数理解析研究所講究録
第1564巻 2007年 123-130

アーベル群を点正則な自己同型群としてもつ3-デザインについて

名古屋大学大学院情報科学研究科　澤　正憲（Masanori Sawa）
Graduate School of Information Science,
Nagoya University

1　導入

v,k,λ,t を $v\geq k\geq t>0$ を満たす自然数とする．V を濃度 v の有限集合とし，V の k-元部分集合全体からなる集合を $\binom{V}{k}$ と表記する．V とその k-元部分集合族 $\mathcal{B}$（ブロック集合）の順序対 $(V,\mathcal{B})$ が t-(v,k,λ) デザインをなすとは，次の条件を満たすことをいう:

$$|\{B\in\mathcal{B}\mid T\subseteq B\}|=\lambda,\forall T\in\binom{V}{t}.$$

特に $\lambda=1$ を満たす t-デザインはシュタイナーシステムと呼ばれる．また $k=4,t=3$ のデザインは四重システム（Quadruple System）と呼ばれ，本稿では $\mathrm{QS}(v,\lambda)$ と表記する．$\mathrm{QS}(v,1)$ は $\mathrm{SQS}(v)$ と表記されるのが一般的である．

有限群 G に対して t-デザインが G を自己同型群にもつとは，G が V 上の作用を引き起こし，かつ $\mathcal{B}$ を保存することをいう．$\binom{V}{k}$ の G-軌道分解を $\binom{V}{k}/G$ と表記する．有限群を利用した古典的な t-デザインの構成法では $\binom{V}{k}/G$ の適当な部分集合を選び $\mathcal{B}$ とみなす．単純デザインの構成においては異なる G-軌道を選ぶこととなる．ここで，$\mathcal{B}\subseteq\binom{V}{k}$ の時そのデザインは単純であるという．特にシュタイナーシステムに対して，この方法をもう少し詳しく説明しよう．まず，V を濃度 v の有限集合とし，結合構造 $\mathcal{I}=(\binom{V}{t},\binom{V}{k})$ を考える．行及び列を各々 $\binom{V}{t},\binom{V}{k}$ の元で番号付けられた $\mathcal{I}$ の結合行列を考えてもよい．明らかにシュタイナーシステムの存在は $\mathcal{I}$ における分解集合 (Spread) の存在に等しい．これはシュタイナーシステムの定義の単なる言い換えに過ぎないが，V 上への有限群の作用を仮定し $\mathcal{I}$ の商構造を考えれば，シュタイナーシステムの構成問題は t 重組達の適当な軌道に注目する問題として扱い易くなる．$\mathcal{I}$ の結合行列よりもサイズの小さな行列を扱うことになるということである．さて，$\mathcal{I}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ を結合構造とし，G を $\mathcal{I}$ の自己同型群とする．$\mathcal{P}/G,\mathcal{B}/G$ として各々 $\mathcal{P},\mathcal{B}$ の G-軌道全体からなる集合をとり，$\mathcal{I}$ の G による商構造 $\mathcal{I}/G=(\mathcal{P}/G,\mathcal{B}/G)$ を考える．$\mathrm{Orb}_G(\alpha)\in\mathcal{P}/G,\mathrm{Orb}_G(B)\in\mathcal{B}/G$ に対して $\mathrm{Orb}_G(\alpha)$ と $\mathrm{Orb}_G(B)$ の間の結合関係を，ある $B'\in\mathrm{Orb}_G(B)$ に対して

α と B' が結合関係にあることとして定義する. $\mathcal{I}$ における分解集合 (Spread) とは, $\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ で全ての $\alpha \in \mathcal{P}$ が $\mathcal{S}$ のちょうど 1 つの元と結合するようなものをいう. また $\mathcal{I}$ における部分分解集合 (Partial Spread) とは, $\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ で全ての $\alpha \in \mathcal{P}$ が $\mathcal{S}$ の高々 1 つの元と結合するようなものをいう. この時, 次のことが分かる.

補題 1.1. $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ を結合構造とし, G を $\mathcal{I}$ の自己同型群とする. $\mathcal{D}$ が G-不変分解集合をもつならば, $\mathcal{D}/G$ も G-不変分解集合をもつ. $\mathcal{D}$ の任意の結合対 (α, B) に対して B が α と結合する $\mathrm{Orb}_G(B)$ の唯一つの元であれば, 逆も正しい.

