数理解析研究所講究録
第 1565 巻 2007 年 69-73

Boundary conformal field theory and operator algebras

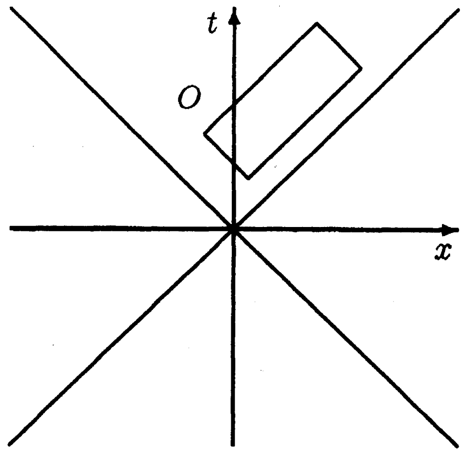
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

1 前置き

代数的場の量子論とは，場の量子論を作用素環の族を用いて研究する方法である．ここでは，boundary conformal field theory (以下 BCFT と略記) をこの枠組みで研究する方法について述べる．一般論は，Longo-Rehren [13] によるものであり，分類理論は私と Longo-Pennig-Rehren [11] による．

2 共形場理論と作用素環

まず作用素環を用いた共形場理論について簡単に述べる．詳しくは [9] にある．量子場の理論で広く使われているのは Wightman 場であり，それは数学的には，時空の上の作用素値超関数である．しかし，これは「超」関数であることと，値として出てくる作用素が非有界になることなどからあまり数学的に扱いやすいとは言えない．そこで，代数的場の量子論では，同じ Hilbert 空間の上で「有界」線形作用素のなす環を基礎にすえて理論を展開する．基本的な考えは次のとおりである．Wightman 場 Φ たちがあるとする．時空領域 O を固定して，この中に台が含まれる試験関数 ϕ を取る．$\langle\Phi,\phi\rangle$ は (非有界) 作用素になるが，これらの作用素たちの生成する，有界線形作用素のなす環，von Neumann 環を考えることができる．これによって，Wightman 場があれば，時空領域によってパラメトライズされた von Neumann 環の族ができる．そこで，Wightman 場のことは忘れて，時空領域でパラメトライズされた von Neumann 環の族を数学的に公理付けて，その例を作ったり，分類したり，性質を調べたりしようとするのである．時空は何でも考えることができるが，ここではまず，2 次元 Minkowski 空間を考える．また共変性を考えるため，時空の対称性を表す群を指定する必要がある．ここで共形変換を考えたものが，共形場理論である．時空領域 O としては，各辺が $x=\pm t$ に平行な長方形だけを考えれば十分なことがわかるので，次の図のように，各長方形に von Neumann 環が対応しているという族を考える．共形変換を考えることによる，無限遠点の処理の問題があるが，詳しい定義は [9] にゆずりここでは省略する．



この設定で考えることを，しばしば full conformal field theory と言う．これを研究する際には，1次元の理論，chiral conformal field theory に制限することが有効である．すなわち，直線 $x=\pm t$ (をコンパクト化した円周 S^1) の上の区間 I でパラメトライズされた von Neumann 環の族 $A(I)$ を考えることができる．(この「制限」の手続きは，詳しくは [9] に書かれている．) こうしてできる円周上の共形場理論を chiral conformal field theory と言う．その正確な公理系については [8] に書かれている．たとえば，Einstein causality から生じる重要な公理，局所性は，

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow [A(I_1), A(I_2)] = 0$$

と言う形を取る．これについては詳しい研究がさまざまな立場からなされている．たとえば，頂点作用素代数の理論 [5] はこのような円周上の共形場理論における Wightman 場の代数的な公理付けである．

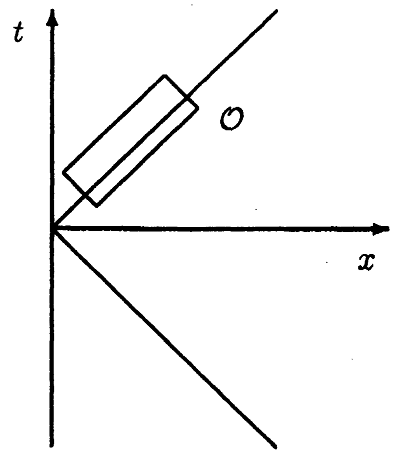
円周上の区間でパラメトライズされた von Neumann 環の族があると，共形共変性の公理から，Virasoro 代数の unitary 表現が生じる．これによって，central charge c と呼ばれる正の実数が定まる．これは，1 未満のときは $1-6/m(m+1)$, $m=3,4,5,\ldots$ という離散的な値をとることがよく知られている．(1 以上のときは任意の値を取りうる．) そこで，この central charge が 1 未満の von Neumann 環の族については [8] において完全な分類が与えられた．その分類表は，3 つの無限系列と 4 つの例外からなるが，その例外の中には，これまでに知られていた他の構成法では作れない例 1 つが含まれている．この分類には，Jones の subfactor 理論 [6, 4] のテクニックを用いる．[12, 1, 2, 10] で示されたさまざまな結果が基礎となっている．これは，Doplicher-Haag-Roberts による作用素環の族の表現論 [3] に基づく分類といってもよい．[10] では表現論が有限個の既約表現を持たない場合を，完全有理的な場合と呼んで，基礎的な性質を研究した．

この結果を用いて，full conformal field theory の作用素環的分類理論も [9] において得られている．この際，2 次元 Minokowski 空間上の von Neumann 環の族 $B(I\times J)$ を，円周上の von Neumann 環の二つの族 $A_1(I), A_2(J)$ を用いた拡大 $A_1(I)\otimes A_2(J)\subset B(I\times J)$ と思うことがポイントである．

