_f$ により一対一対応がつく。

この議論において特に注目したいのは、任意の 2A 元 $s \in \mathbb{B} \simeq C_{\mathbb{M}}(\tau_e)/\langle\tau_e\rangle$ に対して、あるイジング元 $e' \in V^\natural$ が存在して、$\tau_{e'} \in C_{\mathbb{M}}(\tau_e)$ かつ $\tau_{e'}|_{V\!B^\natural} = s$ となる事実です。これは $\mathbb{B}$ の 2A 元の情報は $\mathbb{M}$ の 2A 元の性質から決まってしまうことを意味し、特に $\mathbb{B}$ の 2A 元は大きく見積もっても 6-互換性を持つことが分かります。$V^\natural$ の二つのイジング元で生成される部分代数には大きな制約・関係式が入っており (cf. [LYY2])、詳細に調べることで次の $\mathbb{B}$ の $\{3,4\}$-互換性を定理 2.2 の帰納的帰結として得ることができます。

定理 4.4. 二つの 2A 元 $s, s' \in \mathbb{B}$ について、$|ss'| \le 4$ が成り立つ。

この事実はもちろん散在型単純群の理論によって知られていた訳ですが、頂点作用素代数の理論からも導出・再解釈することができるのです[10]。さらに (3.2) にある対応を用いて、$\mathbb{B} = \mathrm{Aut}(V\!B^\natural)$ と $V_{\sqrt{2}E_7}$ の構造の間の関連性についても現在研究が進行中であり、紙面の都合上詳細は述べられませんが、ベビーモンスター頂点作用素代数 $V\!B^\natural$ を経由することで McKay による $\mathbb{B}$ の E_7 型ディンキン図形 [Mc] の由来もうまく説明することができます (cf. [HLY])。

---

[9] これは $N_{\mathbb{M}}(2\mathrm{A}^2) \simeq 2^2 \cdot {}^2E_6(2) : S_3$ という群構造 (cf. [ATLAS]) からも分かりますが、散在型単純群の理論を使わなくとも示せます。

[10] もちろん、(4.3) の分解を得る際に [ATLAS] を使っていますので、完全に散在型単純群の理論を使わない訳には行きません。しかしながら、この原稿執筆時にはまだできていませんが、現在の研究によって分解 (4.3) 自体も頂点作用素代数の理論から導出できるのではないかという手ごたえを感じています。

5 Fi_{24} と E_6

今回の話は $\mathbb{M}$ 及び $\mathbb{B}$ の間の帰納的構造を $V^\natural$ 及び $VB^\natural$ の間の帰納的構造から導くというもので、大雑把に言ってムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ の対称性としてのモンスター $\mathbb{M} = \mathrm{Aut}(V^\natural)$ が良く分かれば、頂点作用素代数の理論によってベビーモンスター頂点作用素代数 $VB^\natural$ の対称性としてベビーモンスター $\mathbb{B}$ の性質も良く分かるというものでした。そしてこのように話がうまく行く最大の理由は $\mathbb{M}$ の 2A 元と $V^\natural$ のイジング元の間の宮本の自己同型による一対一対応があるからです。この一対一対応があるからこそ $\mathbb{M}$ に現れる E_8 型ディンキン図形 [Mc] の数学的意義の解明の研究 [LYY1, LYY2, LM] が行われた訳ですが、その自然な類似の研究として $\mathbb{B}$ に現れる E_7 型ディンキン図形の由来を中心電荷 7/10 のヴィラソロ頂点作用素代数に求めようというのがこの研究の本来の動機でした。当初、この研究は E_8 の場合の研究をほぼ真似することで全てうまく行くと思われていましたが、思わぬ帰納的構造の発見によって、わざわざ E_7 の場合に個別の細かい議論をしなくても、E_8 の場合に分かっていることを用いることで E_7 の場合もうまく説明ができる形となりました。そうなると次に考えるべき問題は Fi_{24} と E_6 の場合です[11]。これも当初は個別に考えるべき問題と思っていましたが、定理 2.1 から定理 4.3 を導く間の議論をよく見てみると、$N_{\mathbb{M}}(3\mathrm{A}) = 3.\mathrm{Fi}_{24}$ という関係に基づいて同じ帰納的構造を探ることによって Fi_{24} と E_6 の間の関係についても帰納的に解決できるうることが分かってきました。ただし話は全く同様という訳には行かず、ベビーモンスター頂点作用素代数の場合にはうまく行くことがフィッシャー群に対応する頂点作用素代数の場合にはもう少し議論が必要になります。将来の課題として、この問題点を解説して本稿を締めくくりたいと思います。

