数理解析研究所講究録
第1564巻 2007年 150-161

長さ 72 の extremal doubly even self-dual code について— survey —

山形大学・理学部 原田 昌晃 (Masaaki Harada)
Faculty of Science,
Yamagata University

1 はじめに

長さ n の doubly even self-dual code C の minimum weight d は $d \leq 4[n/24]+4$ を満たし [22], $d = 4[n/24]+4$ の場合 C は extremal とよばれる. 長さが $24m$ の場合の extremal doubly even self-dual code については, 長さ 24 と 48 についてのみ code の存在が知られているが, その他の場合での存在は知られていない (ただし $m \geq 154$ の場合には非存在が分かっている). 特に, 長さ 72 の場合に存在を決める問題は, 既に 1973 年には Sloane [28] によって問題提起されている有名な未解決問題である.

本講演では, 長さ 72 の extremal doubly even self-dual code について今までに分かっていることを, 筆者の視点からではあるが, 紹介した. 本原稿は講演内容を一部補足しながらまとめたものである.

本原稿では, 一般的によく使われている用語を用いているが, 紹介していない用語については [18], [27] などを見ていただきたい.

2 Extremal doubly even self-dual code とは

本原稿では code は全て binary code を考えることにする. $C = C^{\perp}$ が成り立つとき C を self-dual とよぶ, ただし $C^{\perp}$ は通常の直交補空間 (dual code) を表す. C が self-dual であるとき, 全ての codeword $x \in C$ の weight $\mathrm{wt}(x)$ は偶数になる. 全ての codeword の weight が 4 の倍数になる self-dual code を *doubly even* とよび, $\mathrm{wt}(x) \equiv 2 \pmod 4$ なる codeword x が存在する self-dual code を singly even とよぶ.

$A_i = |\{c \in C | \mathrm{wt}(c) = i\}|$ とするとき, 多項式 $W_C(x,y) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} y^i$ を code C の weight enumerator とよぶ. まず doubly even self-dual code の weight enumerator に対しては次の有名な結果が知られている.

Theorem 1 (Gleason [13]). C を長さ n の doubly even self-dual code

とする. このとき C の weight enumerator は

$$W_C(x,y) = \sum_{j=0}^{[n/24]} a_j {\phi_8}^{n/8-3j} {\phi_{24}}^j$$

と整数 a_j を用いて表すことが出来る, ここで

$$\phi_8 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8, \phi_{24} = x^4y^4(x^4 - y^4)^4.$$

この Gleason の定理を用いて minimum weight に関する上限が与えられた.

Theorem 2 (Mallows–Sloane [22]). 長さ n で minimum weight d の doubly even self-dual code に対して

$$d \leq 4\left[\frac{n}{24}\right] + 4 \tag{1}$$

が成り立つ.

Proof. ここでは $n = 72$ の場合の証明を与えておく. Gleason の定理より

$$\begin{aligned} W_C(x,y) =& a_0\phi_8^9 + a_1\phi_8^6\phi_{24} + a_2\phi_8^3\phi_{24}^2 + a_3\phi_{24}^3 \\ =& a_0x^{72} + (126a_0 + a_1)x^{68}y^4 + (7065a_0 + 80a_1 + a_2)x^{64}y^8 \\ &+ (231504a_0 + 2616a_1 + 34a_2 + a_3)x^{60}y^{12} \\ &+ (4889844a_0 + 44016a_1 + 283a_2 - 12a_3)x^{56}y^{16} + \cdots. \end{aligned}$$

まず weight 0 の codeword の個数 A_0 は 1 であることより $a_0 = 1$ でなければならない. 次に $d \geq 16$ と仮定すると $A_4 = A_8 = A_{12} = 0$ より $a_1 = -126$, $a_2 = 3015$, $a_3 = -4398$ が得られる. このとき

$$\begin{aligned} W_C(1,y) =& 1 + 249849y^{16} + 18106704y^{20} + 462962955y^{24} \\ &+ 4397342400y^{28} + 16602715899y^{32} + 25756721120y^{36} \\ &+ \cdots + y^{72}. \end{aligned}$$

$A_{16} \neq 0$ なので $d \leq 16$. □

上の不等式 (1) において等号が成り立つ doubly even self-dual code を *extremal* とよぶ. 長さ 72 の場合は minimum weight 16 の doubly even self-dual code を extremal とよぶわけである.