次の定理は G-不変分解集合の存在性に関する 1 つの結果である.

定理 1.2. *[18].* $B \in \binom{G}{k}$ とする. G を V 上強 t 重可移群, G_B を B の安定化部分群とする. この時 $|G_B| = k!/(k-t)!$ ならば, B の G-軌道はシュタイナーシステム t-$(v, k, 1)$ をなす.

$t \geq 6$ で非自明な t-重可移群が存在しないことはよく知られているので, 上の定理は $t \geq 6$ では適用されない. その為可移性の低い置換群を用いたデザインの一般的な構成法が必要となる. $t = 2$ の時, そのような構成法は定差集合族 (Difference family) として広く研究されている. 例えば Wilson による結果は有名である [17]. これに対して $t \geq 3$ の時, 存在性の問題に大きく貢献するような構成法はほとんど知られていない. 本稿では対称 k-ブロックと呼ばれる概念を導入し, 点正則な自己同型群をもつ t-デザインの構成法を提示する. 実際に $\lambda = 1, 2, 3$ に対するアーベル群を点正則な自己同型としてもつ単純 $\mathrm{QS}(v, \lambda)$ (A-不変な QS と呼ぶ) の構成法に応用されることを示す.

2 点正則なアーベル群

A を位数 $v \equiv 2 \pmod 4$ のアーベル群とする. h を A の位数 2 の元とする. A をそれ自身正則な置換群とみなし, $a^\sigma = -a$ により定められる A 上の置換 σ に対して $\langle \sigma \rangle$ と A との半直積群を $\hat{A} = A \rtimes \langle \sigma \rangle$ とおく. $B \in \binom{A}{4}$ が対称ブロックであるとは, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) = \mathrm{Orb}_A(B)$ を満たすことをいう. 容易に分かることだが, 対称 4-ブロック全体がなす集合は互いに素な集合

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b, a+b\}) \mid a, b \in A \setminus \{0\}, a \neq \pm b\},\\ \mathcal{B}_1 &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, h, a, -a\}) \mid a \in A \setminus \{0, h\}\}\end{aligned}$$

に分割される. この事実を利用して次を示した.

定理 2.1. *[11].* $(A, \{B \in \binom{A}{4} \mid \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1\})$ は A-不変な単純 $QS(v,3)$ をなす.

このデザインは自然に $A \times \mathrm{Aut}(A)$ を自己同型群にもつことが分かる.

Köhler は巡回的な t-デザインの構成法に関する多くの萌芽的研究を行った [8, 9, 10]. とりわけ [8, 10] で提示されたアイデアは我々にとって興味深い. [8] では, 自然数 $v \equiv 2 \pmod 4$ に対して, 位数 v の巡回群を点正則な自己同型群としてもつ単純 $\mathrm{QS}(v,3)$ の存在が示されている [8]. そこでは, ブロック集合として D_v-不変な $\binom{\mathbb{Z}_v}{4}$ の軌道全体がとられている. 従って $A \simeq \mathbb{Z}_v$ の時, 定理 2.1 で構成されたデザインは Köhler のデザインと同値であることが分かる.

次に定理 2.1 で得られたデザインの商構造 $(\binom{A}{3}/\hat{A}, \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1)$ を考える. その為に必要な幾つかの補題を紹介する. 証明は [12] を参照されたい.

補題 2.2. $\binom{A}{3}/\hat{A}$ は互いに素な集合 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ に分割される:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0,a,-a\}) \mid a \in A,\ 2a \neq 0\},\\
\mathcal{T}_2 &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0,a,h\}) \mid a \in A,\ a \neq 0, h\},\\
\mathcal{T}_3 &= \left(\binom{A}{3}/\hat{A}\right) \setminus (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)\\
&= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0,a,b\}) \mid a \neq \pm b,\ 2a \notin \{0,b,2b\},\ 2b \notin \{0,a,2a\}\}.
\end{aligned}$$

補題 2.3. 自然数 $v \equiv 2 \pmod 4$ に対して次の集合を定める:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0'' &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0,a,h,a+h\}) \mid a \in A,\ 2a \neq 0\},\\
\mathcal{B}_0''' &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0,a,h,-a+h\}) \mid a \in A,\ 2a \neq 0\},\\
\mathcal{B}_0'''' &= \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0,a,2a,3a\}) \mid a \in A,\ 2a \neq 0,\ 3a \neq 0\},\\
\mathcal{B}_0' &= \mathcal{B}_0 \setminus (\mathcal{B}_0'' \cup \mathcal{B}_0''' \cup \mathcal{B}_0'''').
\end{aligned}$$

