

# 非可換観測量の同時測定可能性

東北大学大学院情報科学研究科 小澤 正直 (Masanao Ozawa)

## 1 はじめに

Heisenberg [1]の不確定性原理の標準的解釈によれば、粒子の位置と運動量のように非可換観測量は同時測定不可能であるとされている。一方、Bohr [2]は、位置と運動量の値の概念は、相補的であり、選ばれた文脈に依存して、その一方しか意味を持たないとされ、Heisenbergの不確定性原理は、この相補性原理の自然な帰結であると述べた。

ところが、Einstein, Podolsky, 及び Rosen (EPR) [3]によって展開された議論によれば、ある実験的状況のもとでは、位置と運動量の両方の値が実在することが推量され、EPRは、このことから、波動関数による量子力学の状態記述は不完全であると結論した。

位置と運動量のように非可換な観測量に対して、隠れた変数を導入することにより、同時に値を付与する可能性については、すでに隠れた変数理論の不可能性として、von Neumann [4]によって証明が与えられていた。しかし、Bell [5]は von Neumann の証明には、付値が非可換物理量の間に加法性を持つという不合理な仮定があると批判した。

さらに、Bell [6]は、EPRの議論では局所性を仮定していることに着目して、EPRの実験状況を2粒子のスピン成分の測定に変型した状況において、2粒子のスピン成分の結合確率分布が、局所性を持つ隠れた変数によって説明されるなら、Bellの不等式が成立すべきであることを示し、量子力学の予言と矛盾が生まれることを示した。

量子力学の実験的正しさは、Bellの不等式が破れていて、局所的隠れた変数が存在しないことを示していたが、更に、Bellの不等式の破れの直接的な実験的検証も行われ、局所的隠れた変数理論の不可能性は、明白となった [7]。

このように、現在では、量子力学が不完全であるというEPRの主張は、EPRが不完全だと判定した部分をEPRが仮定したような局所性の要求を満たす理論によって完全にすることはできないという意味で完全に退けられている。ただ、これまでの議論の流れでは、局所性/非局所性という概念が過大に取り上げられていて、EPRの主張が正しくなかったのは、つまり、不完全であるという主張にもかかわらず、完全な理論が存在しないことは、局所性の要求が満たされると仮定したからであり、量子力学は局所性の要求を満たさない完全な理論であるという誤解が流布しているように思われる。

Bell の議論は、もし、2粒子のスピン成分の相関が隠れた変数で説明できるならば、その隠れた変数理論が局所性の要求を満たさないことを示している。しかし、量子力学という理論が局所性の要求を満たさないという主張には何の根拠もない。

そこで、縫れた糸をほぐすためにもう一度 von Neumann の証明に戻ろう。von Neumann の証明のギャップは、すでに、Gleason [8] によって埋められたと考えられる。つまり、Gleason の定理によれば、射影作用素全体からなる束の上の可算加法的測度は、すべて密度作用素で表現される。一方、von Neumann が仮定し、Bell が批判した付値の非可換観測量に対する加法性を可換な観測量の間だけに制限しても、その付値は射影作用素上の可算加法的測度に対応し、それに Gleason の定理を適用すれば、やはり、付値が密度作用素で表現されるものに限られるという結論が導かれる。この定理は、2次元のヒルベルト空間では成立しないが、この定理から、2粒子のスピン系のすべての観測量に値を付与することは不可能であることが結論される。また、このことの Gleason の定理を経由しない端的な証明は、Kochen-Specker [9] によっても与えられている。

von Neumann-Gleason-Kochen-Specker の隠れた変数の非存在定理を免れる試みとして、3つの観測量  $A, B, C$  が  $A = f(B) = g(C)$  という関係にあるときに、 $B$  を測定してその結果に  $f$  を適用することによって得られる  $A$  の測定値と  $C$  を測定してその結果に  $g$  を適用することによって得られる  $A$  の測定値とが等しいと想定する必要がないとする考え方がある [10]。しかし、この考えが意味を持つとすれば、 $A$  の値がそれを測定する方法に依存して定義されることになる。本稿の立場では、隠れた変数があるとすれば、それは測定に先立って物理量の値を定め、測定によって見い出されるものと考えているので、そのような方法で隠れた変数の非存在を免れることはできない。

従って、量子力学を隠れた変数理論で完全にすることはありえない。では、このことは量子力学がそもそも局所性の要求と矛盾する理論であるということの意味するのであろうか。2粒子系の量子力学を詳細に調べると、EPR 状態を用いても瞬間的な情報通信ができないなど、量子力学は局所性の要求を整合的に取り入れているように見え、量子力学から局所性の要求と矛盾する予言を導くことはできそうにない。ということは、量子力学の完全性と局所性の間に二律背反が存在するという結論を導いた EPR の議論自体にギャップが存在すると考える必要がありそうである。