ここで, 上の証明から, 長さ 72 の extremal doubly even self-dual code の weight enumerator は一意的であることが分かったが, 一般に extremal doubly even self-dual code の weight enumerator は長さだけに依存して一意的に決まることを注意しておく.

3 関係する 5-design について

以下 C_{72} で長さ 72 の extremal doubly even self-dual code を表すことにする.

Assmus–Mattson の定理 [1] は, 与えた code に対して, 各 weight の codeword の集合が t-design をなす条件を与えている. Assmus–Mattson の定理によって C_{72} の各 weight i の codeword の集合は 5-design $\mathcal{D}_i$ であることが示される. 特に $A_{16} = 249849$ であることから $\mathcal{D}_{16}$ は 5-(72, 16, 78) design になることが分かる. さらに C_{72} は self-dual であることから 5-design D_i において block intersection number は偶数になることが分かる. したがって, もし C_{72} が存在すれば block intersection number が偶数となる 5-(72, 16, 78) design が存在することになる. この逆を考えたのが次の結果である.

Theorem 3 (Harada–Kitazume–Munemasa [15]). $\mathcal{D}$ を block intersection number が偶数となる 5-(72, 16, 78) design とし M (249849 × 72 行列) をその結合行列とする. M の行が生成する code は extremal doubly even self-dual code になる.

ただちに M の 2-rank は 36 であり C_{72} は minimum weight の codeword で生成されることが分かるが, さらに $\mathcal{D}$ の block intersection number は $0, 2, 4, 6, 8$ の全てが現れることも分かる.

5-design に関しては次の問題が残っている.

Problem 1. 上では weight 16 の codeword のなす 5-design を考えたが, 他の weight の 5-design で同じような結果が得られるか.

例えば $\mathcal{D}_{20}$ は block intersection number が偶数となる 5-(72, 20, 20064) design になるが block intersection number が偶数となる同じパラメータの任意の 5-design の結合行列の行が生成する code は doubly even self-dual code でその minimum weight d は 12 以上になることは [15] で考えられている方法と同様に示される. しかし, 必ず extremal になるかどうか今のところ分かっていない.

C_{72} の代わりに 5-design $\mathcal{D}_i$ を考えることで何か進展が得られないであろうか. 筆者は 5-design を考えることがなにかのきっかけになって欲しいと願っている訳だが, なかなかそう簡単には話は進まない.

4 自己同型群について

奇素数位数の自己同型をもつ (extremal) doubly even self-dual code について 1980 年代に Huffman と Yorgov が精力的に研究を行なってきた. この節では C_{72} の自己同型群に関する結果をまとめる.

4.1 素数位数の自己同型

C の自己同型群を $\mathrm{Aut}(C)$ で表すことにする. 自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ が c 個の独立した p-cycle と f 個の固定点をもつとき σ を type p-(c, f) とよぶことにする ([17] などを参照).

まず Conway–Pless [6] が C_{72} の奇素数位数 p の自己同型の可能性は $p = 23, 17, 11, 7, 5, 3$ であることを証明することで C_{72} の自己同型に関する研究が始まった. $p = 2$ の場合とそれ以外の場合では議論が全く異なるが, ここでは素数位数 p の自己同型の可能性について知られている結果を一つの表にまとめておく:

p	結果	文献
$p = 23$	非存在	Pless [25]
$p = 17$	非存在	Pless–Thompson [26]
$p = 11$	非存在	Huffman–Yorgov [19]
$p = 7$	type 7-$(10, 2)$ のみ	Dontcheva–Zanten–Dodunekov [8]
$p = 5$	type 5-$(14, 2)$ のみ	Dontcheva–Zanten–Dodunekov [8]
$p = 3$	type 3-$(24, 0)$ のみ	Bouyuklieva [3]
$p = 2$	type 2-$(36, 0)$ のみ	Bouyuklieva [2]

もしかすると, 当初, ある位数の自己同型の存在を仮定することで C_{72} が構成されることが期待されていたのではないかと思われるが, 結果としては否定的なものが得られている. $p = 2, 3, 5, 7$ の場合にそれぞれ一つずつ自己同型の type の可能性が残っているのでこの場合を片付けることが出来ないだろうか.