3 Boundary conformal field theory とその分類

このような一般的考え方を boundary conformal field theory に適用したい．今度は，2 次元 Minkowski 空間において，空間座標 x を正の範囲に制限した半空間で考える．またこ

こでの時空領域として，各辺が $x = \pm t$ に平行な長方形で，この半空間に含まれるものを考える．



このような各長方形について，von Neumann 環が対応して，ある公理系を満たしているようなものが，代数的場の量子論における boundary conformal field theory の研究対象である．その一般的な設定は [13] において展開された．[13] においては，半空間の上の族を，境界である直線上に制限すること，また制限から半空間上の族を回復する一般論が研究された．その結果を簡単に言うと，ある種の極大性 (Haag duality) があれば，半空間の上の族と，境界への制限は 1 対 1 に対応する，ということである．そこでこの仮定の下で，半空間の上の族を研究すると，境界である直線の上の族を研究することになる．ここでも直線は自然にコンパクト化されて，円周 S^1 となる．そしてまた，円周上のある族 $A(I)$ とその延長 $B(I)$ と言う考え方が有効になる．Logno-Rehren [13] では最初から，この元となる族 $A(I)$ を最初のデータの一部と考えている．ここで，基本となる族 $A(I)$ は局所性の公理，

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow [A(I_1), A(I_2)] = 0$$

を満たしているのだが，延長 $B(I) \supset A(I)$ はもはやこの公理を一般には満たしていないということが重要なポイントである．そのかわりに，相対局所性の公理

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow [A(I_1), B(I_2)] = 0$$

が満たされているのである．そこで与えらた族 $A(I)$ に対し，その相対局所的な延長 $B(I)$ を分類せよ，と言う数学的な問題が考えられる．ここに [12, 1, 2] による α-induction の一般論が有効に利用できるのである．(群とその部分群があるとき，部分群の表現を大きい群の表現に移すのが，誘導表現の理論である．今は，von Neumann 環の族とその延長である大きな族に対し，小さい族の表現を「誘導」して大きな族の表現もどき — ぴったり表現にはならない — を作ることができる．これが α-induction の手法である．)

Central charge が 1 未満の場合を考えよう．この場合，Virasoro algebra によって生成される minimal な von Neumann 環の族があって，それを Virasoro net と言う．Central charge が c のときの Virasoro net を Vir_c と書こう．(Net と言う名前は共形場理論ではあまり適切ではないが，昔から Minkowski 空間上の Poincaré 共変性を持つ理論で使われている名前なのでここでもしばしば用いられる．) すると，問題は Vir_c の相対局所的な延長を分類せよ，ということである．ただし，上では正確に書かなかったが，ある種の既約性の条件がついている．このような延長の Jones index は自動的に有限になることが [7]

の結果から従う．すると上と同様 α-induction の理論が使えるのである．[8] における分類は局所的な延長の分類であって，そこでは延長は，A-D_{2n}-$E_{6,8}$ 型の Dynkin 図形のペアで，Coxeter 数の差が 1 であるようなものでラベル付けされた．(Dynkin 図形が現れるのは modular invariant 行列と関係している．[1, 2] とそこでの引用文献を参照のこと．作用素環の文脈では Ocneanu の分類 [14] が出発点である．) 今度は相対局所性しか要請しないので，分類には，そのような Dynkin 図形のペアで A-D-E 型の Dynkin 図形ずべてを考え，さらに二つのグラフにおいて頂点も指定したものが現れる．ただし，Coxeter 数の差が 1 という条件はまだついており，また頂点は，グラフの自己同型で移れるものは同じとみなしている．このような Dynkin 図形と頂点の組で，すべての延長が完全にラベル付けされ，したがって，central charge が 1 未満で Haag duality を満たすような boundary conformal field theory を記述する von Neumann 環の族も，そのような組で完全にラベル付けされるのである．証明など詳しくは，[11] に書かれている．

References

[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487. math.OA/9904109.

[2] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000) 733–784. math.OA/9907149.

[3] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics*, I. Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199–230; II. **35** (1974) 49–85.

[4] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, “Quantum symmetries on operator algebras”, Oxford University Press, 1998.

[5] I. Frenkel, J. Lepowsky & A. Meurman, “Vertex operator algebras and the Monster”, Academic Press, 1988.

[6] F. Goodman, P. de la Harpe & V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, MSRI publications 14, Berlin, Springer, 1989

[7] M. Izumi, R. Longo & S. Popa *A Galois correspondence for compact groups of automorphisms of von Neumann algebras with a generalization to Kac algebras*, J. Funct. Anal. **10** (1998) 25–63.

[8] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case $c < 1$*, Ann. of Math. **160** (2004), 493–522. math-ph/0201015.

[9] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of two-dimensional local conformal nets with $c < 1$ and 2-cohomology vanishing for tensor categories*, Commun. Math. Phys. **244** (2004) 63–97. math-ph/0304022.

[10] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669. math.OA/9903104.

[11] Y. Kawahigashi, R. Longo, U. Pennig, & K.-H. Rehren, *Classification of non-local chiral CFT with $c < 1$*, Commun. Math. Phys. **271** (2007) 375–385. math.OA/0505130.

[12] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.

[13] R. Longo & K.-H. Rehren, *Local fields in boundary CFT*, Rev. Math. Phys. **16** (2004) 909–960. math-ph/0405067.

[14] A. Ocneanu, *Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras*, in *Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)*, (ed. D. E. Evans and M. Takesaki), London Mathematical Society Lecture Note Series **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, 119–172.