それでは、EPR の議論のどこにギャップが存在したのであろうか。本稿では、この問題に関する筆者の最近の研究のあらましを概説する（詳しい内容は、文献 [11, 12, 13] などに譲る）。

## 2 EPR のパラドックス再考

EPR のパラドックスがパラドックスである理由は、量子力学で本来両立しないはずの位置と運動量の値が両立しているかのように考えられるということにある。つまり、粒子1と粒子2

からなる2粒子系のいわゆる EPR 状態において、粒子2の運動量測定により、粒子1の運動量が推量され、粒子2の位置測定により、粒子1の位置が推量される。第1の推量により、粒子1の運動量は観測者の行為と独立に実在し、第2の推量により、粒子1の位置が観測者の行為と独立に実在するので、位置と運動量の値が同時に実在すると EPR は結論している。

しかし、EPR の論文の末尾に次のようなただし書きが書かれている。

実在性に関するわれわれの判定基準が十分に限定されていないという理由でこの結論を退けることができるだろうか。実際、もし2個以上の物理量が同時に実在の要素であるとみなされるためには、それらが同時測定可能であるか、同時に予言可能でなければならないと主張したとすれば、われわれの結論には至らなかったであろう。この観点に立てば、物理量  $P$  と  $Q$  は、両方同時にではなく、そのうちの一方だけがそれぞれ予言可能なのであるから、それらは同時に実在しているとはいえない。しかし、このことは  $P$  と  $Q$  の実在性が、第1の系について行われ、第2の系を全く乱さない測定の過程に依存するということになる。実在性の合理的な定義は、どんなものであれ、このようなことを許容するとは考えられない[3]。

上のただし書きでは、EPR の議論は、 $P$  と  $Q$  の非同時的な予言可能性から同時実在性を導いたが、同時実在性には同時予言可能性または同時測定可能性が必要だとする立場からは、この結論は導かれませんが、しかし、そのような基準は、実在が測定過程に依存することになると述べている。しかし、同時予言可能性または同時測定可能性を要求すると、実在が測定過程に依存することになるという主張は誤りであることを示すことができる。だから、上のただし書きを受け入れなければならない根拠はない。つまり、EPR が危惧するように、EPR の議論では実在性に関する判定基準が十分に限定されていないという批判には、十分に答えられていないと考えられる。

EPR の議論では、しばしば予言可能性と測定可能性が十分な区別なしに使われている。もし予言可能性を物理量の実在している値を予言できることと解釈すれば、EPR の議論は明らかな循環論法に陥るので、予言可能性とは、これから行われる測定の測定値が予言可能であると解釈しなければならない。もし、これから行われる測定が確率1で予言可能なら、その測定は既に行われたと行うことができる。このことから、EPR の議論は、位置と運動量の非同時的予言可能性のほかに、実際は同時測定可能性をも導いていることを示すことができる。つまり、ハイゼンベルクの不確定性原理で位置と運動量の同時測定が不可能とされていることは、一方（例えば、運動量）を乱さないで他方（例えば、位置）を測定することができないことが含意されている。しかし、これは常に正しいことではなく、EPR の状況では明らかに、第1の粒子を測定することにより、一方（例えば、第2の粒子の運動量）を乱すことなく他方（例えば、第2の粒子の位置）を予言できるので、両者（第2の粒子の位置と運動量）同時測定可能ということになる。

筆者の最近の研究 [11, 12, 13] では、同時実在性、同時測定可能性の定義を与えて、それらの論理的関係を数学的に調べた。その結果、同時実在性から同時測定可能性が導かれ、また、非同時的予言可能性から同時測定可能性が導かれるが、同時測定可能性から同時実在性は導かれないことを明らかにした。以下の各節では、それらの概略を紹介する。

### 3 同時測定可能性の従来議論

#### 1. 定理：可換性 $\Rightarrow$ 同時測定可能性

$A$  と  $B$  が可換である  $\Rightarrow$  ある観測量  $C$  とボレル関数  $f, g$  が存在して、 $A = f(C)$  かつ  $B = g(C)$  となるので、時刻  $t$  における  $C$  の値を測定すれば、時刻  $t$  における  $A$  と  $B$  の値も測定される。