Problem 2. C_{72} の自己同型で type 7-$(10, 2)$, type 5-$(14, 2)$, type 3-$(24, 0)$, type 2-$(36, 0)$ となるものが存在しないことを示せ.

4.2 自己同型群の位数の可能性

最近になって $|\mathrm{Aut}(C_{72})|$ の可能性についての研究も進められている. Yorgov [31] が $|\mathrm{Aut}(C_{72})|$ は 72 の約数か 504, 360, 252, 180, 60, 56, 14, 7, 10, 5 であることを示している. その後, つい最近 Bouyuklieva–O'Brien–Willems [4] が $\mathrm{Aut}(C_{72})$ は位数が 72 の約数か 56, 14, 10, 7, 5 である可解群になることを示している. [4] でのアプローチを簡単に紹介すると $|\mathrm{Aut}(C_{72})| = 60, 180, 252, 360, 504$ の場合は $\mathrm{Aut}(C_{72})$ は単純群になることをまず示して, その後に 5 次, 6 次の交代群 と $SL(2,8)$ (位数 504) のそれぞれに対して細かい議論をすることで, C_{72} はそれらを自己同型群として持たないことを確認し[1], 最終的な結論を得ている.

Problem 3. $|\mathrm{Aut}(C_{72})|$ の可能性をさらに限定せよ.

自己同型群としては自明な場合 $|\mathrm{Aut}(C_{72})| = 1$ の可能性も残っている. Tonchev [29] が長さ 40 で自明な自己同型群をもつ extremal doubly even self-dual code を初めて構成した. 長さ 32 以下では自明な自己同型群をもつ extremal doubly even self-dual code は存在しないので, この長さが最小になる. その後, 長さ 56, 64 などでも自明な自己同型群をもつ extremal doubly even self-dual code が存在することが分かっている. また Oral–Phelps [24] が全ての長さの self-dual code を考えた場合, そのほとんどが自明な自己同型群をもつ code であることを示している. 全く根拠はないが $|\mathrm{Aut}(C_{72})| = 1$ の可能性も捨て切れない.

5 関係する singly even self-dual code

この節では C_{72} に関係する singly even self-dual code について述べる.

C を singly even self-dual code とし doubly even subcode $C_0 = \{x \in C | \mathrm{wt}(x) \equiv 0 \pmod 4\}$ を定義すると $|C : C_0| = 2$ となる. $C_0^{\perp} \setminus C$ を C の shadow S と定義する. Conway–Sloane [7] によって singly even self-dual code の minimum weight に関する新たな上限を与えることと weight enumerator の可能性に制限を付けるために shadow は導入された. このように shadow の概念は singly even self-dual code を調べる上では非常に役立つものである.

[1] この部分については [5] の方法を用いれば比較的簡単に確認されることを注意しておく.

5.1 C_{72} と singly even self-dual [70, 35, 14] code

C を self-dual $[n, n/2, d \geq 4]$ code とする. このとき

$$C' = \{(x_1, \ldots, x_{n-2}) | (x_1, \ldots, x_n) \in C, x_{n-1} + x_n = 0\}$$

は self-dual $[n-2, (n-2)/2, d' \geq d-2]$ code になる. C' を C から subtracting によって得られた code とよぶ. 上では削る座標を $n-1, n$ としているがもちろん別の座標でも構わない.

C_{72} から subtracting によって得られる code C_{72}' は self-dual [70, 35, 14] code [2] になるが, 逆に次も成り立つ. 証明は簡単であるが, 講演中は時間の関係で紹介することが出来なかったのでここで述べておく.

Proposition 4 (Dougherty–Harada [11]). もし singly even self-dual [70, 35, 14] code が存在すれば, 長さ 72 の extremal doubly even self-dual [72, 36, 16] code も存在する.

