数理解析研究所講究録
第 1565 巻 2007 年 98-106

Jarzynski Equality with Maxwell's Demon

沙川貴大 (Takahiro Sagawa), 上田正仁 (Masahito Ueda) *

May 29, 2007

Abstract

Maxwell's demon が作用する等温過程において，仕事と情報を結びつける新しい熱力学等式と不等式を提案する．私たちのアプローチは，Jarzynski による非可逆熱力学の定式化と，Nielsen らによる量子情報理論的な demon の定式化に基づいている．私たちの不等式は，等温過程で単一の熱浴に対してなされる仕事の下限を定めており，その下限は demon が測定で得た情報量で特徴付けられている．この不等式は，従来の熱力学第二法則を，demon が情報処理（一種の量子フィードバック制御) を行うような等温過程に一般化したものであるとみなすことができる．私たちの結果は，系の Hamiltonian の詳細によらずに成立し，また demon 自身の状態にもよらずに成立する．また，私たちの導出した不等式と従来の熱力学第二法則の整合性や，熱平衡状態の特徴づけについても議論する．

1 Introduction

かつて Maxwell が提案して以来 [1]，Maxwell's demon (MD) の役割と熱力学第二法則の整合性をめぐって、多くの議論がなされてきた [2, 4, 3, 5, 6]．また，量子力学的な MD についても議論がなされており [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]，熱力学系の von Neumann エントロピーの変化と MD の作用の関係が，量子情報理論の観点から明らかになっている [14, 15]． しかし，熱力学系が外界とやりとりする熱や仕事と MD の作用の関係は，まだ十分に明らかにされていない．なお，一般の熱力学過程では $\Delta S = Q/T$ が成り立つとは限らないので，エントロピー的な観点とエネルギー的な観点の関係は自明ではない．

一方で，Jarzynski が 1997 年が提案した等式は，任意の非可逆等温過程において，熱力学系に対してなされた仕事と Helmholtz 自由エネルギーの変化を結びつけた: $\langle\exp(-\beta W)\rangle = \exp(-\beta\Delta F)$，ここで $\beta = (k_{\rm B}T)^{-1}$ は熱浴の逆温度で，W は熱力学系に対してなされた仕事，ΔF は初期状態と終状態の熱力学系の Helmholtz 自由エネルギーの差である [16, 17]．また，$\langle\cdots\rangle$ はすべてのミクロな経路に関しての統計平均を表す。このいわゆる Jarzynski 等式は，（体積や磁場などの）外部パラメータを有限の速さで変化させても必ず成り立つ等式であるという特徴を持っている——非可逆過程に関して古くから知られている熱力学関係式は，すべて不等式であった．等温過程における熱力学第二法則の表現である重要な不等式

$$\langle W\rangle \geq \Delta F \tag{1}$$

*東京工業大学大学院理工学研究科

は，Jarzynski 等式から（指数関数の凹性を用いて）ただちに示すことができる．なお，最初に Jarzynski が提案した等式は古典力学系に関するものであったが，量子力学的なバージョンもいくつか提案されている [18, 19, 20, 21]． また，MD が作用する古典 Langevin 系に Jarzynski 等式を拡張する試みもなされている [22].

論文 [23] において私たちは，MD が作用する等温過程において，熱力学系に対してなされる仕事と MD が得た情報量の間の一般的な関係式――ある等式と不等式――を確立した． 前者は Jarzynski 等式を MD が作用する量子系に一般化したものであり，後者は熱力学第二法則 (1) を MD が作用する系に一般化したものであるとみなすことができる．ここで MD の役割は，熱力学系を量子測定して [24, 25]，測定結果に応じた操作を熱力学系に対して行うという，一種の量子フィードバック制御であるとみなすことができる．また私たちは，MD 自身の状態について何の仮定も設けなかった．したがって私たちの結果は，たとえ MD の状態が熱平衡から終始遠く離れていても成り立ち，広範な応用をもつと期待される．以下では，論文 [23] をもとにしながら，私たちの結果を概観する．