#### 2. 定理：同時測定可能性 $\Rightarrow$ 可換性

$A$  と  $B$  が同時測定可能である  
 $\Rightarrow \mathbf{R}^2$  上の POVM  $\Pi$  が存在して

$$\Pi(\Delta \times \mathbf{R}) = E^A(\Delta) \quad \text{かつ} \quad \Pi(\mathbf{R} \times \Gamma) = E^B(\Gamma).$$

$$\Rightarrow \Pi(\Delta \times \Gamma) = E^A(\Delta)E^B(\Gamma) = E^B(\Gamma)E^A(\Delta).$$

$\Rightarrow A, B$  は可換である。

### 4 従来議論の問題点

#### 3. 従来議論で示されたことは、任意の観測量 $A, B$ について、

「観測量  $A, B$  を任意の状態において同時に測定する装置が存在する」 $\Leftrightarrow$ 「観測量  $A, B$  が任意の状態において可換である」

#### 4. しかし、ある観測量を任意の状態で測定する装置が存在することを要求することは過大な要求である。例えば、典型的な位置の測定装置である地球上のどのガンマ線頭微鏡も、粒子が月にある時の位置を測ることはできない。

#### 5. そこで、同時測定可能性と可換性が同等という主張をするためには、少なくとも、任意の観測量 $A, B$ と任意の状態 $\rho$ について、

「観測量  $A, B$  を状態  $\rho$  において同時に測定する装置が存在する」 $\Leftrightarrow$ 「観測量  $A, B$  が状態  $\rho$  において可換」

ということを証明しなければならない。

## 5 状態に依存する可換性の定義

6. 観測量がある状態  $\rho$  で可換であるとは、どういう条件を意味するのだろうか。  
 $AB\rho = BA\rho$  という条件がまず思い浮かぶが、これは、任意の状態において可換であるという条件が、従来の条件と整合的にならない。
7. 可換性と同時測定可能性が同等であることの従来の証明では、 $A$  と  $B$  の可換性を

$$E^A(\Delta)E^B(\Gamma)\psi = E^B(\Gamma)E^A(\Delta)\psi$$

が任意の区間  $\Delta, \Gamma$  とベクトル  $\psi$  について成立することと定義されている。このことから、次の定義が妥当であろうと予想される。

8. 定義：観測量  $A$  と  $B$  が状態  $\rho$  で可換である  $\Leftrightarrow$

$$E^A(\Delta)E^B(\Gamma)\rho = E^B(\Gamma)E^A(\Delta)\rho$$

が任意のボレル集合  $\Delta, \Gamma$  について成立する。

## 6 所有値の両立性と可換性

9. 定義： $C^*(A, B) = \{f(A), f(B) \mid f \in K(\mathbf{R})\}$  で生成される  $C^*$  代数”。ここで、 $K(\mathbf{R})$  はコンパクトな台を持つ連続関数の全体。
10. 定義：観測量  $A, B$  が状態  $\rho$  で両立的所有値を持つ  $\Leftrightarrow C^*(A, B)$  の分散のない状態の集合  $\mathcal{D}$  上の確率測度  $\mu$  が存在して、任意の  $C \in C^*(A, B)$  に対して、

$$\text{Tr}[C\rho] = \int_{\mathcal{D}} \omega(C) d\mu(\omega)$$

が成り立つ。

11. 定理: (1) 観測量  $A, B$  が状態  $\psi$  で両立的所有値を持つ  $\Leftrightarrow A, B$  は状態  $\psi$  で可換である。
- (2) 離散的観測量  $A, B$  が状態  $\psi$  で両立的所有値を持つ  $\Leftrightarrow \psi$  は  $A, B$  の共通の固有状態の重ね合わせである。

## 7 結合確率分布

12. 定義：観測量  $A, B$  の状態  $\rho$  における結合確率分布とは、 $\mathbf{R}^2$  上の確率測度  $\mu_\rho^{A,B}$  で  $\mathbf{R}$  上の任意の有界ボレル関数  $f, g$  及び任意の多項式  $p(f(A), g(B))$  に対して、

$$\mathrm{Tr}[p(f(A), g(B))\rho] = \int_{\mathbf{R}^2} p(f(x), g(y)) d\mu_\rho^{A,B}(x, y)$$

を満たすものである。

13. 定理：観測量  $A, B$  の状態  $\rho$  における結合確率分布が存在する  $\Leftrightarrow$  観測量  $A, B$  が状態  $\rho$  で可換である。この時、状態  $\rho$  における  $A, B$  の結合確率分布が

$$\mu_\rho^{A,B}(\Delta \times \Gamma) = \mathrm{Tr}[E^A(\Delta)E^B(\Gamma)\rho]$$