Proof. C を self-dual [70, 35, 14] code とする. ここで C_1, C_2, C_3 を $C_0^{\perp} = C_0 \cup C_2 \cup C_1 \cup C_3$ となる C_0 の coset としておく, ここで $C = C_0 \cup C_2$, $S = C_1 \cup C_3$. これらの coset の元については次のような直交関係が成り立つ:

$x \cdot y$	C_0	C_1	C_2	C_3
C_0	0	0	0	0
C_1	0	1	1	0
C_2	0	1	0	1
C_3	0	0	1	1

したがって $(a, b, C_i) = \{(a, b, x) | x \in C_i\}$ とするとき

$$C^* = (0, 0, C_0) \cup (1, 1, C_2) \cup (1, 0, C_1) \cup (0, 1, C_3)$$

は長さ 72 の self-dual code になる.

C とその shadow S の weight enumerator は

$$\begin{cases} W_C &= 1 + 11730y^{14} + 150535y^{16} + 1345960y^{18} + \cdots, \\ W_S &= 87584y^{15} + 7367360y^{19} + 208659360y^{23} + \cdots, \end{cases}$$

[2] [7, Table I] では長さ 70 の self-dual code の minimum weight の最大の可能性は 12 であると書かれているがこれはタイプミスで 14 の可能性もある.

と一意的に決まることが分かる[3]. S の vector の weight は 3 (mod 4) であるので C^* は doubly even になり, さらに C^* の構造から minimum weight は 16 であることが分かる. □

したがって, C_{72} の存在と singly even self-dual $[70, 35, 14]$ code の存在は同値であることが分かった[4].

さらにもう一度 subtracting を行なうと self-dual $[68, 34, 12]$ code $D = (C_{72}')'$ が得られる. 既に述べた通り C_{72} の各 weight の codeword は 5-design であることから, どの 4 つの座標を削った場合も同じ weight enumerator をもつ self-dual $[68, 34, 12]$ code が得られる. D とその shadow S の weight enumerator は

$$\begin{cases} W_D &= 1 + 442y^{12} + 14960y^{14} + 174471y^{16} + \cdots, \\ W_S &= 29920y^{14} + 2956096y^{18} + 93399904y^{22} + \cdots, \end{cases}$$

となる. したがって, もし extremal doubly even self-dual $[72, 36, 16]$ code が存在すれば $d(S) = 14$ である singly even $[68, 34, 12]$ code も存在する. 全ての shadow S の minimum weight $d(S) = 14$ である self-dual $[68, 34, 12]$ code は上の weight enumerator をもつことを注意しておく [9].

では, 逆は正しいか.

Problem 4. C を self-dual $[68, 34, 12]$ code でその shadow S の minimum weight $d(S)$ は 14 と仮定する. このとき C は必ず C_{72} から subtracting によって得られるか.

異なる weight enumerator をもつ多数の self-dual $[68, 34, 12]$ code の存在が既に知られているが $d(S) = 14$ である self-dual code の存在は分かっていない ([18] を参照).

5.2 C_{72} と singly even self-dual [72, 36, 14] code

v を weight 4 の vector とすると

$$N = (C_{72} \cap \langle v \rangle^{\perp}) \cup \{u + v \mid u \in (C_{72} \setminus (C_{72} \cap \langle v \rangle^{\perp}))\}$$

[3]最初に W_C, W_S を求めたのは [21] であるが, 計算結果に間違いがあり, 正しい W_C, W_S は [11] で求められている.

[4]$W_C(x, y) = W_{C^{\perp}}(x, y)$ である code は formally self-dual とよばれるが, formally self-dual even $[70, 35, 14]$ code は [14] において構成されている. さらにこの code とその dual code は同値になっていて限りなく self-dual code に近い存在だとも考えられる.

は singly even self-dual code になる. 長さ 72 の singly even self-dual code における最大の minimum weight の可能性は 14 であることと $\mathrm{wt}(v) = 4$ であることから N の minimum weight は 14 となる. さらに v が shadow の vector になるので shadow の minimum weight は 4 である. したがって, もし extremal doubly even self-dual $[72, 36, 16]$ code が存在すれば $d(S) = 4$ である singly even self-dual $[72, 36, 14]$ code も存在する. この逆も正しい.

Theorem 5 (Munemasa–Venkov [23]). もし $d(S) = 4$ である singly even self-dual $[72, 36, 14]$ code が存在すれば extremal doubly even self-dual $[72, 36, 16]$ code も存在する.

現在のところ singly even self-dual $[72, 36, 14]$ code は一つも知られていない ([18] を参照).