この時, $B = \{0,a,b,a+b\} \in \binom{A}{4}$ に対して,

$$\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0'' \iff 2a = 0 \text{ or } 2b = 0, \tag{1}$$
$$\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0''' \iff 2a = \pm 2b, \tag{2}$$
$$\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0'''' \iff a = \pm 2b \text{ or } b = \pm 2a, \tag{3}$$
$$\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0' \iff 0 \notin \{2a, 2b\} \text{ and } \{a, 2a\} \cap \{\pm b, \pm 2b\} = \emptyset. \tag{4}$$

特に $v \neq 0 \pmod 3$ ならば, $\mathcal{B}_0', \mathcal{B}_0'', \mathcal{B}_0''', \mathcal{B}_0''''$ は互いに素であり $\mathcal{B}$ を分割する.

補題 2.4. $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ とする. $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0' \cup \mathcal{B}_0'' \cup \mathcal{B}_0''' \cup \mathcal{B}_1, T \in \binom{A}{3}, T \subset B$ とする. この時, B は T を含む $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B)$ の唯1つの元であり, 次の主張が成り立つ:

(i) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \in \mathcal{T}_1$ ならば, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_1$.

(ii) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \in \mathcal{T}_2$ ならば, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0'' \cup \mathcal{B}_0''' \cup \mathcal{B}_1$,

(iii) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \in \mathcal{T}_3$ ならば, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0' \cup \mathcal{B}_0'''$.

さて,

$$\{0, a, 2a\} \subset \{0, a, 2a, 3a\} \cap (\{0, a, 2a, 3a\} - a)$$

に注意すると, $\mathcal{B}_0''''$ に属する軌道は A-不変な SQS のブロックとしては使えない. 以下 $\mathcal{B}_0''''$ を除外した部分構造

$$\mathcal{D} = (\binom{A}{3}, \{B \in \binom{A}{4} \mid \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_0' \cup \mathcal{B}_0'' \cup \mathcal{B}_0''' \cup \mathcal{B}_1\}), \tag{5}$$

とその商構造 $\mathcal{D}/\hat{A}$ のみ扱うことにする.

補題 2.5. 自然数 $v \equiv 2 \pmod{4}$ をとる. *(i)* $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ の時, $\mathcal{B}_1$ は $\mathcal{D}/\hat{A}$ の $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ を被覆する部分分解集合である. *(ii)* $\mathcal{D}/\hat{A}$ の分解集合 $\mathcal{S}$ が存在するならば, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{S}$ かつ $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ である.

証明. (i) $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ の全ての元 $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T)$ が, $\mathcal{B}_1$ の少なくとも1つの元と結合していることは定義より明らかである. 補題 2.4 より, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T)$ は高々1つの $\mathcal{B}_1$ の元であり, 従ってちょうど1つの $\mathcal{B}_1$ の元である. (ii) $B \in \binom{A}{4}$ を $\{0, a, -a\} \subset B, a \neq 0, h$ となるようにとる. $\{0, a, -a\} \subset B^\sigma$ より, $B \setminus \{0, a, -a\} = \{b\}$ とおくと, $b = h$. ゆえに, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{B}_1$. 位数3の元 a に対して, $G_{\{0,a,-a\}} \simeq D_3$ となる. 一般に $G_B \simeq \mathbb{Z}_2$ なので, $\mathcal{S}$ が分解集合であることに反する. □

補題 1.1 と補題 2.4 の前半より, $\mathcal{D}/\hat{A}$ 内の分解集合の存在は $\mathcal{D}$ 内に分解集合の存在を意味する. $\mathcal{B}_0'', \mathcal{B}_0'''$ は $\mathcal{T}_2$ の元を含んでいるので, $\hat{A}$-不変な SQS のブロックとなり得ない. 従って, 部分構造 $\mathcal{K} = (\mathcal{T}_3, \mathcal{B}_0')$ のみ考えればよいことになる. この構造はいわゆる通常の意味でのグラフである, すなわち, 全てのブロックはちょうど2点と結合する. このグラフをケーラーグラフと呼ぶことにしよう. 厳密な定義とその性質の考察は次節で行う.