2 Setup

熱力学系が温度 $T=(k_{\rm B}\beta)^{-1}$ の熱浴と接触しながら時間発展する等温過程を考える．熱力学系はの始状態と終状態は熱平衡状態であると仮定するが，等温過程の途中では熱平衡にあるとはかぎらない．熱力学系を S，熱浴を B として，S は外部パラメータ（体積や磁場）を通して外部の力学系と相互作用しているものとする．ただし，それと MD を除けば S+B は孤立系として扱うことができるとする．MD を除いたハミルトニアンは

$$H^{\rm S+B}(t)=H^{\rm S}(t)+H^{\rm int}(t)+H^{\rm B} \tag{2}$$

と書ける．ここで，$H^{\rm S}(t)$ の時間依存性は外部パラメータによる S の操作を表し，$H^{\rm int}(t)$ の時間依存性はたとえば断熱壁で S を覆うといった操作を表している．時刻 $t_{\rm i}$ から $t_{\rm f}$ までの時間発展を考え， $H^{\rm int}(t_{\rm i})=H^{\rm int}(t_{\rm f})=0$ と仮定する．また $H^{\rm S+B}(t_{\rm i})=H_{\rm i}$， $H^{\rm S+B}(t_{\rm f})=H_{\rm f}$ と書く． MD を含めた過程は，以下の五つのステージからなる．

Stage 1.―時刻 $t_{\rm i}$ において，S+B の初期状態は温度 T の熱平衡状態にあるとする．S+B の密度演算子は

$$\rho_{\rm i}=\frac{\exp(-\beta H_{\rm i})}{Z_{\rm i}},\ Z_{\rm i}={\rm tr}\{\exp(-\beta H_{\rm i})\} \tag{3}$$

となる．ここで S+B の分配関数は S の分配関数と B の分配関数の積として $Z_{\rm i}=Z_{\rm i}^{\rm S}Z_{\rm i}^{\rm B}$ のように書け，Helmholtz 自由エネルギーは $F_{\rm i}=F_{\rm i}^{\rm S}+F_{\rm i}^{\rm B}$, where $F_{\rm i}=-k_{\rm B}T\ln Z_{\rm i}$ などのように和の形で書ける．

Stage 2.―時刻 $t_{\rm i}$ から t_1 まで，S+B は

$$U_{\rm i}=T\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int_{t_{\rm i}}^{t_1}H^{\rm S+B}(t)dt\right) \tag{4}$$

というユニタリー時間発展をする．

Stage 3.―ここで MD が登場し，時刻 t_1 から t_2 まで量子測定を行う．時刻 t_1 における S+B の状態を ρ_1 とする．この測定は，S に対する測定演算子 $\{M_k\}$ で記述され，対応す

る POVM は $\{D_k = M_k^\dagger M_k\}$ である． 測定結果 k の出る確率を p_k とする．また，$p_k \neq 0$ を満たす測定値 k 全体の集合を K として，K は有限集合であると仮定する．K のある部分集合 K' を選び，測定結果が K' に含まれているときだけ *stage 4* に進み，それ以外の場合は当該のサンプルを捨てて新たなサンプルを準備し *stage 1* からやりなおすものとする．つまり，統計平均を計算するときは部分集合 K' 上のみで行う．

Stage 4.—時刻 t_2 から t_3 まで，MD は測定結果 k に応じた力学的操作を S に行う．この操作は，S+B に作用するユニタリー演算子 U_k で記述されるものとする．ここで，このフィードバック操作を行ったあとの系の状態は測定結果 k に依存しないと仮定する．これは，私たちが採用した MD の定式化の重要な特徴である [14]. なお，結局，MD の作用は $\{K', M_k, U_k\}$ の組だけで特徴付けられることになる．

Stage 5.—時刻 t_3 から $t_{\rm f}$ まで， S+B は $U_{\rm f}$ で記述されるユニタリー発展を行う．この時間発展は測定値 k とは独立である．時刻 $t_{\rm f}$ までに，系は温度 T の熱平衡状態に緩和すると仮定する．終状態のハミルトニアンに対応する分配関数は

$$Z_{\rm f} = {\rm tr}\{\exp(-\beta H_{\rm f})\} \tag{5}$$

である．また，*stage 1* と同様に， $Z_{\rm f} = Z_{\rm f}^{\rm S} Z_{\rm f}^{\rm B}$， $F_{\rm f} = F_{\rm f}^{\rm S} + F_{\rm f}^{\rm B}$， $F_{\rm i}^{\rm B} = F_{\rm f}^{\rm B}$ などが成立する．終状態の密度演算子を $\rho_{\rm f}$ とする．なおここで，カノニカル分布