Problem 5. singly even self-dual $[72, 36, 14]$ code は存在するか.

[7] において singly even self-dual $[72, 36, 14]$ code の weight enumerator の可能性が与えられている ([9] も参照) [5].

6 幾つかの weight enumerator のタイプ

第 2 節で C_{72} の通常の (Hamming) weight enumerator は一意的に決まることが述べられている. ここではその他の幾つかのタイプの weight enumerator (の一般化) に対して, それらを調べている文献をまとめておく[6]. なお, それぞれの weight enumerator の定義についてはそれぞれの文献を参照していただきたい:

weight enumerator のタイプ	文献
coset weight enumerator	Janusz [20]
2nd higher weight enumerator	Dougherty–Gulliver–Oura [10]
biweight enumerator の average	Yoshida [32]
biweight enumerator	Vardi [30]
split weight enumerator	Fields–Pless [12]

[5] [7] では weight enumerator の可能性は 3 種類に限定されているがそれ以外の可能性が [9] で与えられている. [9] で与えられていて [7] に載っていない weight enumerator がなぜ排除出来るのか筆者は分かっていない.

[6] Vardi [30] は大浦学氏に教えていただいた.

特に biweight enumerator は (したがって 2nd higher weight enumerator も) 一意的に決まることが知られていることを注意しておく.

7 最後に

本原稿では, 長さ 72 の extremal doubly even self-dual code について今までに分かっていることを, 筆者の視点からではあるが, 紹介した. 最後に, さらに筆者の個人的な思いを書かせていただくことをご容赦ください.

長さ 72 の extremal doubly even self-dual code C_{72} が存在するかどうかは全く分からない状況ではあるが, 第 3 節と第 5 節では C_{72} とその存在が同値である 5-design と singly even self-dual code について紹介した. これらが存在性を決定するために少しでも役に立てばと願っている. また第 4 節では C_{72} の自己同型および自己同型群の可能性についての結果を紹介した. 全く根拠はないが, 筆者はもし長さ 72 の extremal doubly even self-dual code C_{72} が存在するのであれば, それは $|\mathrm{Aut}(C_{72})| = 1$ の場合ではないかと思っている. しかしながら, この場合は代数的なアプローチが出来ないので, 構成することも, 非存在を示すことも非常に難しくなると思われる. 筆者は, 例えば位数 36 の Hadamard 行列や 36 点上の symmetric design の結合行列を用いた構成方法 (例えば [29] などを参照) などを用いて何度か構成を試みたことはあるが, なかなか良いアプローチではなさそうである. 今回は doubly even self-dual code の構成方法については述べる機会がなかったので, 可能であればまた別の機会に紹介したい.

2003 年に, 長さ 48 の extremal doubly even self-dual code の分類が [16] によって完成された. 計算機をフルに用いた, 一言で言えば分類に必要な全ての可能性を探すような分類方法である. 同じような手法で, 近い将来に長さ 72 の場合の分類が行なえるとは思っていないが, このような分類を行なうことで存在性が解決される前に, なんとかこの問題が解決して欲しいと強く願っているところです.

参考文献

[1] E.F. Assmus, Jr. and H.F. Mattson, Jr., New 5-designs, *J. Combin. Theory* **6** (1969), 122–151.

[2] S. Bouyuklieva, On the automorphisms of order 2 with fixed points for the extremal self-dual codes of length $24m$, *Designs, Codes Cryptogr.* **25** (2002), 5–13.

[3] S. Bouyuklieva, On the automorphism group of a doubly-even $(72, 36, 16)$ code, *IEEE Trans. Inform. Theory* **50** (2004), 544–547.

[4] S. Bouyuklieva, E.A. O'Brien and W. Willems, The automorphism group of a binary self-dual doubly-even $[72, 36, 16]$ code is solvable, *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** (2006), 4244–4248.

[5] N. Chigira, M. Harada and M. Kitazume, Permutation groups and binary self-orthogonal codes, *J. Algebra* **309** (2007), 610–621.

[6] J.H. Conway and V. Pless, On primes dividing the group order of a doubly-even (72, 36, 16) code and the group order of a quaternary (24, 12, 10) code, *Discrete Math.* **38** (1982), 143–156.