3 ケーラーグラフ

A を位数 $v \not\equiv 0 \pmod 4$ のアーベル群とする. A のケーラーグラフとは次で定義される結合構造 $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{E})$ をいう, すなわち,

$$\mathcal{T} = \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b\}) \mid a \neq \pm b,\ 2a \notin \{0, b, 2b\},\ 2b \notin \{0, a, 2a\}\},$$
$$\mathcal{E} = \{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b, a+b\}) \mid a, b \in A,\ a \neq \pm b,\ 2a \notin \{0, \pm b, \pm 2b\},\ 2b \notin \{0, \pm a, \pm 2a\}\},$$

とおき, ある $B' \in \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B)$ に対して $T \subset B'$ である時に, $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \in \mathcal{T}$ と $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{E}$ の間の結合関係を定める. ケーラーグラフの構造を調べる為に幾つかの補題を紹介する. 詳しい証明は [12] を参照されたい.

補題 3.1. *[12].* A を位数 $v \not\equiv 0 \pmod 4$ のアーベル群とする. A の異なる元 a, b に対して,

(i) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a-b\})$.

(ii) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a-b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a+b\}) \Leftrightarrow 2a = 0$ *or* $2b = 0$;

(iii) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a-b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b-a\}) \Leftrightarrow 2a = 0$ *or* $2(a-b) = 0$;

(iv) $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a+b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b-a\}) \Leftrightarrow 2a = 0$, *or* $a = 2b$, *or* $b = 3a$ *and* $5a = 0$, *or* $b = 2a$ *and* $3a = 0$.

補題 3.2. *[12].* $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{E}$ とする. この時,

$$|\{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \in \mathcal{T} \mid \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \textit{ is incident with } \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B)\}| = 2.$$

証明. 左辺は

$$k(B) := |\{\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \mid T \in \binom{B}{3},\ \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(T) \in \mathcal{T}\}|$$

に等しい. $B = \{0, a, b, a+b\}$ とする.

$$\{0, a, b\} = -\{a, b, a+b\} + (a+b), \{0, a, a+b\} = -\{0, b, a+b\} + (a+b)$$

より

$$\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{a, b, a+b\}), \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a+b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, b, a+b\}).$$

従って, $k(B) \leq 2$. $k(B) = 1$ と, $\{0, a, b\} \in \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a+b\})$ は同値である. 補題 3.1(i) より $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b\}) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, a-b\})$ である. ゆえに補題 3.1(ii) より, $k(B) = 1$ と, $2a = 0$ 或いは $2b = 0$ であることが同値である. $\mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B) \in \mathcal{E}$ なので, これは起こらない. □

定理 3.3. *[12].* A を位数が $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ のアーベル群とする. A のケーラーグラフが一因子をもつならば, A-不変な $SQS(v)$ が存在する.

証明. ケーラーグラフの一因子は $\mathcal{D}/\hat{A}$ 内の $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3$ を被覆するような部分分解集合を与える. 補題 2.5 より, $\mathcal{D}/\hat{A}$ は $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ を被覆する部分分解集合 $\mathcal{B}_1$ を含む. 従って補題 1.1 より, $\mathcal{D}$ の分解集合を得る. □

ケーラーグラフの連結成分の構造を決定する 1 つの結果を紹介しよう.

定理 3.4. *[12].* A を位数 $v \equiv 2, 10 \pmod{12}$ のアーベル群とする. $X = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(\{0, a, b\}) \in \mathcal{T}$ とする. この時, $\langle a, b \rangle$ が巡回的でなければ, X を含む $\mathcal{G}$ の連結成分は 3-正則グラフであり, 一因子をもつ.