$$\rho_{\rm f}^{\rm can} = \frac{\exp(-\beta H_{\rm f})}{Z_{\rm f}} \tag{6}$$

と，真の終状態 $\rho_{\rm f}$ とが厳密に一致していることは要請しない．この事情については，セクション IV.C. で議論することにしたい．

以上が一連の時間発展である．S+B の密度演算子は，始状態の $\rho_{\rm i}$ から

$$\rho_{\rm f} = \frac{1}{p} \sum_{k \in K'} E_k \rho_{\rm i} E_k^\dagger \tag{7}$$

へと時間発展する．ここで E_k は

$$E_k = U_{\rm f} U_k M_k U_{\rm i}, \tag{8}$$

で与えられ，p は測定値 k が K' に属する確率で，

$$p = \sum_{k \in K'} {\rm tr}(E_k^\dagger E_k \rho_{\rm i}) \tag{9}$$

で与えられる．MD の作用によって E_k が非ユニタリー演算子になっていることに注意が必要である．

上記の一般的なプロセスを例示するために，一般化された Szilard エンジンを考えよう．温度 T の熱浴と接触する箱に入った一分子気体を考える．

Stage 1.—分子は最初温度 T の熱平衡状態にあるとする．エンジンと熱浴の始状態の密度演算子を $\rho_{\rm i}$ とする．

Stage 2.—分子が入った箱に仕切りをいれ，同じ体積の n 個の箱に分割する．このときの状態は $\rho_1 = (\rho(1) + \rho(2) + \cdots + \rho(n))/n$ となる．ここで $\rho(k)$ は分子が左から k 番目の箱に入っている状態を表す．$K = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく．

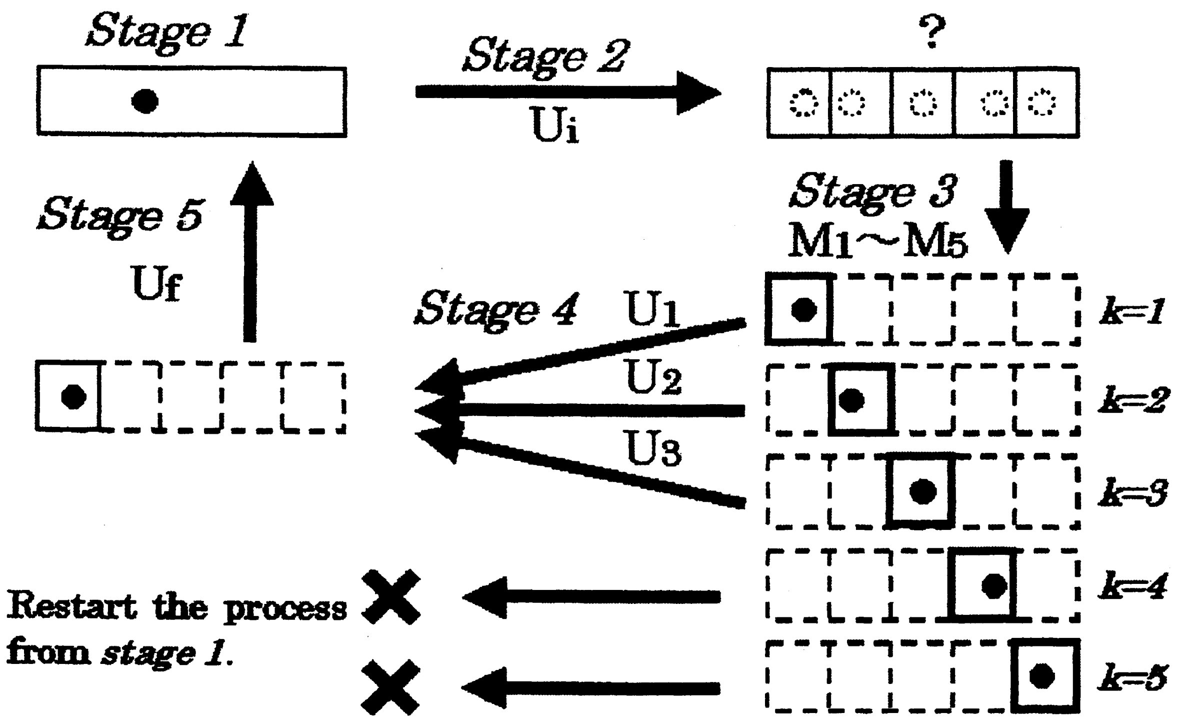

Figure 1: 一般化された Szilard エンジン（$n=5$, $m=3$）.