[7] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, A new upper bound on the minimal distance of self-dual codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* **36** (1990), 1319–1333.

[8] R.A. Dontcheva, A.J. van Zanten and S.M. Dodunekov, Binary self-dual codes with automorphisms of composite order, *IEEE Trans. Inform. Theory* **50** (2004), 311–318.

[9] S.T. Dougherty, T.A. Gulliver and M. Harada, Extremal binary self-dual codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* **43** (1997), 2036–2047.

[10] S.T. Dougherty, T.A. Gulliver and M. Oura, Higher weights and graded rings for binary self-dual codes, *Discrete Appl. Math.* **128** (2003), 121–143.

[11] S.T. Dougherty and M. Harada, New extremal self-dual codes of length 68, *IEEE Trans. Inform. Theory* **45** (1999), 2133–2136.

[12] J. Fields and V. Pless, Split weight enumerators of extremal self-dual codes, *Proc. 35th Allerton Conference on Comm. Contr. Comput.* (1997), 422–431.

[13] A.M. Gleason, Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities, Actes Congrés Intern. Math. (Nice, 1970), pp. 211–215. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[14] T.A. Gulliver and M. Harada, On the existence of a formally self-dual even $[70, 35, 14]$ code, *Appl. Math. Lett.* **11** (1998), 95–98.

[15] M. Harada, M. Kitazume and A. Munemasa, On a 5-design related to an extremal doubly even self-dual code of length 72, *J. Combin. Theory Ser. A* **107** (2004), 143–146.

[16] S.K. Houghten, C.W.H. Lam, L.H. Thiel and J.A. Parker, The extended quadratic residue code is the only $(48, 24, 12)$ self-dual doubly-even code, *IEEE Trans. Inform. Theory* **49** (2003), 53–59.

[17] W.C. Huffman, Automorphisms of codes with applications to extremal doubly even codes of length 48, *IEEE Trans. Inform. Theory* **28** (1982), 511–521.

[18] W.C. Huffman, On the classification and enumeration of self-dual codes, *Finite Fields Appl.* **11** (2005), 451–490.

[19] W.C. Huffman and V.Y. Yorgov, A $[72, 36, 16]$ doubly even code does not have an automorphism of order 11, *IEEE Trans. Inform. Theory* **33** (1987), 749–752.

[20] G.J. Janusz, Overlap and covering polynomials with applications to designs and self-dual codes, *SIAM J. Discrete Math.* **13** (2000), 154–178.

[21] G.T. Kennedy and V. Pless, A coding-theoretic approach to extending designs, *Discrete Math.* **142** (1995), 155–168.

[22] C.L. Mallows and N.J.A. Sloane, An upper bound for self-dual codes, *Inform. Control* **22** (1973), 188–200.

[23] A. Munemasa and B. Venkov, unpublished note, (2002).

[24] H. Oral and K.T. Phelps, Almost all self-dual codes are rigid, *J. Combin. Theory Ser. A* **60** (1992), 264–276.

[25] V. Pless, 23 does not divide the order of the group of a (72, 36, 16) doubly even code, *IEEE Trans. Inform. Theory* **28** (1982), 113–117.

[26] V. Pless and J.G. Thompson, 17 does not divide the order of the group of a (72, 36, 16) doubly even code, *IEEE Trans. Inform. Theory* **28** (1982), 537–541.

[27] E. Rains and N.J.A. Sloane, "Self-dual codes," Handbook of Coding Theory, V.S. Pless and W.C. Huffman (Editors), Elsevier, Amsterdam 1998, pp. 177–294.

[28] N.J.A. Sloane, Is there a $(72, 36)$ $d = 16$ self-dual code? *IEEE Trans. Inform. Theory* **19** (1973), 251.

[29] V.D. Tonchev, Self-orthogonal designs and extremal doubly even codes, *J. Combin. Theory Ser. A* **52** (1989), 197–205.

[30] I. Vardi, Multiple weight enumerators of codes, preprint, (1998) `http://cf.geocities.com/ilanpi/`

[31] Y. Yorgov, On the automorphism group of a putative code, *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** (2006), 1724–1726.

[32] T. Yoshida, The average of joint weight enumerators, *Hokkaido Math. J.* **18** (1989), 217–222.