で与えられる。

## 8 同一性相関

14. 定義： $A \equiv_\rho B$  ( $A$  と  $B$  は状態  $\rho$  で同一の値を所有する)  
 $\Leftrightarrow A, B$  は両立的所有値をもち、それらは確率1で等しい：

$$\mu_\rho^{A,B}(\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq y\}) = 0.$$

15. 定理： $A \equiv_\rho B \Leftrightarrow$  任意のボレル集合  $\Delta, \Gamma$  に対して、

$$\mathrm{Tr}[E^A(\Delta)E^B(\Gamma)\rho] = \mathrm{Tr}[E^A(\Delta \cap \Gamma)\rho]$$

が成立する。

16. 定理：離散的観測量  $A, B$  とベクトル状態  $\psi$  に対して、 $A \equiv_\psi B \Leftrightarrow \psi$  は  $A, B$  の共通の固有値に対する共通の固有状態の重ね合わせである。

17. 定理：同一性相関  $\equiv_\rho$  は、観測量の間の同値関係であり、とりわけ、推移律「 $A \equiv_\psi B$  かつ  $B \equiv_\psi C$  ならば  $A \equiv_\psi C$ 」が成り立つ。

## 9 測定と同一性相関

18. 定義： $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ ：ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  (対象系) に対する測定過程

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{K}$ : ヒルベルト空間 (プローブ系)

$\xi$ :  $\mathcal{K}$  の単位ベクトル (プローブの初期状態)

$U$ :  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  上のユニタリ作用素 (測定相互作用)

$M$ :  $\mathcal{K}$  上の自己共役作用素 (メーター観測量)

19. 以下のようなハイゼンベルク表示を用いる.

$$A(0) = A \otimes I, \quad B(0) = B \otimes I, \quad M(0) = I \otimes M,$$

$$A(\Delta t) = U^\dagger(A \otimes I)U, \quad B(\Delta t) = U^\dagger(B \otimes I)U, \quad M(\Delta t) = U^\dagger(I \otimes M)U.$$

20. 定義:  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  が観測量  $A$  をボレル関数  $f$  により状態  $\rho$  で測定する  
 $\Leftrightarrow f(M(\Delta t)) \equiv_{\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|} A(0)$ .

21.  $f$  が恒等関数のとき,  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  が観測量  $A$  を状態  $\rho$  で測定するという.

22. 測定後の観測量  $f(M)$  の所有値と測定前の観測量  $A$  の所有値は両立的で等しい. したがって, 測定後の観測量  $f(M)$  は測定前の観測量  $A$  の確率分布を再現するだけでなく, その値も再現する.

23. 定義: 測定過程  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  とボレル関数  $f$  の POVM  $\Pi$  は,

$$\Pi(\Delta) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}[U^\dagger(I \otimes E^M(\Delta))U(I \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)].$$

で定義される.

24. 定義: 状態  $\psi$  における測定値の確率分布は

$$P(\Delta|\psi) = \langle\psi|\Pi(\Delta)|\psi\rangle$$

で定まる.

25. 定理:  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  がボレル関数  $f$  によって任意の状態  $\psi$  で観測量  $A$  を測定する  
 $\Leftrightarrow$  任意のボレル集合  $\Delta$  に対して  $\Pi(\Delta) = E^A(\Delta)$ .

## 10 von Neumann の測定

$$A = \sum_m m |\phi_m\rangle\langle\phi_m|, \quad M = \sum_m m |\xi_m\rangle\langle\xi_m|, \quad U(|\phi_m\rangle \otimes |\xi\rangle) = |\phi_m\rangle \otimes |\xi_m\rangle$$

$$\psi = \sum_m c_m |\phi_m\rangle \Rightarrow U(|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle) = \sum_m c_m |\phi_m\rangle \otimes |\xi_m\rangle$$

26. この時, 次の関係が成立.

$$A(0)|\phi_m\rangle \otimes |\xi\rangle = A(\Delta t)|\phi_m\rangle \otimes |\xi\rangle = M(\Delta t)|\phi_m\rangle \otimes |\xi\rangle = m|\phi_m\rangle \otimes |\xi\rangle$$

27.  $|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle$  は,  $A(0)$  と  $M(\Delta t)$  の共通の固有値  $m$  に属する共通の固有状態  $|\phi_m\rangle \otimes |\xi\rangle$  の重ね合わせである.

28. 定理: von Neumann の測定では,  $M(\Delta t) \equiv_{\psi \otimes \xi} A(0)$  が成立し,  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  は, 状態  $\psi$  で観測量  $A$  を測定する.