Stage 3.—MD が，分子がどの箱に入っているかを測定する．MD はある部分集合 $K'=\{1,2,\cdots,m\}$ （$m\leq n$）を選び，測定結果 k がこの部分集合の要素であるときだけ *stage 4* に進む．すると系の状態は $\rho_2=(\rho(1)+\rho(2)+\cdots+\rho(m))/m$ になる．

Stage 4.—測定結果が k （$\in K'$）の場合，MD は k 番目以外の箱を取り除き，k 番目の箱を左端によせる．このときに要する仕事は 0 であるとする．この操作はユニタリー発展 U_k で表される．この操作のあとの密度演算子を $\rho_3=\rho(1)$ とする．

Stage 5.—左端によせた箱を等温準静膨張させ，系の状態は（マクロに見て）初期状態に戻る．これはエンジンと熱浴に対するユニタリー発展 U_{f} で記述できる．

以上のプロセスを，$n=5$, $m=3$ の場合について FIG. 1 に示した．なお，$n=m=2$ の場合は通常の Szilard エンジン [6] に帰着する．

3 Equality and inequalities

さていよいよ，私たちの研究の主要な結果である等式と不等式を紹介する．まずは，Jarzynski 等式を MD が作用する系に一般化する．系になされる仕事を W として，$\exp(-\beta W)$ を，$k\in K'$ という条件のもとで計算することが目標である．計算の詳細は論文 [23] に譲ることにして結果だけを述べると，

$$\langle\exp(-\beta W)\rangle_{K'}=\frac{Z_{\mathrm{f}}}{Z_{\mathrm{i}}}\frac{\eta}{p}\left(1+\frac{\Delta\eta}{\eta}\right) \tag{10}$$

となる．ここで二つのパラメータ

$$\eta \equiv \sum_{k\in K'} \frac{\mathrm{tr}(D_k^2\rho_1)}{\mathrm{tr}(D_k\rho_1)} = \sum_{k\in K'} \frac{\mathrm{tr}((E_k^\dagger E_k)^2\rho_\mathrm{i})}{\mathrm{tr}(E_k^\dagger E_k\rho_\mathrm{i})}, \tag{11}$$

$$\Delta\eta \equiv \sum_{k\in K'} \mathrm{tr}(D_k V_k^\dagger U_k^\dagger U_\mathrm{f}^\dagger(\rho_\mathrm{f} - \rho_\mathrm{f}^\mathrm{can})U_\mathrm{f} U_k V_k) \tag{12}$$

を導入した．セクションIV.A.で見るように，ηはMDの量子測定の精度を特徴付けるパラメータになっている．

ここで，私たちは終状態ρ_fが

$$\Delta\eta = 0 \tag{13}$$

という条件を満たすことを要請する．この条件の物理的な意味と妥当性については，セクションIV Bで議論する．なお，終状態がカノニカル分布と一致していれば，つまり$\rho_\mathrm{f} = \rho_\mathrm{f}^\mathrm{can}$が成り立っていれば，条件(13)は自明に満たされる．この条件のもとで，MDが作用する系に一般化されたJarzynski等式は

$$\langle \exp(-\beta W)\rangle_{K'} = \exp\left(-\beta\Delta F + \ln\frac{\eta}{p}\right) \tag{14}$$

となる．ここで$\Delta F = F_\mathrm{f} - F_\mathrm{i} = F_\mathrm{f}^\mathrm{S} - F_\mathrm{i}^\mathrm{S}$.