この結果から, SQS の存在性の問題は, A の巡回部分群により誘導される連結成分が一因子をもつかどうかという問題に帰着される. $A \simeq \mathbb{Z}_v$ の時, ケーラーグラフは位数 v のケーラー第一グラフと呼ばれる [10]. このグラフにおける一因子の存在性については多くの研究がなされている. 例えば [10, 13, 14] を参照されたい. [7] で Köhler は一般のアーベル群に対して我々とは異なる t-デザインの構成法を提示したが, 未知のデザインは発見されなかった. これに対して我々の手法を用いると, 例えば位数 $2 \cdot 5^n$ のケーラーグラフが一因子をもつという事実 ([15]) から, 位数 $2 \cdot 5^n$ の任意のアーベル群 A に対する A-不変な $\mathrm{SQS}(2 \cdot 5^n)$ の存在を導くことができる. これ以外にも, それまで存在が知られていなかった多くの SQS が構成される [12]. また, 定理 3.3 より得られた A-不変な $\mathrm{SQS}(v)$ は対称 4-ブロックのみからなるので, [11] の結果とあわせて, A-不変な単純 $\mathrm{QS}(v, 2)$ が得られる. さらに, 定理 3.3 を用いれば, $\hat{A}$ の作用に関する固定点 ∞ に対して, $V = A \cup \{\infty\}$ 上の SQS も構成可能である. 他の非可換群を自己同型群にもつような $\mathrm{QS}(v, \lambda)$ の存在性については [1, 2, 4, 3, 5, 8, 14, 16, 18] 等を参照されたい.

最後に今後の課題を述べる. Kleemann は $V = \mathbb{Z}_v$ に対する対称 4-ブロックのみを用いて, $v \equiv 0 \pmod{4}$ なる自然数 v に対する巡回的な $\mathrm{QS}(v, 3)$ の存在性を証明した [6]. そこでは, $\{0, v/4, v/2, 3v/4\}$ の $\mathbb{Z}_v$-軌道のみちょうど 3 回出現するように構成されているので, 得られるデザインは単純ではない. 一般の $v \equiv 0 \pmod{4}$ に対して A-不変な単純 $\mathrm{QS}(v, 3)$ の存在性の問題は未解決である. また, $k \geq 5$ に対して対称 k-ブロックを用いて 3-デザインの無限系列の構成が可能かどうかについても知られていない. 対称 k-ブロックを

用いたt-デザインへのアプローチの妥当性を判断する1つの基準として, この問題の解決は重要である. 幾つかの単純デザインの例の構成には成功している.

References

[1] T. Beth and D. Jungnickel, Einige einfache fahnenhomogene 3-Blöckpläne, *Math. Z.* **183** (1983), 443-445.

[2] C. J. Cho, Combinatorial designs with prescribed automorphism groups, Diss. Univ. McMaster, 1983, pp.155–198.

[3] H. Hanani, On quadruple systems, *Canad. J. Math.* **12** (1960), 145–157.

[4] D. R. Hughes, On t-designs and groups, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 761–778.

[5] S. Iwasaki, T. Meixner, A remark on the action of $\mathrm{PGL}(2,q)$ and $\mathrm{PSL}(2,q)$ on the projective line, *Hokkaido Math. J.* **26** (1997), no. 1, 203–209.

[6] M. Kleemann, k-Differenzenkreise und 2-fach ausgewogene Pläne, Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1980.

[7] E. Köhler, Abelsche t-Designs, *Methods oper. Res.* **36** (1980), 203-216.

[8] E. Köhler, k-difference cycles and the construction of cyclic t-designs, in "Geometries and groups," Lecture Notes in Mathematics Vol. **893**, pp. 195–203, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1981.

[9] E. Köhler, Quadruple systems over $\mathbb{Z}_p$ admitting the Affine group, in "Combinatorial Theory," Lecture Notes in Mathematics Vol. **969**, pp. 212–228, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1982.

[10] E. Köhler, Zyklische Quadrupelsysteme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **48** (1979), 1–24..

[11] A. Munemasa, M. Sawa, Simple abelian qudruple systems, *J. Combin. Theory Ser. A* **111** (2007), in Press.

[12] A. Munemasa, M. Sawa, A-invariant Steiner qudruple systems, 2007.

[13] W. Piotrowski, Untersuchungen über S-zyklische Quadrupelsysteme, Diss. Univ. Hamburg, 1985, l-104.

[14] Siemon, Helmut, A number-theoretic conjecture and the existence of S-cyclic Steiner quadruple systems, *Des. Codes Cryptogr.* **13** (1998), no. 1, 63–94.

[15] H. Siemon, Some remarks on the construction of cyclic Steiner quadruple systems. *Arch. Math. (Basel)* **49** (1987), no. 2, 166–178.

[16] T. van Trung, Recursive constructions for 3-designs and resolvable 3-designs, *J. Statist. Plan. Inf.* **95** (2001), 341–358.

[17] R. M. Wilson, Cyclotomy and difference families in elementary abelian groups, *J. Number Theory* **4** (1972), 17–47.

[18] E. Witt, Über Steinersche systeme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* **12** (1938), 265–275.