### 11 非両立的所有値の同時測定可能性

29. 定義: 測定過程  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  は, 状態  $\rho$  においてボレル関数  $f, g$  によって観測量  $A, B$  を同時測定する  $\Leftrightarrow$

$$f(M(\Delta t)) \equiv_{\rho \otimes |\xi\rangle \langle \xi|} A(0)$$

$$g(M(\Delta t)) \equiv_{\rho \otimes |\xi\rangle \langle \xi|} B(0)$$

30. 定義:  $A$  と  $B$  は状態  $\rho$  で同時測定可能  $\Leftrightarrow$  測定過程  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  及びボレル関数  $f, g$  が存在して,  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  は  $f, g$  によって状態  $\rho$  で  $A$  と  $B$  を同時測定する.

31. 2つのスピン1/2粒子の合成系における観測量  $\sigma_z \otimes I$  と  $\sigma_x \otimes I$  はすべての状態において非可換である. したがって, すべての状態でそれらの所有値は非両立的である.

32. しかし, 例えば, 次の状態  $\psi$  において, それらは同時測定可能である.

$$\psi = \frac{1}{2}(|\sigma_x = +1\rangle|\sigma_x = +1\rangle + |\sigma_x = -1\rangle|\sigma_x = -1\rangle)$$

33.  $A = \sigma_z \otimes I, B = \sigma_x \otimes I, C = I \otimes \sigma_x$  とする.  $A$  と  $C$  は任意の状態でも可換だから, それらを同時に測定する測定過程  $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$  とボレル関数  $f, g$  が存在する. このとき,

$$A(0) \equiv_{\psi \otimes \xi} f(M(\Delta t)), \quad C(0) \equiv_{\psi \otimes \xi} g(M(\Delta t)).$$

が成り立つ. 一方, 状態  $\psi$  の性質から,

$$C(0) \equiv_{\psi \otimes \xi} B(0).$$

同一性相関の推移律から,

$$B(0) \equiv_{\psi \otimes \xi} g(M(\Delta t))$$

となり,  $A, B$  が同時測定されることが示された.



## 12 可換性と同時測定可能性の差異

34. 定義 (巡回部分空間) :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, \psi) &= \{X\psi \mid X \in C^*(A)\}^{\perp\perp} \\ \mathcal{C}(A, B, \psi) &= \{X\psi \mid X \in C^*(A, B)\}^{\perp\perp} \end{aligned}$$

35. 定理 : 観測量  $A, B$  が状態  $\psi$  で両立的所有値を持つ  $\Leftrightarrow$   
 $\mathbf{R}^2$  上の POVM  $\Pi$  が存在して,

$$\begin{aligned} \Pi(\Delta, \mathbf{R}) &= E^A(\Delta) \quad \text{on } \mathcal{C}(A, B, \psi), \\ \Pi(\mathbf{R}, \Delta) &= E^B(\Delta) \quad \text{on } \mathcal{C}(A, B, \psi). \end{aligned}$$

が任意のボレル集合  $\Delta$  について成立する.

36. 定理 : 観測量  $A, B$  が状態  $\psi$  で同時測定可能である  $\Leftrightarrow$   
 $\mathbf{R}^2$  上の POVM  $\Pi$  が存在して,

$$\begin{aligned} \Pi(\Delta, \mathbf{R}) &= E^A(\Delta) \quad \text{on } \mathcal{C}(A, \psi), \\ \Pi(\mathbf{R}, \Delta) &= E^B(\Delta) \quad \text{on } \mathcal{C}(B, \psi). \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Z. Phys. 43 (1927) 172–198.
- [2] N. Bohr, The quantum postulate and the recent development of atomic theory, Nature (London) 121 (1928) 580–590.
- [3] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, Phys. Rev. 47 (1935) 777–780.
- [4] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.
- [5] J. S. Bell, On the problem of hidden variables in quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 447–452.
- [6] J. S. Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, Physics 1 (1964) 195–200.

- [7] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1804–1807.
- [8] A. M. Gleason, Measures on the closed subspaces of a Hilbert space, *J. Math. Mech.* 6 (1957) 885–893.
- [9] S. Kochen, E. P. Specker, The problem of hidden variables in quantum mechanics, *J. Math. Mech.* 17 (1967) 59–87.
- [10] M. Redhead, *Incompleteness, Nonlocality, and Realism: A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics*, Oxford UP, Oxford, 1987.
- [11] M. Ozawa, Quantum perfect correlations, *Ann. Phys. (N.Y.)* 321 (2006) 744–769.
- [12] M. Ozawa, Simultaneous measurability of non-commuting observables and the universal uncertainty principle, in *Proc. 8th Int. Conf. on Quantum Communication, Measurement and Computing* (in press).
- [13] M. Ozawa, in preparation (2007).