とくに，D_kがすべて射影演算子で，かつ$K' = K$ならば，等式(14)は

$$\langle \exp(-\beta W)\rangle = \exp\left(-\beta\Delta F + \ln d\right) \tag{15}$$

となる．ここでdはKの要素の個数である．この等式(15)の右辺は，測定前の状態ρ_1に依存しない形になっている．

さて次に，一般化されたJarzynski等式をもとにして，熱力学第二法則(1)をMDが作用する等温過程に一般化した不等式を導出しよう．指数関数の凹性により

$$\exp(-\beta\langle W\rangle_{K'}) \le \langle \exp(-\beta W)\rangle_{K'} \tag{16}$$

が成り立つので，

$$\langle W\rangle_{K'} \ge \Delta F - k_\mathrm{B}T\ln\frac{\eta}{p} \tag{17}$$

がわかる．ここでMDが単一の測定結果kのみを選ぶ場合，つまり$K' = \{k\}$の場合を考える．この場合，等式(14)は$\langle \exp(-\beta W)\rangle_k = \exp(-\beta\Delta F + (\eta_k/p_k))$となる．ここで$\eta_k = \mathrm{tr}(D_k^2\rho_1)/\mathrm{tr}(D_k\rho_1)$．したがって不等式(17)は

$$\langle W\rangle_k \ge \Delta F - k_\mathrm{B}T\ln\frac{\eta_k}{p_k} \tag{18}$$

となる．これをすべての$k\in K$に関して平均すれば，

$$\langle W\rangle \ge \Delta F - k_\mathrm{B}TH^\mathrm{eff} \tag{19}$$

を得ることができる．これが私たちの研究における主要な不等式である．なおここで，

$$H^{\mathrm{eff}} \equiv \sum_{k\in K} p_k \ln \frac{\eta_k}{p_k} \tag{20}$$

と定義した量は，MD が系に関して実質的に得た情報量を表している．私たちはこれを実効情報量と呼ぶことにする．

不等式 (19) は (1) の一般化であり，また (17) よりも強い．これは，MD の助けを借りれば単一の熱浴から $-\Delta F$ よりも多くの仕事を取り出せることを示唆しているが，しかし，その仕事は決して $k_{\mathrm{B}}TH^{\mathrm{eff}} - \Delta F$ を超えることはできないのである．

4 Discussions

4.1 Effective Information Content

パラメータ η_k と実効情報量 H^{eff} の物理的意味について議論する．定義から容易に

$$p_k \le \eta_k \le 1 \tag{21}$$

を示すことができる．ここで $p_k = \eta_k$ が任意の ρ_1 について成り立つことの必要十分条件は，D_k が恒等演算子に比例していることである．一方，$\eta_k = 1$ が任意の ρ_1 について成り立つことの必要十分条件は，D_k が射影演算子であることである．$1-\eta_k$ は，D_k と射影演算子の間のある種の距離を特徴付ける尺度であると考えることができる．

不等式 (21) から，実効情報量の基本的な性質

$$0 \le H^{\mathrm{eff}} \le H \tag{22}$$

が直ちに示される．ここで H は Shannon 情報量であり，$H = -\sum_{k\in K} p_k \ln p_k$ で定義される．$H^{\mathrm{eff}} = 0$ が任意の ρ_1 について成り立つことの必要十分条件は，すべての k について D_k が恒等演算子に比例していることである．この場合，MD は測定から ρ について何も知ることができない．一方，$H^{\mathrm{eff}} = H$ が成り立つことの必要十分条件は，すべての k について D_k が射影演算子であることである．この場合は，MD の測定には誤差がないとみなすことができる．

不等式 (19) は，MD が測定で何も情報を得ていない場合は $\langle W\rangle \ge \Delta F$ となり，測定に誤差がない場合は $\langle W\rangle \ge \Delta F - k_{\mathrm{B}}TH$ となる．前者は伝統的な熱力学第二法則 (1) に他ならない．

4.2 Consistency between MD and the Second Law of Thermodynamics

以上の結果をもとに，Landauer[4] と Bennett[3] の方針に従って，MD の役割と熱力学第二法則の整合性について述べる．ポイントは，MD が測定結果を記憶しているメモリの消去を考えることである．等温過程におけるメモリの消去に要する仕事量は，いわゆる Landauer 原理によって明らかにされた．Landauer 原理によると，エネルギー的に縮退したメモリから H ビットの情報を温度 T の等温過程で消去するには，最低でも $k_{\mathrm{B}}TH$ の仕

事が必要であり，仕事と同量の熱が熱浴に放出される．はじめ Landauer はこれを直感的な熱力学的考察から述べていただけであったが，のちに Piechocinska が（Jarzynski 等式を応用して）これを統計力学的に証明した [5].