$u \in \mathbb{M}$ を 3A 元とします。すると [ATLAS] より $N_{\mathbb{M}}(u) = 3.\mathrm{Fi}_{24}$ となるわけですが、[C, MN] ににおいてモンスターのグライス代数 $\mathfrak{B}$ の $C_{\mathbb{M}}(u)$-加群としての次のような分解が得られています:

$$\mathfrak{B} = \underline{1} + \underline{1} + \underline{8671} + \underline{57477} + \underline{1566} + \underline{129168} \tag{5.1}$$

このことから $\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(u)}$ は 2 次元であり、$\mathbb{M}$ の 3A 元に対しても軸巾等元が定まることが分かります。ムーンシャイン頂点作用素代数においてこの軸巾等元は $V^\natural$ における $L(4/5,0) \oplus L(4/5,3)$ と同型な部分代数の共形元に対応していることが分かっており (cf. [KMY, M3, SY])、それゆえ交換団部分代数

$$V_{\mathrm{Fi}_{24}} := \mathrm{Com}_{V^\natural}(L(4/5,0) \oplus L(4/5,3)) \subset V^\natural \tag{5.2}$$

には $N_{\mathbb{M}}(u)/\langle u\rangle \simeq \mathrm{Fi}_{24}$ が自然に作用します。ここまではベビーモンスター頂点作用素代数 $VB^\natural$ と同様の話になるわけですが、$VB^\natural$ は交換団部分代数である一方で枠付き頂点作用素部分代数でもあり、その構造は比較的容易に調べることができます。一方 $V_{\mathrm{Fi}_{24}}$ は交換団部分代数であるということ以外分かっておらず、その全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V_{\mathrm{Fi}_{24}})$ が Fi_{24}

[11]ここで Fi_{24} は単純でない 3-互換群としてのフィッシャー群を表しており、$\mathrm{Fi}'_{24} = [\mathrm{Fi}_{24}, \mathrm{Fi}_{24}]$ が散在型単純群となります。

と本当に一致するかが大きな問題となっています。もし一致していれば、あとは今回の話と殆ど同様の帰納的議論によって Fi_{24} と E_6 の話がうまく説明づけられますが、残念ながら現在までにうまく全自己同型群を計算する方法は見つかっていません。

参考文献

[ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, ATLAS of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[BPZ] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetries in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.* **B 241** (1984), 333–380.

[C] J.H. Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group, *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[DGH] C. Dong, R.L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DLMN] C. Dong, H. Li, G. Mason and S.P. Norton, Associative subalgebras of Griess algebra and related topics, Proc. of the Conference on the Monster and Lie algebra at the Ohio State University, May 1996, ed. by J. Ferrar and K. Harada, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1998.

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc. **56** II (1994), 295–316.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, New York, 1988.

[FZ] I.B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representation of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[GKO] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.* **103** (1986), 105–119.

[G] R.L. Griess, The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.

[GMS] R.L. Griess, U. Meierfrankenfeld and Y. Segev, A uniqueness proof of the Monster, *Ann. of Math.* **130** (1989), 567–602.

[Hö1] G. Höhn, Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster, Ph.D. thesis, Bonn 1995.

[Hö2] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module, `math.QA/0210076`.

[HLY] G. Höhn, C.H. Lam and H. Yamauchi, The moonshine vertex operator algebra and an inductive structure associated to the Babymonster, preprint.

[KMY] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223** (2000), 379–395.

[LM] C.H. Lam and M. Miyamoto, Niemeier lattices, Coxeter elements, and McKay's E_8-observation on the Monster simple group, *Internat. Math. Res. Notices* Article ID 35967 (2006), 1–27.

[LYY1] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, Vertex operator algebras, extended E_8-diagram, and McKay's observation on the Monster simple group, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[LYY2] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge 1/2, *Internat. Math. Res. Papers* **3** (2005), 117–181.

[LY] C.H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, preprint, `math.QA/0605176`.

[Li] H. Li, Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **96** (1994), 279–297.

[Ma] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Commun. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mc] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, pp. 183–186.

[MN] W. Meyer and W. Neutsch, Associative subalgebras of the Griess algebra, *J. Algebra* **158** (1993), 1–17.

[M1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[M2] M. Miyamoto, A Hamming code vertex operator algebra and construction of vertex operator algebras, *J. Algebra* **215** (1999), 509–530.

[M3] M. Miyamoto, 3-state Potts model and automorphisms of vertex operator algebras of order 3, *J. Algebra* **239** (2001), 56-76.

[S] S. Sakuma, 6-transposition property of τ-involutions of vertex operator algebras, preprint, `math.QA/0608709`.

[SY] S. Sakuma and H. Yamauchi, Vertex operator algebra with two Miyamoto involutions generating S_3, *J. Algebra* **267** (2003), 272–297.

[Ti] J. Tits, On R. Griess' "Friendly Giant," *Invent. Math.* **78** (1984), 491–499.

[W] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *Internat. Math. Res. Notices* **71** (1993), 197–211.

[Y] H. Yamauchi, 2A-orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra, *J. Algebra* **284** (2005), 645–668.