伝統的な熱力学第二法則は，始状態と終状態が熱平衡であるような場合についてのみ定式化されている．したがって，MD の役割と熱力学第二法則の整合性を示すには，MD も最初と最後に熱平衡状態にあるような場合だけを考えれば十分である．なお，私たちの結果 (14) および (19) は，このような MD の状態に関する制約なしに，より一般的に成立する．

MD が温度 T の等温過程でメモリを消去し，その過程で W_D の仕事が必要であった場合について考えよう．熱力学系 S と MD をあわせて考えると，トータルで S+MD になされる仕事は $W + W_D$ である．私たちの結果 (19) によれば $W \geq \Delta F - k_{\mathrm{B}}TH^{\mathrm{eff}}$，また Landauer 原理によれば $W_D \geq k_{\mathrm{B}}TH$，さらに $H^{\mathrm{eff}} \leq H$ なので，結局

$$W + W_D \geq -\Delta F \tag{23}$$

となり，たしかに熱力学第二法則と矛盾していない．

4.3 Characterization of Thermodynamic Equilibrium States

さて，条件 (13) の物理的意味と妥当性について考察する．

一般に，カノニカル分布によって熱平衡状態の性質を記述することができる．しかし熱平衡状態の性質は，マクロな物理量の平均値によって特徴付けられているだけである．実際，たとえばある熱浴が熱平衡状態であるかどうかを判別するためには，熱浴を構成する分子を一つずつ全て観測する必要はなく，マクロな物理量を観測するだけで十分である．たとえば，熱浴の「小さな」部分——実際にはそれはたとえば 10^{12} 個もの分子で構成されているだろう——の重心座標を観測するだけで十分であると考えられる．したがって，熱平衡状態に対応する密度演算子は，必ずしも厳密にカノニカル分布であるとは限らない．$\rho_{\mathrm{f}} = \rho_{\mathrm{f}}^{\mathrm{can}}$ は強すぎる条件なのである．

MD が関与しない系における Jarzynski 等式の導出においては，終状態 ρ_{f} がカノニカル分布であるとは仮定されていない [16]．したがって $\langle \exp(-\beta W) \rangle = \exp(-\beta \Delta F)$ は任意の終状態について成り立つことになる．そして，S+B の終状態が自由エネルギー F_{f} に対応する熱平衡状態であるという条件のもとでは，たとえ ρ_{f} がカノニカル分布と厳密には一致していなくても，不等式 (1) を平衡状態間の遷移に関する不等式だとみなすことが可能である．

他方で私たちは，終状態 ρ_{f} について，マクロな物理量の平均値がカノニカル分布におけるそれと一致するという条件に加えて，条件 (13) も要請した．この条件は

$$\mathrm{tr}(\tilde{D}_k \rho_{\mathrm{f}}) = \mathrm{tr}(\tilde{D}_k \rho_{\mathrm{f}}^{\mathrm{can}}) \tag{24}$$

がすべての $k \in K'$ に関して成り立てば成立する．ここで，$\tilde{D}_k \equiv U_{\mathrm{f}} U_k V_k D_k V_k^{\dagger} U_k^{\dagger} U_{\mathrm{f}}^{\dagger}$ とおいた．この条件は，真の終状態 ρ_{f} とカノニカル分布 $\rho_{\mathrm{f}}^{\mathrm{can}}$ の，MD による識別可能性と関係しているように見える．

条件 (13) が，$\rho_{\mathrm{f}} = \rho_{\mathrm{f}}^{\mathrm{can}}$ に比べてきわめて弱い条件であるということは重要である．f を S+B の自由度（たとえば $f \sim 10^{23}$）として，N を S+B を記述する Hilbert 空間の次元，d' を K' の要素の個数とする．明らかに $N \geq O(2^f)$ が成り立つ．一方で，MD の作

用を実験的に実現できるような状況においては $d' = O(1)$ が成り立つと考えられる．たとえば，S がスピン-1の系で，B が調和振動子から構成されている場合を考え，量子光学のデバイスによって作られた MD が S を射影測定するとする．この場合は，$d' \leq d = 3$ で $N = \infty$ となる．一方，$\rho_{\rm f} = \rho_{\rm f}^{\rm can}$ が厳密に成り立つのは，$\rho_{\rm f}$ と $\rho_{\rm f}^{\rm can}$ の全ての行列要素が一致する場合である．その行列要素に含まれる独立な実変数の数は $N^2 - 1$ である．それに対して，(24) に含まれる d' 個の等式さえ満たされていれば，条件 (13) すなわち $\Delta\eta = 0$ は成立する．

条件 (13) が実際の物理系で成立するというのは現時点では推測であるが，しかし，私たちは多くの状況で成り立つと予想している．条件 (13) の成立条件の分析は，熱平衡状態という概念を検討するにあたっても，重要であると思われる．

最後に，条件 (13) は満たされていないものの

$$\left|\mathrm{tr}\left(\tilde{D}_k(\rho_{\rm f} - \rho_{\rm f}^{\rm can})\right)\right| \leq \varepsilon \tag{25}$$

が全ての $k \in K'$ で成り立っている場合を考えると，$|\Delta\eta/\eta|$ を

$$\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| \leq \frac{d'}{p}\varepsilon \tag{26}$$

と評価することができる．(10) における $|\Delta\eta/\eta|$ の項は，(25) の左辺でおさえられることになる．

5 Conclusion

私たちは論文 [23] において，Jarzynski 等式を MD が作用する等温過程に一般化し，そこから新しい熱力学不等式を導いた．私たちの定式化において，MD は熱力学系を量子測定し，測定結果に応じたユニタリー操作を行う．これはシンプルな量子フィードバック制御であるとみなすことができる．私たちの結果は，MD が得た情報と単一の熱浴から取り出せる仕事の間に密接な関係があることを示している．情報処理を含む熱力学過程のさらなる分析は，量子情報処理および統計力学の両方の領域において重要であると考えられる．

References

[1] J. C. Maxwell, *"Theory of Heat"* (Appleton, London, 1871).

[2] *"Maxwell's demon 2: Entropy, Classical and Quantum Information, Computing"*, H. S. Leff and A. F. Rex (eds.), (Princeton University Press, New Jersey, 2003).

[3] R. Landauer, IBM J. Res. Develop. **5**, 183 (1961).

[4] C. H. Bennett, Int. J. Theor. Phys. **21**, 905 (1982).

[5] B. Piechocinska, Phys. Rev. A **61**, 062314 (2000).

[6] L. Szilard, Z. Phys. **53**, 840 (1929).

[7] W. Zurek, e-Print: quant-ph/0301076.

[8] S. Lloyd, Phys. Rev. A **56**, 3374 (1997).

[9] G. J. Milburn, Aus. J. Phys. **51**, 1 (1998).

[10] M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **87**, 220601 (2001).

[11] T. D. Kieu, Phys. Rev. Lett. **93**, 140403 (2004).

[12] J. Oppenheim, M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **89**, 180402 (2002).

[13] K. Maruyama, F. Morikoshi, and V. Vedral, Phys. Rev. A **71**, 012108 (2005).

[14] M. A. Nielsen, C. M. Caves, B. Schumacher, and H. Barnum, Proc. R. Soc. London A, **454**, 277 (1998).

[15] V. Vedral, Proc. R. Soc. London A, **456**, 969 (2000).

[16] C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. **78**, 2690 (1997).

[17] C. Jarzynski, Phys. Rev. E **56**, 5018 (1997).

[18] H. Tasaki, e-Print: cond-mat/0009244.

[19] S. Yukawa, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 2367 (2000).

[20] S. Mukamel, Phys. Rev. Lett. **90**, 170604 (2003).

[21] W. DeRoeck and C. Maes, Phys. Rev. E **69**, 026115 (2004).

[22] K. H. Kim and H. Qian, e-Print: physics/0601085.

[23] T. Sagawa and M. Ueda, e-Print: cond-mat/0609085 (2006).

[24] E. B. Davies and J. T. Lewis, Commun. Math. Phys. **17**, 239 (1970).

[25] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *"Quantum Computation and Quantum Information"* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).